

УДК 517.54

Г.Д. Садритдинова

РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЛЁВНЕРА С НАЧАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ НА ГРАНИЦЕ КРУГА

В работе исследуется поведение решений уравнения Лёвнера с начальным условием на границе круга. Найдены условия, при которых решения имеют модуль больший или меньший единицы.

Ключевые слова: решение уравнения Лёвнера, начальное условие, вектор главной нормали, знак смешанного произведения.

Рассмотрим уравнение Лёвнера

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = -\zeta \frac{\mu(\tau) + \zeta}{\mu(\tau) - \zeta}, \quad (1)$$

с начальным условием $\zeta(z, 0) = z$, $|z| = 1$, где $\mu(\tau) = e^{i\alpha(\tau)}$, $\alpha(\tau)$ – непрерывная на $[0, \infty)$ функция.

Приведем некоторые известные факты. Изучение решений уравнения (1), по модулю равных единице, сводится к исследованию решений $\psi(\tau)$ уравнения

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \operatorname{ctg} \frac{\alpha(\tau) - \psi}{2}. \quad (2)$$

Через $\psi(\tau, t, \psi_0)$ обозначим решение уравнения (2) с начальным условием $\psi(t, t, \psi_0) = \psi_0$. Будем рассматривать решения $\psi(\tau, t) = \psi(\tau, t, \alpha(t))$. Пусть $A_-(t)$ ($A_+(t)$) – совокупность решений $\psi(\tau, t)$, каждое из которых определено на некотором интервале $(t-h, t) \subset (0, t)$ (соответственно на $(t, t+h) \subset (t, \infty)$).

Теорема 1. В $A_-(t)$ существуют лишь два гладких на $(0, t)$ решения $\psi_1(\tau, t)$ и $\psi_2(\tau, t)$; для них выполняются неравенства

$$0 \leq \psi_1(\tau, t) - \alpha(\tau) \leq 2\pi, \quad -2\pi \leq \psi_2(\tau, t) - \alpha(\tau) \leq 0.$$

Теорема 2. $A_+(t)$ либо пусто, либо содержит бесконечно много решений $\psi(\tau, t)$. Последнее возможно только для значений t , принадлежащих замыканию множества точек τ , в которых правое производное число функции $\alpha(\tau)$ равно $+\infty$ или $-\infty$.

Обозначим через $W_+(t, b)$, $0 \leq t < b \leq \infty$, совокупность всех решений $\zeta(\tau)$ уравнения (1) на (t, b) , для которых $\lim_{\tau \rightarrow t+0} \zeta(\tau) = \mu(t)$ и $|\zeta(\tau)| \leq 1$ на (t, b) . Пусть

$$W_+(t) = \bigcup_{t < b \leq \infty} W_+(t, b).$$

Теорема 3. Если $\alpha(\tau)$ – непрерывная функция с ограниченной вариацией на сегменте $[t, b]$, $0 \leq t < b \leq \infty$, то множество $W_+(t, b)$ не пусто.

Обозначим через $V_+(t)$ подкласс решений из $W_+(t)$, по модулю меньших единицы на всем интервале существования.

Лемма. Пусть на сегменте $[a, b] \subset [0, \infty)$ функция $\alpha(\tau)$ имеет ограниченную производную. Тогда при любом $t \in [a, b)$ $V_+(t)$ содержит лишь одно решение уравнения (1) [1, с. 50–59].

Рассмотрим отрезок $[a, b] \subset [0, \infty)$, на котором $|\alpha'(\tau)| < \infty$. Пусть точка t , принадлежащая внутренности отрезка $[a, b]$, такая, что $\alpha(\tau)$ имеет ограниченную вариацию на $[t, b]$ и $\alpha'(t) \neq 0$. Для такого t рассмотрим гладкие решения $\zeta_1(\tau)$ и $\zeta_2(\tau)$ уравнения (1), принадлежащие множеству $A(t)$. Будем исследовать поведение этих решений при $\tau > t$.

Отображение

$$\zeta^1 = ih \frac{e^{i\beta} + \zeta}{e^{i\beta} - \zeta},$$

где $\beta = \text{const} \in \mathbf{R}$, $h = \text{const} \in (0, \infty)$, переводит замыкание единичного круга $\bar{E}$ в замыкание верхней полуплоскости плоскости $ou\bar{v}$ для каждого τ . Пусть $\beta \neq \alpha(t) + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Подействуем на кривые $\mu(\tau)$, $\zeta_1(\tau)$, $\zeta_2(\tau)$ этим отображением.

Получим соответственно кривые $\mu^1(\tau) = h \operatorname{ctg} \frac{\beta - \alpha(\tau)}{2}$, $\zeta_1^1(\tau) = u_1(\tau) + iv_1(\tau)$, $\zeta_2^1(\tau) = u_2(\tau) + iv_2(\tau)$, которые будем рассматривать как кривые в трехмерном пространстве $от\bar{u}\bar{v}$.

Кривая $\mu^1(\tau)$ лежит в плоскости $от\bar{u}$. Касательный вектор $\mathbf{s}$ к этой кривой в точке $\tau = t$ имеет координаты $\left\{ 1; \frac{h\alpha'(t)}{2\sin^2 \frac{\beta - \alpha(t)}{2}}; 0 \right\}$.

Кривые $\zeta_1^1(\tau)$ и $\zeta_2^1(\tau)$ при $\tau \leq t$ также лежат в плоскости $от\bar{u}$. Найдем для них векторы главных нормалей в точке $\tau = t$.

Параметрическому заданию кривых $\zeta_1^1(\tau): \begin{cases} \tau = \tau \\ u = u_1(\tau) \\ v = v_1(\tau) \end{cases}$ и $\zeta_2^1(\tau): \begin{cases} \tau = \tau \\ u = u_2(\tau) \\ v = v_2(\tau) \end{cases}$ соответствует задание вектор-функций $\mathbf{r}_1(\tau) = \{\tau, u_1(\tau), v_1(\tau)\}$ и $\mathbf{r}_2(\tau) = \{\tau, u_2(\tau), v_2(\tau)\}$ соответственно. Тогда $\mathbf{r}_1'(\tau) = \{1, u_1'(\tau), v_1'(\tau)\}$, $\mathbf{r}_1''(\tau) = \{0, u_1''(\tau), v_1''(\tau)\}$ и $\mathbf{r}_2'(\tau) = \{1, u_2'(\tau), v_2'(\tau)\}$, $\mathbf{r}_2''(\tau) = \{0, u_2''(\tau), v_2''(\tau)\}$.

Вектор главной нормали $\mathbf{v}_1 = \{v_{11}; v_{12}; v_{13}\}$ кривой ζ_1^1 задаётся формулой $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{k_1} \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{ds_1^2}$, где k_1 – кривизна кривой ζ_1^1 , $s_1 = s_1(\tau)$ – переменная длина дуги этой кривой, отсчитываемая от точки $\tau = 0$. Так как

$$\frac{d\mathbf{r}_1}{ds_1} = \mathbf{r}_1' \frac{d\tau}{ds_1} = \frac{\mathbf{r}_1'}{s_1'}, \quad \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{ds_1^2} = \left(\frac{\mathbf{r}_1'}{s_1'} \right)' \cdot \frac{d\tau}{ds_1} = \frac{s_1' \mathbf{r}_1'' - s_1'' \mathbf{r}_1'}{s_1'^3},$$

$$s_1' = \sqrt{1 + u_1'^2 + v_1'^2}, \quad s_1'' = \frac{u_1' u_1'' + v_1' v_1''}{\sqrt{1 + u_1'^2 + v_1'^2}},$$

$$k_1 = \frac{[\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_1'']}{|\mathbf{r}_1'|^3} = \frac{\sqrt{(u_1' v_1'' - u_1'' v_1')^2 + v_1''^2 + u_1''^2}}{\sqrt{(1 + u_1'^2 + v_1'^2)^3}},$$

то

$$\begin{aligned}
 v_{11} &= -\frac{1}{k_1} \frac{s_1''}{s_1'^3} = -\frac{u_1' u_1'' + v_1' v_1''}{\sqrt{(u_1' v_1'' - u_1'' v_1')^2 + v_1''^2 + u_1''^2} \sqrt{1 + u_1'^2 + v_1'^2}} =, \\
 &= -\frac{(\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_1'')}{\|[\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_1'']\| \cdot |\mathbf{r}_1'|}, \\
 v_{12} &= \frac{1}{k_1} \frac{s_1' u_1'' - s_1'' u_1'}{s_1'^3} = \frac{u_1''(1 + u_1'^2 + v_1'^2) - u_1'(u_1' u_1'' + v_1' v_1'')}{\sqrt{1 + u_1'^2 + v_1'^2} \sqrt{(u_1' v_1'' - u_1'' v_1')^2 + v_1''^2 + u_1''^2}} = \\
 &= \frac{u_1'' |\mathbf{r}_1'|^2 - u_1'(\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_1'')}{\|[\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_1'']\| \cdot |\mathbf{r}_1'|}, \\
 v_{13} &= \frac{1}{k_1} \frac{s_1' v_1'' - s_1'' v_1'}{s_1'^3} = \frac{v_1''(1 + u_1'^2 + v_1'^2) - v_1'(u_1' u_1'' + v_1' v_1'')}{\sqrt{1 + u_1'^2 + v_1'^2} \sqrt{(u_1' v_1'' - u_1'' v_1')^2 + v_1''^2 + u_1''^2}} = \\
 &= \frac{v_1'' |\mathbf{r}_1'|^2 - v_1'(\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_1'')}{\|[\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_1'']\| \cdot |\mathbf{r}_1'|}.
 \end{aligned}$$

Для вектора главной нормали $\mathbf{v}_2 = \{v_{21}; v_{22}; v_{23}\}$ кривой ζ_2^1 аналогично находим

$$v_{21} = -\frac{(\mathbf{r}_2', \mathbf{r}_2'')}{\|[\mathbf{r}_2', \mathbf{r}_2'']\| \cdot |\mathbf{r}_2'|}, \quad v_{22} = \frac{u_2'' |\mathbf{r}_2'|^2 - u_2'(\mathbf{r}_2', \mathbf{r}_2'')}{\|[\mathbf{r}_2', \mathbf{r}_2'']\| \cdot |\mathbf{r}_2'|}, \quad v_{23} = \frac{v_2'' |\mathbf{r}_2'|^2 - v_2'(\mathbf{r}_2', \mathbf{r}_2'')}{\|[\mathbf{r}_2', \mathbf{r}_2'']\| \cdot |\mathbf{r}_2'|}.$$

Заметим, что для того чтобы векторы $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ существовали, необходимо чтобы кривизна k_1 и кривизна k_2 были отличны от нуля, то есть, чтобы в точке $\tau = t$ выполнялись условия

$$\begin{cases} u_1' v_1'' \neq u_1'' v_1' \\ u_1'' \neq 0 \\ v_1'' \neq 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} u_2' v_2'' \neq u_2'' v_2' \\ u_2'' \neq 0 \\ v_2'' \neq 0 \end{cases}.$$

Введем параллельный оси τ вектор $\mathbf{a} = \{\tau_0 - t, 0, 0\}$, $\tau_0 > t$, и найдем смешанные произведения $(\mathbf{s}, \mathbf{v}_1, \mathbf{a})$ и $(\mathbf{s}, \mathbf{v}_2, \mathbf{a})$. Имеем

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{s}, \mathbf{v}_1, \mathbf{a}) &= \begin{vmatrix} 1 & \frac{h\alpha'}{2 \sin^2 \frac{\beta - \alpha}{2}} & 0 \\ \frac{(\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_1'')}{\|[\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_1'']\| \cdot |\mathbf{r}_1'|} & \frac{u_1'' |\mathbf{r}_1'|^2 - u_1'(\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_1'')}{\|[\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_1'']\| \cdot |\mathbf{r}_1'|} & \frac{v_1'' |\mathbf{r}_1'|^2 - v_1'(\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_1'')}{\|[\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_1'']\| \cdot |\mathbf{r}_1'|} \\ \tau_0 - t & 0 & 0 \end{vmatrix} = \\
 &= (\tau_0 - t) \frac{h\alpha'}{2 \sin^2 \frac{\beta - \alpha}{2}} \frac{v_1'' |\mathbf{r}_1'|^2 - v_1'(\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_1'')}{\|[\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_1'']\| \cdot |\mathbf{r}_1'|}.
 \end{aligned}$$

Введем обозначение $C_1 = \frac{(\tau_0 - t)h}{2 \sin^2 \frac{\beta - \alpha(t)}{2}} \frac{1}{\|[\mathbf{r}_1'(t), \mathbf{r}_1''(t)]\| \cdot |\mathbf{r}_1'(t)|}$, $C_1 > 0$. Тогда

$$\begin{aligned}
(\mathbf{s}, \mathbf{v}_1, \mathbf{a}) &= C_1 \alpha'(t) \left[v_1''(1 + u_1'^2 + v_1'^2) - v_1'(u_1' u_1'' + v_1' v_1'') \right] = \\
&= C_1 \alpha'(t) [v_1''(t) + u_1'(t)(u_1'(t)v_1''(t) - u_1''(t)v_1'(t))] = \\
&= C_1 \alpha'(t) \left[v_1''(t) + u_1'(t) \begin{vmatrix} u_1'(t) & u_1''(t) \\ v_1'(t) & v_1''(t) \end{vmatrix} \right].
\end{aligned}$$

Аналогично,

$$(\mathbf{s}, \mathbf{v}_2, \mathbf{a}) = C_2 \alpha'(t) \left[v_2''(t) + u_2'(t) \begin{vmatrix} u_2'(t) & u_2''(t) \\ v_2'(t) & v_2''(t) \end{vmatrix} \right],$$

$$\text{где } C_2 = \frac{(\tau_0 - t)h}{2 \sin^2 \frac{\beta - \alpha(t)}{2}} \frac{1}{\| \mathbf{r}_2'(t), \mathbf{r}_2''(t) \| \cdot | \mathbf{r}_2'(t) |} > 0.$$

Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{s}$ лежат в плоскости *оти*. Векторы главных нормалей $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ перпендикулярны касательным к кривым $\zeta_1^1(\tau)$ и $\zeta_2^1(\tau)$ соответственно и с точностью до бесконечно малых указывают направление, в котором кривая в окрестности рассматриваемой точки $\tau = t$ отклоняется от своей касательной. Знак смешанных произведений $(\mathbf{s}, \mathbf{v}_1, \mathbf{a})$ и $(\mathbf{s}, \mathbf{v}_2, \mathbf{a})$ покажет, как направлены векторы главных нормалей $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ – в пространство над верхней или над нижней полуплоскостью плоскости *оив*, а значит, покажет, в пространство над верхней или над нижней полуплоскостью плоскости *оив* выйдут кривые $\zeta_1^1(\tau)$ и $\zeta_2^1(\tau)$ из плоскости *оти* при $\tau > t$. Таким образом, знак смешанных произведений покажет, каким будет модуль решений $\zeta_1(\tau)$ и $\zeta_2(\tau)$ уравнения (1) – больше либо меньше единицы.

Возможны два случая. Пусть $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{s}) < 0$. Тогда для кривой ζ_i^1 , идущей в пространство над нижней полуплоскостью, тройка векторов $\mathbf{s}, \mathbf{v}_i, \mathbf{a}$ будет левая, следовательно, $|\zeta_i(\tau)| > 1$. Для кривой ζ_i^1 , идущей в пространство над верхней полуплоскостью, тройка $\mathbf{s}, \mathbf{v}_i, \mathbf{a}$ будет правая, следовательно, $|\zeta_i(\tau)| < 1$. Пусть теперь $(\bar{\mathbf{a}} \wedge \bar{\mathbf{s}}) > 0$. Тогда, если тройка $\mathbf{s}, \mathbf{v}_i, \mathbf{a}$ – правая, то $|\zeta_i(\tau)| > 1$, а если тройка левая, то $|\zeta_i(\tau)| < 1$. Случай $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{s}) = 0$ возможен тогда, когда $\mu^1(t) = 0$ или $\mu^1(t) = \infty$. Но этот случай исключён нами из рассмотрения условиями $\alpha'(t) \neq 0$ и $\alpha(t) \neq \beta - 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$.

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема. Пусть непрерывная функция $\alpha(\tau)$ имеет ограниченную вариацию на $[t, b]$. Пусть точка $\tau = t$ принадлежит внутренности отрезка $[a, b] \subset [0, \infty)$, на котором $|\alpha'(\tau)| < \infty$, и такая что $\alpha'(t) \neq 0$. Пусть $\zeta_1(\tau)$ и $\zeta_2(\tau)$ – решения уравнения (1), принадлежащие множеству $A(t)$. Пусть $\zeta_1^1(\tau) = u_1(\tau) + iv_1(\tau)$ и $\zeta_2^1(\tau) = u_2(\tau) + iv_2(\tau)$ – образы кривых $\zeta_1(\tau)$ и $\zeta_2(\tau)$ соответственно при отображении

$$\zeta^1 = ih \frac{e^{i\beta} + \zeta}{e^{i\beta} - \zeta},$$

где $\beta = \text{const} \in \mathbf{R}$, $\beta \neq \alpha(t) + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$, $h = \text{const} \in (0, \infty)$. Пусть выполняются условия

$$\begin{cases} u_1'(t)v_1''(t) \neq u_1''(t)v_1'(t) \\ u_1''(t) \neq 0 \\ v_1''(t) \neq 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} u_2'(t)v_2''(t) \neq u_2''(t)v_2'(t) \\ u_2''(t) \neq 0 \\ v_2''(t) \neq 0 \end{cases}.$$

Тогда если $\zeta_1(\tau)$ и $\zeta_2(\tau)$ удовлетворяют условию, что величины

$$A_1(t) = v_1''(t) + u_1'(t) \begin{vmatrix} u_1'(t) & u_1''(t) \\ v_1'(t) & v_1''(t) \end{vmatrix}$$

и

$$A_2(t) = v_2''(t) + u_2'(t) \begin{vmatrix} u_2'(t) & u_2''(t) \\ v_2'(t) & v_2''(t) \end{vmatrix}$$

имеют противоположные знаки, то при $\tau > t$ модуль одного из решений $\zeta_i(\tau)$, ($i = 1, 2$) будет меньше единицы, а модуль второго больше единицы. При этом в случае, если $\alpha'(t)$ и $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{s})$ имеют разные знаки, то при $A_i < 0$ $|\zeta_i| > 1$, а при $A_i > 0$ $|\zeta_i| < 1$. В случае, если $\alpha'(t)$ и $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{s})$ имеют одинаковые знаки, то при $A_i < 0$ $|\zeta_i| < 1$, а при $A_i > 0$ $|\zeta_i| > 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров И.А. Параметрические продолжения в теории однолистных функций. М.: Наука, 1976.
2. Труды П.П. Куфарова. К 100-летию со дня рождения / под общ. ред. И.А. Александрова. – Томск: Изд-во НТЛ, 2009. – С. 64–74.

Статья поступила 04.02.2011 г.

Sadritdinova G.D. SOLUTIONS OF THE LOEWNER EQUATION WITH AN INITIAL CONDITION AT THE BOUNDARY OF A CIRCLE. In this paper, the behavior of solutions of the Loewner equation with an initial condition at the boundary of a circle is investigated. Conditions at which the solutions have the modulus greater or smaller than the unity are found.

Keywords: solution of the Loewner equation, initial condition, vector of the principal normal, sign of the mixed product.

SADRITDINOVA Gulnora Dolimdganovna (Tomsk State University of Architecture and Building)
E-mail: dolinal@sibmail.com