

УДК 517.95

Т.А. Ротанова

**КОНТАКТ ПЛАСТИН, ЖЕСТКИЕ ВКЛЮЧЕНИЯ В КОТОРЫХ  
ВЫХОДЯТ НА ГРАНИЦУ<sup>1</sup>**

В представленной работе рассматривается контакт двух упругих пластин, расположенных под углом друг к другу. Каждая из пластин содержит жесткое включение, выходящее на область контакта. В верхней пластине жесткое включение выходит также на границу пластины. Нижняя пластина деформируется в своей плоскости, а верхняя – в вертикальном направлении. Вариационными методами установлена разрешимость задачи. В предположении достаточной гладкости решения получена дифференциальная постановка задачи, эквивалентная вариационной. Рассмотрен предельный случай, соответствующий возрастанию параметра жесткости верхней пластины к бесконечности.

**Ключевые слова:** *вариационное неравенство, жесткое включение, пластина Кирхгофа – Лява, контактная задача, выход на границу.*

Данная работа относится к изучению класса задач об одностороннем контакте упругих тел, в частности к контактным задачам для упругих пластин с жестким включением. Исследование задач о контакте упругих тел, содержащих жесткие включения, в настоящее время представляет огромный интерес в связи с активным изучением в последние годы композитных материалов.

Оказалось, что математическая постановка данного класса задач требует принципиально нового подхода. В ряде недавних работ [1 – 4], посвященных описанию и анализу контактных задач об упругих телах, содержащих жесткие включения, был предложен метод, позволяющий выписать полную систему краевых условий на границе жесткого включения, а также в случае контакта жестких зон. Влияние внешних сил на жесткую часть пластины описывается с помощью уравнения и неравенства в соответствии с принципом виртуальных перемещений. Оказывается, что работа на истинных перемещениях точек тела обращается в ноль, а для всех возможных перемещений имеем соответствующее неравенство.

Рассмотрим односторонний контакт двух упругих пластин под действием внешних сил (модель Кирхгофа – Лява [5]). Пластины расположены под углом  $\alpha$  друг к другу, где  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}]$ . В естественном состоянии пластины контактируют по прямолинейной незамкнутой кривой ненулевой меры  $\gamma$ . Такая задача исследовалась в работах [6 – 8]. Особенностью данной работы является то, что каждая из пластин содержит жесткое включение, выходящее на область возможного контакта, и, таким образом, выполняется принцип виртуальных перемещений. Кроме того, предполагаем, что жесткое включение в верхней пластине выходит на её границу.

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 – 2013 годы (П1597), гранта РФФИ № 10-01-00054 и гранта Президента РФ (МК-222.2010.1).

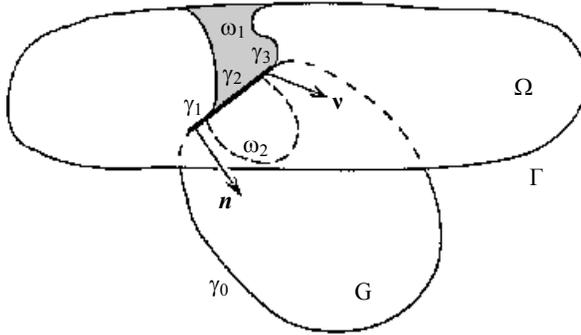


Рис. 1. Контакт пластин, жесткие включения выходят на границу

### 1. Постановка задачи

Пусть заданы ограниченные области  $\Omega, G \subset R^2$  с гладкими границами  $\Gamma$  и  $\partial G$ , соответствующие срединным плоскостям контактирующих пластин. Пусть  $\gamma \subset \partial G, \gamma \cap \Gamma = \emptyset$  и  $\gamma_0 = (\partial G) \setminus \Omega$ , тогда  $\partial G = \gamma \cup \gamma_0$ . При этом нижняя пластина  $G$  деформируется в своей плоскости, а точки верхней (горизонтальной) пластины  $\Omega$  допускают перемещение только в вертикальном направлении. Обозначим  $q = (q_1, q_2)$  – вектор внешней нормали к границе  $\Gamma$ ,  $v = (v_1, v_2)$  – вектор нормали к  $\gamma$ , расположенный в плоскости верхней пластины  $\Omega$ ,  $n = (n_1, n_2)$  – единичный вектор внутренней нормали к  $\partial G$ , расположенный в плоскости нижней пластины  $G$ . Кроме того,  $w_v = \frac{\partial w}{\partial v}, w_q = \frac{\partial w}{\partial q}$ . Пусть также  $g = (g_1, g_2), g_i \in L^2(G), i=1,2; f \in L^2(\Omega)$  – заданные функции, описывающие действие внешних сил.

Разобьем область возможного контакта пластин на три части:  $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$ . Каждая из пластин содержит жесткое включение (рис. 1). Для верхней пластины жесткое включение – это подобласть  $\omega_1$  с гладкой границей  $\partial\omega_1 = \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \Sigma_1$ , выходящая на внешнюю границу  $\Omega$ . При этом  $\Omega \setminus \bar{\omega}_1$  соответствует упругой части пластины. Для описания перемещения точек области  $\omega_1$  введем пространство жестких перемещений:

$$L(\omega_1) = \{l \mid l(x) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2, a_i = \text{const}, i = 0,1,2; x = (x_1, x_2) \in \omega_1\}. \quad (1)$$

Таким образом, перемещения точек жесткого включения представляют собой элементы пространства аффинных непрерывных функций. Будем предполагать, что на  $\Gamma$  выполнено условие жесткого заземления пластин, тогда перемещения подобласти  $\omega_1$  жесткого включения  $l_0 \equiv 0$ .

Жесткое включение в нижней пластине – подобласть  $\omega_2 \subset G$  с границей  $\partial\omega_2 = \gamma_2 \cup \Sigma_0$ , где  $\Sigma_0$  является кривой класса  $C^{0,1}$ . Таким образом,  $G \setminus \bar{\omega}_2$  соответствует упругой части пластины. С целью описать перемещение точек области  $\omega_2$  введем пространство инфинитезимальных жестких перемещений:

$$R(\omega_2) = \{\rho = (\rho_1, \rho_2) \mid \rho(x) = Cx + D, x \in \omega_2\},$$

где 
$$C = \begin{pmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{pmatrix}, D = (d^1, d^2), \text{ где } c, d^1, d^2 = \text{const}.$$

Будем рассматривать пространство  $H_{\gamma_0}^1(G) \times H_0^2(\Omega)$ , где

$$H_{\gamma_0}^1(G) = \{u \in [H^1(G)]^2 \mid u = 0 \text{ на } \gamma_0\},$$

$$H_0^2(\Omega) = \{w \in H^2(\Omega) \mid w = \frac{\partial w}{\partial q} = 0 \text{ на } \Gamma\}.$$

Введем  $K_{\omega_1, \omega_2}$  – множество допустимых перемещений:

$$K_{\omega_1, \omega_2} = \{(u, w) \in H_{\gamma_0}^1(G) \times H_0^2(\Omega) \mid un \sin \alpha + w \geq 0 \text{ на } \gamma_1, \\ un \geq 0 \text{ на } \gamma_2 \cup \gamma_3; w|_{\omega_1} = 0, u|_{\omega_2} \in R(\omega_2)\}.$$

Введем обозначения для изгибающего момента и перерезывающей силы верхней пластины:

$$m(w) = \zeta \Delta w + (1 - \zeta) \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}, \quad t^v(w) = \frac{\partial}{\partial v} (\Delta w + (1 - \zeta) \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}), \quad s = (s_1, s_2) = (-v_2, v_1),$$

где  $\zeta$  – коэффициент Пуассона верхней пластины  $\Omega$ . Для описания нижней пластины введем тензор модулей упругости  $B = \{b_{ijkl}\}$ ,  $i, j, k, l = 1, 2$ . Пусть имеет место положительная определенность коэффициентов  $b_{ijkl} \in L^\infty(G)$ :

$$b_{ijkl} \xi_{kl} \xi_{ij} c_0 \mid \xi \mid^2 \quad \forall \xi_{ij} = \xi_{ji}, \quad c_0 > 0, \quad (2)$$

а также их симметричность:  $b_{ijkl} = b_{klij} = b_{jikl}$ ,  $i, j, k, l = 1, 2$ . Также введем соответственно тензоры деформаций и напряжений  $\varepsilon(u) = \{\varepsilon_{ij}(u)\}$ ,  $\sigma(u) = \{\sigma_{ij}(u)\}$ ,  $i, j = 1, 2$ ,

$$\sigma n = (\sigma_{1j} n_j, \sigma_{2j} n_j), \quad \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad i, j = 1, 2.$$

Полагаем, что  $\sigma = \sigma_{ij} n_i n_j$ ,  $\sigma_\tau = \sigma n - \sigma_n n$ ,  $\sigma_\tau = (\sigma_\tau^1, \sigma_\tau^2)$ . Все величины с двумя нижними индексами предполагаются симметричными по этим индексам; по повторяющимся индексам проводится суммирование. Пусть функции  $w(y)$  и  $u(x) = (u_1(x), u_2(x))$ ,  $y = (y_1, y_2) \in \Omega$ ,  $x = (x_1, x_2) \in G$  описывают перемещения точек верхней и нижней пластин соответственно.

Приведем полную дифференциальную постановку задачи, которая может быть получена в предположении достаточной гладкости решения. Требуется найти функции  $u$  в  $G$ ,  $w$  в  $\Omega$  такие, что выполняется

$$-\operatorname{div}(B\varepsilon(u)) = g \text{ в } G \setminus \bar{\omega}_2, \quad \Delta^2 w = f \text{ в } \Omega \setminus \bar{\omega}_1; \quad (3)$$

$$u = 0 \text{ на } \gamma_0, \quad w = w_q = 0 \text{ на } \Gamma; \quad (4)$$

$$u|_{\omega_2} = \rho_0, \quad \text{где } \rho_0 \in R(\omega_2), \quad w|_{\omega_1} = 0; \quad (5)$$

$$[w] = [w_v] = 0 \text{ на } \gamma; \quad (6)$$

$$un \sin \alpha + w \geq 0 \text{ на } \gamma_1, \quad un \geq 0 \text{ на } \gamma_2 \cup \gamma_3; \quad (7)$$

$$[m(w)] = 0, [t^v(w)] \geq 0, [t^v(w)]n \sin \alpha = -\sigma n, [t^v(w)](un \sin \alpha + w) = 0 \text{ на } \gamma_1; \quad (8)$$

$$\sigma_n \leq 0, \quad \sigma_\tau = 0 \quad un \cdot \sigma_n = 0 \text{ на } \gamma_3; \quad (9)$$

$$-\int_{\Sigma_0 \cup \gamma_3} \sigma \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\psi} - \int_{\omega_2} \mathbf{g} \boldsymbol{\psi} \geq - \int_{\gamma_1} [t^V(w)](\boldsymbol{\psi} \mathbf{n} \sin \alpha + \boldsymbol{\phi}) \quad \forall (\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\phi}) \in K_{\omega_1, \omega_2}; \quad (10)$$

$$-\int_{\Sigma_0} \sigma \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\rho}_0 - \int_{\omega_2} \mathbf{g} \boldsymbol{\rho}_0 = 0. \quad (11)$$

Уравнения (3) суть уравнения равновесия, справедливые в области упругости нижней и верхней пластины соответственно. В области  $G \setminus \bar{\omega}_2$  выполняется закон Гука  $\boldsymbol{\sigma} = B\varepsilon(\mathbf{u})$ . Условия (4) обеспечивают жесткое защемление пластин. Соотношения (5) указывают на характер перемещений в жестких подобластях  $\omega_2$  и  $\omega_1$ . Условие (4) – условие склейки на области возможного контакта. Неравенства в (7) есть условие непроникания пластин. Краевые условия (8) на упругой части контакта имеют вид системы равенств и неравенств. Соотношения (9) – условия Синьорини контакта упругой части пластины с жестким включением. Условия разрешимости (10) и (11) представляют собой реализацию принципа виртуальных перемещений.

Отметим, что в областях жестких включений уравнения равновесия не выполняются, несмотря на то, что внешние силы приложены ко всем точкам пластин.

## 2. Вариационная формулировка

Вариационный подход позволяет исследовать вопросы существования и единственности решения. Для того чтобы его использовать, сформулируем задачу (3)–(11) как задачу минимизации функционала энергии пластин

$$E(\mathbf{u}, w) = \frac{1}{2} \int_G \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \varepsilon(\mathbf{u}) - \int_G \mathbf{g} \mathbf{u} + \frac{1}{2} a_\Omega(w, w) - \int_\Omega f w$$

на множестве допустимых перемещений  $K_{\omega_1, \omega_2}$ . Здесь  $a_\Omega(w, v)$  – билинейная форма следующего вида:

$$a_\Omega(w, v) = \int_\Omega (w_{,11} v_{,11} + w_{,22} v_{,22} + \zeta(w_{,11} v_{,22} + w_{,22} v_{,11}) + 2(1 - \zeta) w_{,12} v_{,12}).$$

Задача минимизации функционала  $\inf_{(\mathbf{u}, w) \in K_{\omega_1, \omega_2}} E(\mathbf{u}, w)$  эквивалентна следующему вариационному неравенству:

$$(\mathbf{u}, w) \in K_{\omega_1, \omega_2}; \quad (12)$$

$$\int_{G \setminus \bar{\omega}_2} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \varepsilon(\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) - \int_G \mathbf{g}(\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) + a_{\Omega \setminus \bar{\omega}_1}(w, \bar{w} - w) - \int_\Omega f(\bar{w} - w) \geq 0 \quad \forall (\bar{\mathbf{u}}, \bar{w}) \in K_{\omega_1, \omega_2}. \quad (13)$$

Покажем, что выполнены все условия теоремы Вейерштрасса, тогда задача минимизации, или, что то же, вариационное неравенство (12), (13), имеет решение.

Исходное пространство рефлексивно.

Множество  $K_{\omega_1, \omega_2}$  выпукло и по теореме вложения замкнуто, следовательно, является слабо замкнутым.

Из выпуклости и непрерывности функционала  $E(\mathbf{u}, w)$  вытекает его слабая полунепрерывность снизу. Последовательно применяя неравенство (2), первое неравенство Корна [9] и оценку функций в пространстве  $H_0^2(\Omega)$  [10], получаем

$$\begin{aligned}
 (\sigma(\mathbf{u}), \varepsilon(\mathbf{u}))_G + a_\Omega(w, w) &\geq c_1 (\varepsilon(\mathbf{u}), \varepsilon(\mathbf{u}))_G + c_2 (w_{,ij}, w_{,ij}) \geq \\
 &\geq c_3 \|\mathbf{u}\|_{H^1_{\gamma_0}(G)}^2 + c_4 \|w\|_{H^2_0(\Omega)}^2.
 \end{aligned}$$

Здесь и далее используемые константы положительны. В силу неравенства Коши имеем оценку

$$(\mathbf{g}, \mathbf{u})_G + (f, w)_\Omega \leq c_5 \|\mathbf{u}\|_{H^1_{\gamma_0}(G)} + c_6 \|w\|_{H^2_0(\Omega)}.$$

Полученные оценки обеспечивают коэрцитивность функционала  $E(\mathbf{u}, w)$ . Таким образом, условия теоремы Вейерштрасса выполнены.

Решение задачи (12), (13) единственно. Чтобы убедиться в этом, предположим, что  $(\mathbf{u}_1, w_1)$ ,  $(\mathbf{u}_2, w_2)$  – решения задачи (12), (13), и подставим в (13)  $(\mathbf{u}_1, w_1)$  в качестве решения  $(\mathbf{u}, w)$ , а в качестве пробной функции берем  $(\mathbf{u}_2, w_2)$  и наоборот. Путем сложения полученных неравенств извлекаем  $(\mathbf{u}_1, w_1) = (\mathbf{u}_2, w_2)$ .

Ниже покажем эквивалентность вариационной и дифференциальной постановок задачи, предполагая, что функции  $(\mathbf{u}, w)$  являются достаточно гладкими.

Пусть  $(\mathbf{u}, w)$  – решение вариационного неравенства (12), (13). Чтобы получить уравнения равновесия пластин (3), необходимо подставить в (13) в качестве пробных функций  $(\mathbf{u} + \phi, w + \psi)$  и  $(\mathbf{u} - \phi, w - \psi)$ , где  $(\phi, \psi) \in [C^0_0(G \setminus \bar{\omega}_2)]^2 \times C^0_\infty(\Omega \setminus \bar{\omega}_1)$  и  $\phi, \psi$  продолжаются нулем в  $\omega_2$  и  $\omega_1$  соответственно. Уравнения равновесия будут выполнены в смысле распределений. Краевые условия (4) – (7) вытекают из определения множества допустимых перемещений  $K_{\omega_1, \omega_2}$ .

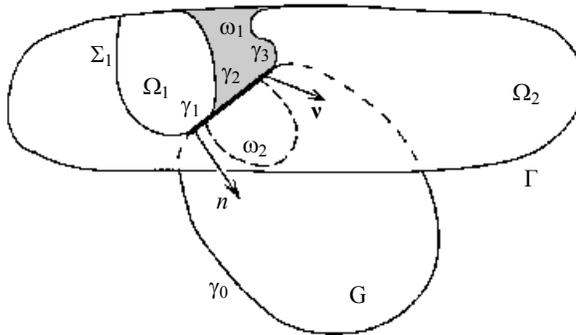


Рис. 2. Применение формулы Грина

Для того чтобы вывести краевые условия (8) – (11), нам потребуется формула Грина [10], справедливая для произвольной области  $\Omega$  с границей  $\Gamma$  класса  $C^{1,1}$ , к которой  $\nu$  – внешняя нормаль:

$$\int_{\Omega} \phi \Delta^2 w = a_\Omega(w, \phi) + \int_{\Gamma} t^\nu(w)^- \phi - \int_{\Gamma} m(w)^- \phi_\nu, \quad \forall \phi \in H^2(\Omega). \quad (14)$$

Предполагаем, что кривую  $\gamma$  можно продолжить до кривой  $\gamma \cup \Sigma_2$  так, что область  $\Omega$  разбивается на две упругие подобласти  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  и жесткое включение  $\omega_1$ , как указано на рис. 2. Применяя формулу Грина к  $\Omega_1 \cup \Omega_2$  и учитывая склеивание функций и их производных на  $\Sigma_2$ , получим следующее выражение:

$$\int_{\Omega \setminus \bar{\omega}_1} \phi \Delta^2 w = a_{\Omega \setminus \bar{\omega}_1}(w, \phi) - \int_{\gamma_1} [t^\nu(w)] \phi + \int_{\gamma_1} [m(w)] \phi_\nu, \quad (15)$$

где  $[t^V(w)] = t^V(w)^+ - t^V(w)^-$ ,  $[m(w)] = m(w)^+ - m(w)^-$ , а значения  $t^V(w)^\pm$ ,  $m(w)^\pm$  соответствуют положительному и отрицательному (по отношению к нормали  $\mathbf{n}$ ) берегам.

Также нам потребуется формула Грина, которая справедлива для области  $G \setminus \bar{\omega}_2$  с внутренней нормалью  $\mathbf{n}$  к границе:

$$\int_{G \setminus \bar{\omega}_2} \sigma(\mathbf{u}) \varepsilon(\psi) = - \int_{G \setminus \bar{\omega}_2} \operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}) \psi - \int_{\partial(G \setminus \bar{\omega}_2)} \sigma \mathbf{n} \cdot \psi. \quad (16)$$

В (15), (16) пробные функции выбираются из множества допустимых перемещений.

*Вывод условий (8).* Чтобы получить условия  $[m(w)] = 0$ ,  $[t^V(w)] \geq 0$  на  $\gamma_1$ , подставим в вариационное неравенство (12), (13) тестовую функцию в виде  $(\mathbf{u}, w + \varphi)$ , где  $\varphi \in H_0^2(\Omega)$ ,  $\varphi \geq 0$  на  $\gamma_1$ ,  $\varphi = 0$  на  $\omega_1$ :

$$a_{\Omega \setminus \bar{\omega}_1}(w, \varphi) \geq \int_{\Omega \setminus \bar{\omega}_1} f \varphi.$$

Далее применим к левой части неравенства формулу (15) и, с учетом уравнения равновесия, имеем

$$\int_{\gamma_1} [t^V(w)] \varphi - \int_{\gamma_1} [m(w)] \varphi_v \geq 0.$$

В силу отсутствия ограничений на  $\varphi_v$ , получаем требуемое.

Для вывода следующего условия на  $\gamma_1$  подставим в (12), (13) пробные функции  $(\mathbf{u} \pm \psi, w \pm \varphi)$ , такие, что  $(\psi, \varphi) \in K_{\omega_1 \cup \omega_2}$  и  $|\psi|_{\omega_2} = 0$ , кроме того, предполагаем, что  $\varphi + \psi \mathbf{n} \sin \alpha = 0$  на  $\gamma$ . Имеем

$$\int_{G \setminus \bar{\omega}_2} \sigma(\mathbf{u}) \varepsilon(\psi) + a_{\Omega \setminus \bar{\omega}_1}(w, \varphi) = \int_{G \setminus \bar{\omega}_2} \mathbf{g} \psi + \int_{\Omega \setminus \bar{\omega}_1} f \varphi.$$

Воспользовавшись формулами Грина (15) и (16), а также уравнениями равновесия (3), получим следующее соотношение:

$$- \int_{\gamma_1} \sigma \mathbf{n} \cdot \psi + \int_{\gamma_1} [t^V(w)] \varphi = 0,$$

откуда, с учетом выбора пробных функций, извлекаем

$$- \int_{\gamma_1} (\sigma \mathbf{n} + [t^V(w)] \mathbf{n} \sin \alpha) \psi = 0.$$

Таким образом, на  $\gamma_1$  выполнено условие  $[t^V(w)] \mathbf{n} \sin \alpha = -\sigma \mathbf{n}$ .

Теперь покажем выполнение условия  $[\mathbf{u} \mathbf{n} \sin \alpha + w] = 0$  на  $\gamma_1$ . Выведем это равенство локально. Рассмотрим произвольную точку  $x_0 \in \gamma_1$  и предположим, что в некоторой окрестности  $B_{x_0}$  выполняется  $\mathbf{u} \mathbf{n} \sin \alpha + w > 0$ , тогда можно взять тестовые функции  $(\mathbf{u} \pm \mathbf{v}, w \pm \xi)$ , где  $(\mathbf{v}, \xi) \in [C_0^\infty(G)]^2 \times C_0^\infty(\Omega)$  – произвольная функция, такая, что  $\operatorname{supp}(\mathbf{v}, \xi) \subseteq B_{x_0}$ , и в  $B_{x_0}$  выполнено условие  $(\mathbf{u} \pm \mathbf{v}) \mathbf{n} \sin \alpha + (w \pm \xi) > 0$ . Подставляя тестовые функции в (13) и применяя формулы (15) и (16), получаем

$$- \int_{\gamma_1} \sigma \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} + \int_{\gamma_1} [t^V(w)] \xi = 0.$$

Воспользовавшись условием  $[t^V(w)] \mathbf{n} \sin \alpha = -\sigma \mathbf{n}$ , находим

$$\int_{\gamma_1} [t^V(w)] (\mathbf{v} \mathbf{n} \sin \alpha + \xi) = 0,$$

откуда  $[t^V(w)] = 0$  на  $\gamma_1$ . Предполагая  $[t^V(w)] > 0$  на  $\gamma_1$ , имеем выполнение условия  $\mathbf{u} \mathbf{n} \sin \alpha + w = 0$ , так как иначе, следуя предыдущим рассуждениям, придем к противоречию. Таким образом, условие (8) получено.

*Вывод условия (9) на  $\gamma_3$ .* Подставим в вариационное неравенство (13) тестовые функции  $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{w}) = (\mathbf{u} + \psi, w) \in K_{\omega_1, \omega_2}$ ,  $\psi = 0$  на  $\gamma_1 \cup \gamma_2$ . Применяя к полученному неравенству формулу Грина (16), находим, что  $-(\sigma \mathbf{n}, \psi)_{\gamma_3} \geq 0$ . Последнее означает, что

$$\sigma_\tau = 0, \quad \sigma_n \leq 0 \quad \text{на } \gamma_3.$$

Теперь покажем выполнение условия  $\mathbf{u} \mathbf{n} \cdot \sigma_n = 0$  на  $\gamma_3$ . Предположим, что в окрестности  $B_{x_0}$  некоторой точки  $x_0 \in \gamma_3$  выполняется  $\mathbf{u} \mathbf{n} > 0$ , тогда можно взять тестовую функцию  $(\mathbf{u} \pm \mathbf{v}, w)$ , где  $\mathbf{v} \in [C_0^\infty(G)]^2$  – произвольная функция, такая, что  $\text{supp } \mathbf{v} \subseteq B_{x_0}$  и  $(\mathbf{u} \pm \mathbf{v}) \mathbf{n} > 0$  в  $B_{x_0}$ . Получим, что  $(\sigma \mathbf{n}, \mathbf{v})_{\gamma_3} = 0$ , откуда  $\sigma_n = 0$  на  $\gamma_3$ . В случае, когда  $\sigma_n > 0$ , имеем  $\mathbf{u} \mathbf{n} = 0$ , так как иначе придем к противоречию.

*Вывод условий (10) – (11).* Подставим в вариационное неравенство пробные функции  $(\mathbf{u} + \psi, w + \phi)$ ,  $(\psi, \phi) \in K_{\omega_1, \omega_2}$  и применим формулы (15) и (16). С учетом выполнения уравнений равновесия, получим

$$- \int_{\gamma_1 \cup \gamma_3 \cup \Sigma_0} \sigma \mathbf{n} \cdot \psi + \int_{\gamma_1} [t^V(w)] \phi - \int_{\gamma_1} [m(w)] \phi_\nu - \int_{\omega_2} \mathbf{g} \psi \geq 0.$$

Воспользовавшись условиями (8) на  $\gamma_1$  и (9) на  $\gamma_3$ , получим (10). Подставляя в (10) пробные функции  $(\psi, \phi) = (0, 0)$  и  $(\psi, \phi) = 2(\mathbf{u}, w)$ , имеем (11).

Обратно, из (3) – (11) можно получить вариационное неравенство (12), (13).

### 3. Предельный случай

Выполним предельный переход, устремив жесткость пластины  $\Omega$  к бесконечности. Для этого вместо уравнения

$$\Delta^2 w = f \quad \text{в } \Omega \setminus \bar{\omega}_1$$

рассмотрим семейство уравнений, характеризующихся параметром  $\alpha$ :

$$\frac{1}{\alpha} \Delta^2 w = f \quad \text{в } \Omega \setminus \bar{\omega}_1, \quad \alpha > 0,$$

и выполним предельный переход при  $\alpha \rightarrow 0$ , который соответствует случаю, когда верхняя пластина переходит от упругого состояния к жесткому.

Для каждого  $\alpha > 0$  вариационная задача выглядит следующим образом:

$$(\mathbf{u}^\alpha, w^\alpha) \in K_{\omega_1, \omega_2}; \tag{17}$$

$$\int_G \sigma(\mathbf{u}^\alpha) \varepsilon(\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}^\alpha) - \int_G \mathbf{g}(\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}^\alpha) + a_\Omega^\alpha (w^\alpha, \bar{w} - w^\alpha) - \int_\Omega f(\bar{w} - w^\alpha) \geq 0 \quad \forall (\bar{\mathbf{u}}, \bar{w}) \in K_{\omega_1, \omega_2}. \tag{18}$$

Подставляя в качестве пробных функций  $(0,0)$ ,  $2(\mathbf{u}^\alpha, w^\alpha)$ , извлекаем из (18):

$$\int_G \sigma(\mathbf{u}^\alpha) \varepsilon(\mathbf{u}^\alpha) + a_\Omega^\alpha(w^\alpha, w^\alpha) = \int_G \mathbf{g} \mathbf{u}^\alpha + \int_\Omega f w^\alpha. \quad (19)$$

Из (19) при  $0 < \alpha < \alpha_0$  следует

$$\|\mathbf{u}^\alpha\|_{H_{\gamma_0}^1(G)}^2 + \|w^\alpha\|_{H_0^2(\Omega)}^2 \leq c_7,$$

Выбирая для сходящейся подпоследовательности прежнее обозначение  $(\mathbf{u}^\alpha, w^\alpha)$ , имеем при  $\alpha \rightarrow 0$  следующие сходимости:

$$w^\alpha \rightarrow w \quad \text{слабо в } H_0^2(\Omega),$$

$$\mathbf{u}^\alpha \rightarrow \mathbf{u} \quad \text{слабо в } H_{\gamma_0}^1(G).$$

Из (19) также следует оценка:

$$\frac{1}{\alpha} \|w^\alpha\|_{H_0^2(\Omega \setminus \bar{\omega}_1)}^2 \leq c_8,$$

что означает сильную сходимость

$$w^\alpha \rightarrow 0 \quad \text{сильно в } H_0^2(\Omega \setminus \bar{\omega}_1).$$

Предельная функция  $w \equiv 0$  во всей области  $\Omega$ . В силу выполнения для любого  $\alpha > 0$  условия непроникания, для предельной функции  $\mathbf{u}$  имеем неравенство

$$\mathbf{u} \mathbf{n} \geq 0 \quad \text{на } \gamma.$$

Введем обозначение

$$K = \{\mathbf{u} \in H_{\gamma_0}^1(G) \mid \mathbf{u} \mathbf{n} \geq 0 \quad \text{на } \gamma; \mathbf{u}|_{\omega_2} \in R(\omega_2)\}.$$

Подставив в (18) тестовую функцию  $(\bar{\mathbf{u}}, 0)$ , где  $\bar{\mathbf{u}} \in K$ , найдем

$$\int_{G \setminus \bar{\omega}_2} \sigma(\mathbf{u}^\alpha) \varepsilon(\bar{\mathbf{u}}) - \int_G \mathbf{g}(\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}^\alpha) + \int_\Omega f w^\alpha \geq \int_{G \setminus \bar{\omega}_2} \sigma(\mathbf{u}^\alpha) \varepsilon(\mathbf{u}^\alpha) + \frac{1}{\alpha} a_{\Omega \setminus \bar{\omega}_1}^\alpha(w^\alpha, w^\alpha).$$

Осуществляя предельный переход к нижнему пределу в последнем неравенстве, получим следующее вариационное неравенство:

$$\mathbf{u} \in K : \int_{G \setminus \bar{\omega}_2} \sigma(\mathbf{u}) \varepsilon(\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) - \int_G \mathbf{g}(\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) \geq 0 \quad \forall \bar{\mathbf{u}} \in K. \quad (20)$$

Задача (20) соответствует контакту нижней пластины  $G$ , содержащей жесткое включение  $\omega_2$ , с неподвижным препятствием.

Мы получили, что решение задачи (17), (18) при  $\alpha \rightarrow 0$  сходится к решению задачи (20).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеев Г.В., Хлуднев А.М. Трещина в упругом теле, выходящая на границу под нулевым углом // Вестник НГУ. 2009. Т. 9. № 2. С. 15–29.
2. Лойгеринг Г., Хлуднев А.М. О равновесии упругих тел, содержащих жесткие включения // ДАН. 2010. Т. 430. № 1. С. 1–4.
3. Хлуднев А.М. Задача о трещине на границе жесткого включения в упругой пластине // Изв. РАН. 2009. № 5. С. 98–110.
4. Khludnev A.M., Novotny A.A., Sokolowski J., Zochowski A. Shape and topology sensitivity analysis for cracks in elastic bodies on boundaries of rigid inclusions // J. Mechan. Phys. Sol. 2009. V. 57. No. 10. P. 1718–1732.

5. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластин и оболочек. М.: Наука, 1972.
6. Неустроева Н.В. Жесткое включение в контактной задаче для упругих пластин // СибЖИМ. 2009. Т.12. № 4. С. 92–105.
7. Неустроева Н.В. Односторонний контакт упругих пластин с жестким включением // Вестник НГУ. 2009. Т. 9. № 4. С. 51–64.
8. Хлуднев А.М. Об одностороннем контакте двух пластин, расположенных под углом друг к другу // Журнал ПМТФ. 2009. Т. 49. № 4. С. 553–567.
9. Темам Р. Математические задачи теории пластичности. М.: Наука, 1991.
10. Хлуднев А.М. Задачи теории упругости в негладких областях. М.: Физматлит, 2010.

Статья поступила 18.01.2011 г.

*Rotanova T.A.* CONTACT PROBLEM FOR PLATES WITH RIGID INCLUSIONS INTERSECTING THE BOUNDARY. This paper deals with the unilateral contact problem for two elastic plates located at an angle to each other. Both plates contain rigid inclusions intersecting the contact area. The rigid inclusion in the top plate intersects also its external boundary. The lower plate is deformed in its plane with the top plate being vertically deformed. Using a variational method the solvability of the problem is established. Assuming that the solution is sufficiently smooth, the differential statement being equivalent to the variational formulation is justified. We analyze the limit case corresponding to the unbounded increase of the bending rigidity of the top plate.

Keywords: variational inequality, rigid inclusion, Kirchhoff–Love plate, contact problem, boundary intersection.

*ROTANOVA Tatiana Alexandrovna*

(Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences)

E-mail: t.stekina@gmail.com