

УДК 532.135

А.В. Шваб, М.С. Марценко**МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ВЫСОКОКОНЦЕНТРИРОВАННОЙ
ГРАНУЛИРОВАННОЙ СРЕДЫ**

На основе физических представлений разработана теоретическая модель динамики высококонцентрированной гранулированной среды при гравитационном и напорном течении. В предложенной модели учитываются реологические свойства гранулированной среды, а также эффекты скольжения частиц на твёрдых поверхностях. Адекватность предложенной модели проверяется сопоставлением расчетных и опытных данных при обтекании квадратного препятствия гранулированной средой в вертикальном канале.

Ключевые слова: *реология, тензор напряжений, вязкость, скорость, гранулированная среда, условия скольжения, тензор скоростей деформаций, функция тока, вихрь.*

Движение гранулированной среды плотным слоем встречается в природных явлениях (песчаные бури, селевые потоки, лавины и др.) и в практической деятельности человека (различные устройства для переработки дисперсных материалов в порошковой металлургии, в химической технологии, в пищевой промышленности, при производстве лекарств, при пневмотранспорте и т.д.). Поэтому в научной литературе уделяется большое внимание изучению физических аспектов движения высококонцентрированных гранулированных сред как теоретически, так и экспериментально. Анализ научной литературы по динамике течений гранулированной среды плотным слоем показывает, что не существует рациональной общепринятой теории, а имеется многообразие теоретических и численных подходов, которые отражают отдельные свойства движения дисперсной среды. Обилие различных подходов объясняется разнообразием свойств порошкообразных материалов и большими трудностями в создании общей теории динамики гетерогенных сред. Настоящая работа посвящена изучению движения высококонцентрированной гранулированной хорошо сыпучей среды при гравитационном или напорном течении.

Модель течения гранулированной среды

Экспериментальные и теоретические исследования показывают, что динамику плотного слоя гранулированного материала можно достаточно хорошо моделировать с помощью понятий и методов механики сплошных сред. Движение плотного слоя гранулированной среды обычно условно разделяют на два предельных режима: квазистатический, соответствующий малым скоростям сдвига, который описывается в рамках теории предельного равновесия [1] и инерционный, отвечающий большим скоростям сдвига [2]. При квазистатическом режиме течения внутренние напряжения возникают вследствие сухого кулоновского трения между частицами, что приводит к независимому от скорости деформации пластическому поведению порошкообразного материала. При инерционном режиме внутренние напряжения в среде возникают вследствие переноса импульса частицами

аналогично тому, как это происходит при хаотическом движении молекул в жидкости или газе. Такое течение гранулированного материала отличает его от квазистатического режима и приводит к существенной зависимости внутренних напряжений от скорости сдвига. Описание этого режима течения основывается, как правило, на законах сохранения массы и импульса.

На основании этих представлений для описания динамики высококонцентрированной гранулированной среды в инерционном режиме течения воспользуемся системой уравнений, состоящей из уравнений переноса импульса в напряжениях и уравнения непрерывности:

$$\rho \left(\frac{\partial U_x}{\partial t} + U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_x}{\partial y} + U_z \frac{\partial U_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}; \quad (1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial U_y}{\partial t} + U_x \frac{\partial U_y}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_y}{\partial y} + U_z \frac{\partial U_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}; \quad (2)$$

$$\rho \left(\frac{\partial U_z}{\partial t} + U_x \frac{\partial U_z}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_z}{\partial y} + U_z \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}; \quad (3)$$

$$\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} = 0. \quad (4)$$

Здесь τ_{ij} – тензор напряжений, который, как показывают экспериментальные исследования, например [2], в инерционном режиме течения гранулированной среды связан нелинейно с тензором скоростей деформаций, причём эта связь соответствует поведению дилатантной жидкости. Если использовать степенную модель для описания связи тензора напряжений с тензором скоростей деформаций, то на основе опытных данных [2, 3] показатель степени n в этой модели изменяется в пределах $1 < n \leq 2$. Такое значительное изменение показателя степени n по видимому связано с физико-механическими свойствами порошковых материалов, а также с фракционным составом гетерогенной среды. Следует отметить работу [4], в которой использовалось условие скольжения среды на стенке на основе теории [5], причём, для скорости частиц на твёрдой поверхности задавалось условие скольжения, которое зависело от величины тензора напряжений. Результаты расчётов показали лишь качественное согласование с опытными данными и сильную зависимость от граничных условий. В работе [6] при моделировании движения плотного слоя гранулированного материала на основе модели «степенной жидкости» и при введении *независимого* (от тензора вязких напряжений в среде) условия частичного скольжения гранулированной среды на твёрдых поверхностях показано удовлетворительное согласование опытных и теоретических данных. При этом выяснилось, что показатель нелинейности n близок к единице ($n = 1, 2$). Это значит, что в инерционном режиме течения гранулированной среды при условиях скольжения на твёрдых поверхностях тензор напряжений практически пропорционален тензору скоростей деформаций и, следовательно, реологические свойства хорошо сыпучей гранулированной среды близки к обычной вязкой, ньютоновской жидкости.

Таким образом, для построения модели течения гранулированной среды можно использовать модель вязкой несжимаемой среды, в которой необходимо учесть отклонения, связанные с особенностью течения плотного слоя в сдвиговом пото-

ке. Так как эти отклонения в тензоре напряжений невелики, будем использовать принцип суперпозиции, т.е. примем

$$\tau_{ij} = \rho(v_0 + v)\dot{\epsilon}_{ij}. \quad (5)$$

Здесь $\dot{\epsilon}_{ij}$ – тензор скоростей деформаций, v_0 – постоянное и v – переменное значение кинематических коэффициентов вязкости. Первое слагаемое в зависимости (5) учитывает вязкую, ньютоновскую часть тензора напряжения, а второе – отклонение от него, связанное с особенностями течения гранулированной среды. Таким образом, необходимо найти модельное значение величины v . Известно, что в инерционном режиме движения гранулированной среды между гранулами в среднем есть зазоры, и взаимодействие между гранулами обусловлено неупругими соударениями. Следовательно, это взаимодействие, с точки зрения аналогии кинетической теории газов, на основании теории размерностей можно записать в виде осреднённой корреляции

$$v = \overline{u'l'}. \quad (6)$$

Здесь u' – некоторая скорость пульсаций гранулы относительно средней скорости течения в локальной области потока и l' – отклонение гранулы от среднего положения в этой же части потока. Очевидно, что для течения высококонцентрированного гранулированного потока величина l' является небольшой и её можно считать величиной постоянной и пропорциональной размеру гранулы δ с точностью до постоянной величины C_1 , т.е. примем $l' = C_1\delta$. Из экспериментальных данных по движению гранулированной среды известно, что переход от квазистатического режима течения к инерционному осуществляется за счет увеличения скорости потока. Следовательно, за счет увеличения кинетической энергии потока возникает дополнительный перенос импульса, определяемый соотношениями (5) и (6). В качестве гипотезы примем, что это положение справедливо и для рассматриваемой локальной области течения гранулированной среды. Тогда на основании этого можно положить, что скорость пульсаций в локальной области пропорциональна модулю вектора скорости с точностью до эмпирической постоянной C_2 , т.е.

$$u' = C_2\sqrt{U_x^2 + U_y^2 + U_z^2}. \quad (7)$$

Подставляя $l' = C_1\delta$ и u' в соотношение (6) найдём с точностью до эмпирической постоянной $C = C_1C_2$ осреднённое значение кинематического коэффициента вязкости

$$v = \overline{u'l'} = C\delta\sqrt{U_x^2 + U_y^2 + U_z^2}.$$

После подстановки коэффициента вязкости v в формулу (5), найдём связь между тензором напряжений и тензором скоростей деформаций для инерционного режима течения хорошо сыпучей гранулированной высококонцентрированной среды

$$\tau_{ij} = \rho\left(v_0 + C\delta\sqrt{U_x^2 + U_y^2 + U_z^2}\right)\dot{\epsilon}_{ij}. \quad (8)$$

Таким образом, полученная зависимость (8) для тензора напряжений замыкает систему уравнений (1) – (4), решение которой при соответствующих начальных и граничных условиях позволяет определить распределения полей скорости и давления.

Из экспериментальных данных известно, что скорость гранулированной среды на твердой поверхности отлична от нуля, поэтому в качестве граничного условия на стенке используется условие скольжения в соответствии с работой [6]:

$$(1 - \beta) \frac{\partial U_s}{\partial n} \Big|_w = \beta U_s \Big|_w. \quad (9)$$

Здесь U_s – касательная к стенке скорость, n – нормаль, индекс w указывает принадлежность к стенке и β – *независимый* эмпирический параметр, который находится из сопоставления расчетных и опытных данных, величина которого находится в диапазоне $0 \leq \beta \leq 1$, причём значение $\beta = 0$ соответствует условиям полного скольжения среды на стенке, а $\beta = 1$ – отвечает условию прилипания.

Апробация модели и численный метод решения

Достоверность и работоспособность предложенной модели проверялась сравнением численного решения с экспериментальными данными [7], полученными для случая установившегося гравитационного обтекания квадрата со стороны $H/2$ высококонцентрированной гранулированной средой в плоском вертикальном канале шириной H . Рассматриваемая область течения высококонцентрированной гранулированной среды схематически изображена на рис. 1.

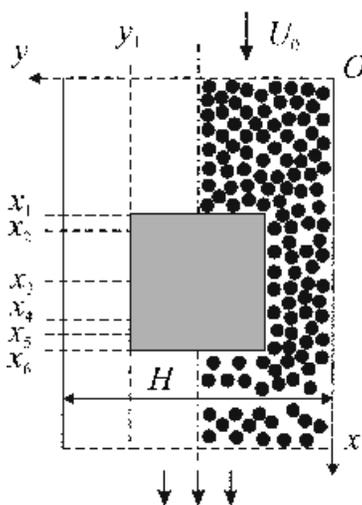


Рис. 1. Схема канала с препятствием

Численное решение этой задачи проводилось на основе системы уравнений (1) – (4), замыкание которой проводилось с помощью разработанной модели (8). Так как рассматриваемое течение является плоским, удобнее решение задачи проводить в переменных завихрённость – функция тока ($\Omega - \psi$). Введём функцию тока ψ таким образом, чтобы уравнение неразрывности выполнялось тождественно. Для этого достаточно положить

$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (10)$$

Здесь и далее используются безразмерные переменные, которые были получены с

помощью масштаба длины H и средней по поперечному сечению плоского канала скоростью U_{cp} . Далее, воспользуемся определением завихренности Ω

$$\Omega = \frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x}. \quad (11)$$

Подставляя в определение вихря (11) значение скоростей u_x и u_y из уравнения (10), получим уравнение Пуассона для определения функции тока

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \Omega. \quad (12)$$

Учитывая стационарный характер задачи, эллиптическое уравнение (12) удобнее представить в виде параболического по времени нестационарного уравнения

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) = -\Omega. \quad (13)$$

Безразмерное уравнение переноса вихря можно получить перекрестным дифференцированием уравнений переноса (1), (2), предварительно подставив замыкающее модельное соотношение (8) в правую часть уравнений (1), (2). В результате получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[u_x \Omega - \left(\frac{B}{\text{Re}} \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[u_y \Omega - \left(\frac{B}{\text{Re}} \frac{\partial \Omega}{\partial y} \right) \right] = \\ & = \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial B}{\partial x} \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} \frac{\partial \Omega}{\partial y} + \left(\frac{\partial^2 B}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + 4 \frac{\partial^2 B}{\partial x \partial y} \frac{\partial u_x}{\partial x} \right], \end{aligned} \quad (14)$$

где
$$B = 1 + C \frac{\delta}{H} \text{Re} \sqrt{u_x^2 + u_y^2}, \quad \text{Re} = \frac{HU_0}{\nu_0}. \quad (15)$$

В силу осевой симметрии численное решение задачи проводилось для половины задачи. Для получения единственного решения необходимо поставить граничные условия, которые для рассматриваемой задачи имеют следующий вид. На входной границе функция тока определялась интегрированием первого уравнения (10) при постоянном значении $u_x = U_x/U_{cp} = 1$, а для поперечной составляющей скорости использовалось мягкое условие $\partial u_y / \partial x = 0$ и, следовательно, для завихренности на входе имеем условие $\Omega = 0$. На оси симметрии и на твёрдых стенках функция тока принимает постоянное значение. Из определения вихря для оси симметрии имеем условие $\Omega = 0$. На выходной границе для всех переменных использовались мягкие условия установления ($\partial / \partial x = 0$). Для определения вихря Ω на стенке разложим функцию тока ψ в ряд Тейлора в окрестности граничной точки w

$$\psi_{w+1} = \psi_w + \frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_w \Delta y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \Big|_w \Delta y^2 + \dots \quad (16)$$

Далее, подставляя значение скорости $u_x = (\partial \psi / \partial y)_w$ с учетом условия скольжения гранулированной среды на стенке (9) в соотношении (16) и учитывая определение вихря на стенке, получим

$$\Omega_w = \frac{2\beta(\psi_{w+1} - \psi_w)}{2(1-\beta)\Delta y + \beta\Delta y^2}, \quad (17)$$

причём, в случае условий прилипания ($\beta = 1$), формула (17) переходит в известное условие Тома, а при полном скольжении среды ($\beta = 0$) имеем условие $\Omega = 0$, что соответствует условию отсутствия трения на стенке.

Численное решение системы уравнений (13) – (15) проводится эволюционным методом до установления по времени при помощи обобщенной неявной схемы переменных направлений. Обобщенный неявный метод переменных направлений для линейного уравнения безусловно устойчив и имеет второй порядок точности по времени. Этот метод записывается в Δ -форме и для рассматриваемой двумерной задачи состоит из двух этапов. Запишем уравнение переноса вихря в операционной форме

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + L_x \Omega + L_y \Omega = F.$$

Здесь операторы L_x и L_y имеют вид

$$L_x \Omega = \frac{\partial}{\partial x} \left[u_x \Omega - \left(\frac{B}{\text{Re}} \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right) \right]; \quad L_y \Omega = \frac{\partial}{\partial y} \left[u_y \Omega - \left(\frac{B}{\text{Re}} \frac{\partial \Omega}{\partial y} \right) \right].$$

Обобщенный метод переменных направлений можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \Phi_{i,j}^*}{\Delta t} - \frac{1}{2} L_x \Delta \Phi_{i,j}^* &= F - L_x \Phi_{i,j}^n - L_y \Phi_{i,j}^n; \\ \frac{\Delta \Phi_{i,j}^{**}}{\Delta t} - \frac{1}{2} L_y \Delta \Phi_{i,j}^{**} &= \frac{\Delta \Phi_{i,j}^*}{\Delta t}; \\ \Phi_{i,j}^{n+1} &= \Phi_{i,j}^n + \Delta \Phi_{i,j}^{**}. \end{aligned}$$

При записи конечно-разностного аналога конвективных и диффузионных членов в уравнении переноса вихря используется экспоненциальная схема, которая имеет второй порядок точности по координатам и снимает ограничение по сеточному числу Рейнольдса [8]. Таким образом, имеем систему алгебраических уравнений с диагональным преобладанием, которая решается с помощью метода прогонки.

Сопоставление опытных и численных данных

Результаты численного моделирования течения высококонцентрированной гранулированной среды при обтекании препятствия в виде квадрата в плоском канале представлены сплошными линиями на рис. 2. Там же на графиках пунктирными линиями показано численное решение для случая движения ньютоновской несжимаемой жидкости с аналогичными параметрами и теми же условиями скольжения на твёрдых поверхностях. Для получения этого решения достаточно положить $C = 0$ в формуле (15). На этих же графиках точками показаны экспериментальные данные [7]. Результаты численных расчётов и опытных данных для распределения вертикальной составляющей скорости u_x в зависимости от поперечной координаты y показаны в сечениях $X_2 = X_1 + 0,05 H$, $X_3 = X_1 + 0,25 H$, $X_4 = X_1 + 0,4 H$, $X_5 = X_1 + 0,45 H$, $X_6 = X_1 + 0,5 H$. Здесь сечение X_1 соответствует рис. 2, а, сечение X_2 – рис. 2, б и т.д. Следует отметить, что для лучшего согласования численного решения и опытных данных были выбраны число Рейнольдса, равное $\text{Re} = 10$, и постоянный комплекс $C\delta/H$ в формуле (15), равный $C\delta/H = 0,035$.

Коэффициент скольжения на всех стенках выбирался равным нулю ($\beta = 0$), что соответствует условию полного скольжения гранулированной среды на стенке, исключая переднюю стенку обтекаемого препятствия (сечение X_1), на которой ставилось условие прилипания ($\beta = 1$). Это связано с тем, что на передней стенке препятствия образуется застойная зона из гранулированного материала. Для моделирования этого условия для составляющей скорости u_x на передней стенке ставилось условие прилипания ($\beta = 1$) вместо условия скольжения.

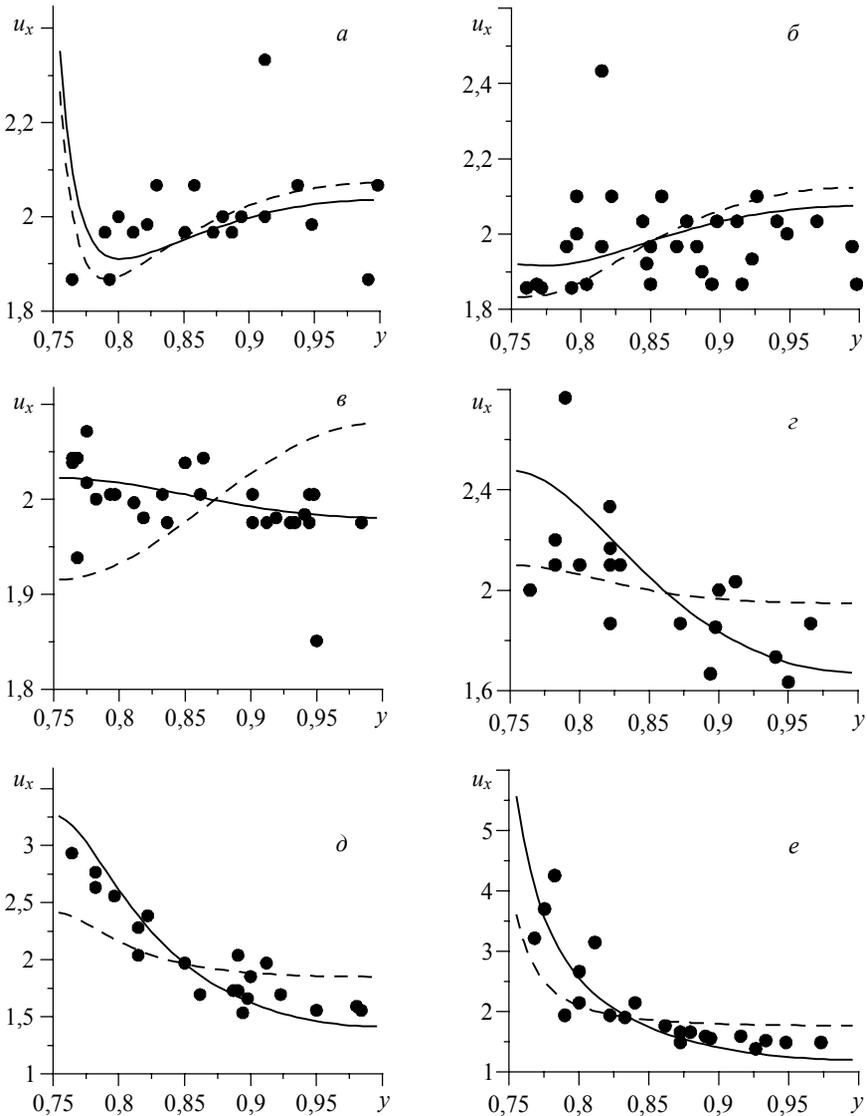


Рис. 2. Распределение вертикальной скорости u_x в зависимости от поперечной координаты y в сечениях, показанных на рис. 1. Сплошная кривая – предлагаемая модель, пунктир – ньютоновская жидкость с предложенными граничными условиями, точки – эксперимент [7]

Сравнение предложенной модели с численным решением ньютоновской жидкости при тех же параметрах течения показывает справедливость предложенной модели (8), что отчётливо демонстрируют графики рис. 2, в, из которого хорошо видны противоположные тенденции в поведении вертикальной составляющей скорости.

Хорошее соответствие, полученное при сравнении опытных данных с разработанной теорией течения высококонцентрированного потока хорошо сыпучей среды, открывает возможность детального анализа влияния основных факторов, влияющих на исследуемое явление. В частности, проведенный параметрический анализ разработанной модели показал, что на динамику хорошо сыпучей среды оказывает существенное влияние постановка граничных условий на твёрдых поверхностях. Так, удачный выбор *независимого* эмпирического коэффициента скольжения β при постановке граничного условия (9) позволяет получать решения, адекватные опытным данным. Здесь следует заметить, что, по-видимому, *независимость* коэффициента скольжения β связано с тем фактом, что для хорошо сыпучей среды силы трения гранулированной среды на стенках существенно меньше сил трения в самом движущемся потоке. Численные исследования также показали, что влияние параметров Re и $C\delta/H$ на динамику течения существенно меньше по сравнению с влиянием коэффициента скольжения β . Из анализа результатов численных исследований следует, что если имеют место в потоке области с застойными зонами сыпучей среды, то для лучшего согласования расчётных и опытных данных необходимо в этих областях на твёрдых поверхностях использовать условия прилипания ($\beta = 1$).

Заключение

Авторы надеются, что предложенная модель движения высококонцентрированной хорошо сыпучей среды, которая показала свою работоспособность и адекватность опытным данным, может быть использована при моделировании гидродинамики, тепло- и массообмена гранулированных потоков и других процессов, протекающих в аппаратах химической и порошковой технологии, а также при описании сложных природных явлений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гениев Г.А.* Вопросы динамики сыпучей среды. М.: Госстройиздат, 1958.
2. *Механика* гранулированных сред. Теория быстрых движений: сб. ст.: пер. с англ. М.: Мир, 1985.
3. *Savage S., Jeffrey D.* The stress tensor in a granular flow at high shear rates // *J. Fluid Mech.* 1981. V. 110. P. 255–272.
4. *Hutter K., Sheiwiller T.* Rapid Plane Flow of Granular Materials down a Chute // *Mechanics of granular Materials.* Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 1983. P. 283–293.
5. *Jenkins J., Savage S.* A theory for the rapid flow of identical, smooth, nearly elastic, spherical particles // *J. Fluid Mech.* 1983. V. 130. P. 187–202.
6. *Зайцева Е.В., Рыжих Ю.Н., Шваб А.В.* Моделирование гидродинамики высококонцентрированной гранулированной среды в порошковой технологии // *Теплофизика и аэромеханика.* 2001. Т. 8. № 4. С. 551–561.
7. *Неддерман Р., Дэвис С., Хортон Д.* Течение гранулированных материалов вокруг препятствий // *Механика гранулированных сред. Теория быстрых движений: сб. ст.: пер. с англ.* М.: Мир, 1985. С. 228–241.
8. *Патанкар С.* Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984.

Статья поступила 22.02.2011 г.

Shvab A.V., M.S. Martsenko M.S. A MODEL OF MOTION OF A HIGHLY CONCENTRATED GRANULAR MEDIUM. Based on the physical knowledge, a theoretical model of high-concentrated granulated medium dynamics is developed for the case of a gravitational and confined flow. In the suggested model, rheological properties of the granular medium and slipping effects of particles on solid surfaces are taken into account. The resulting velocity profile based on the model is compared with experimental data for the case of flow of granular material around a quadratic obstacle in a vertical channel.

Keywords: rheology, stress tensor, viscosity, velocity, granular medium, slipping condition, strain velocity deformation, flow function, vortex.

SCHWAB Aleksandr Veniaminovich (Tomsk State University)

MARTSENKO Maksim Sergeevich (Tomsk State University)

E-mail: martsenko@sibmail.com