

УДК 519.632:531.262

В.В. Соболев, А.А. Молчанов

**ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СЕН-ВЕНАНА  
О КРУЧЕНИИ СТЕРЖНЯ ДВУСВЯЗНОГО СЕЧЕНИЯ  
МЕТОДОМ КОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ**

Разработан численный метод решения задачи Сен-Венана о кручении стержня с произвольной двусвязной областью сечения. Метод основан на предварительном конформном отображении данной области на круговое кольцо и последующем решении редуцированной краевой задачи Дирихле. Опробование метода с использованием компьютерных программ показало достаточно высокую его эффективность и точность.

**Ключевые слова:** задача Сен-Венана, кручение стержня, краевая задача Дирихле, гармоническая функция, двусвязная область, конформное отображение, численный метод, компьютерная программа.

В математической теории упругости важное место занимает классическая задача Сен-Венана о кручении стержня. При существовании большого числа методов её решения [1 – 7 и др.], учитывающих те или иные особенности геометрии области сечения стержня, проблема решения этой задачи с высокой точностью для сечений произвольной формы остаётся актуальной, особенно для неодносвязных областей сечений. Имеются точные и приближённые решения лишь небольшого количества частных задач: рассматривались двусвязные сечения в форме кругового кольца, эксцентричного кругового кольца [2], области, ограниченной двумя конфокальными эллипсами [1], с небольшой постоянной толщиной стенок [3], в форме «ящичков» [6] и др.

В последние десятилетия в разных странах предпринимались исследования задач кручения численными и численно-аналитическими методами для случаев неодносвязных сечений специального вида: полого толстостенного цилиндра с кольцевой поперечной выточкой полукруглого профиля на внешней поверхности [8]; труб произвольного профиля поперечного сечения с постоянной толщиной стенки [9]; цилиндра с толстыми стенками [10] (МКЭ); с многосвязным поперечным сечением, когда толщина стенки стремится к нулю [11].

Случай многосвязного сечения стержня осложняется тем, что в соответствующей краевой задаче Дирихле имеются неизвестные заранее параметры, число которых определяется порядком связности области  $n$  и равно  $n - 1$ . Выбор параметров должен быть подчинён известному условию Прандтля [4]. В монографии [6] описан численный метод определения неизвестных параметров, основанный на сведении задачи к решению системы из  $n - 1$  линейных алгебраических уравнений. При этом элементы матрицы соответствующей СЛАУ предлагается вычислять как контурные интегралы по связным граничным компонентам области от частных производных функций, являющихся решениями  $n - 1$  краевых задач Дирихле для уравнений Лапласа или Пуассона с краевыми условиями специального вида. Реализация такого метода для случая произвольной области представляется трудно осуществимой на практике. Неслучайно в литературе не встре-

чается численных примеров такого решения для стержня произвольного сечения – без каких-либо упрощающих допущений – даже в простейшем случае  $n = 2$ .

В данной работе предложен новый метод нахождения неопределённого параметра краевой задачи и её решения для двусвязной области произвольной формы. Метод основан на редукции краевой задачи Дирихле к задаче в круговом кольце с помощью конформного отображения. Неопределённый параметр при этом легко определяется согласно условию Прандтля по краевым данным редуцированной задачи.

Метод конформного отображения (МКО), в своё время привлёкший к себе внимание исследователей, хотя и привёл к целому ряду решений краевых задач для областей специального вида, однако не получил широкого применения к решению задачи Сен-Венана о кручении стержня по причине сложности построения необходимых отображений на канонические области в явной форме для областей сколько-нибудь сложной формы. Например, для односвязной области полигональной формы аналитическая функция, отображающая область на круг или полуплоскость, выражается в виде интеграла Шварца – Кристоффеля [12], зависящего от ряда неизвестных параметров, вычисление которых представляет значительные трудности. Для случая многосвязной области сечения эти трудности многократно усиливаются [13]. В недавней работе [14] для функции, отображающей круг на круговой многоугольник, обладающий  $n$ -кратной симметрией вращения, с использованием производной Шварца дано явное представление через гипергеометрическую функцию и на этой основе получено решение задачи о кручении стержня с указанным поперечным сечением. Другие методы построения конформных отображений без привлечения теории Шварца – Кристоффеля, в частности, итеративные методы отображения, основанные на идее минимизации длины границы образа отображаемой области [15, 16], также не нашли ранее широкого применения из-за отсутствия универсальных программ для численного отображения области произвольной формы на канонические области (круг для случая односвязной области сечения стержня или круговое кольцо для случая двусвязной области). Однако появление новых и развитие ранее известных численных методов конформных отображений в сочетании с использованием быстродействующих современных компьютеров делают это направление, ныне незаслуженно забытое, достаточно привлекательным при создании алгоритмов и программ как для решения общих краевых задач для уравнений Лапласа и Пуассона, так и для специализированных алгоритмов, рассчитанных на решение задач кручения стержней.

Достоинства МКО перед другими, например сеточными и вариационными методами, методами интегральных уравнений и восходящими к ним МКЭ, МГЭ, МКГЭ и др., заключаются, в частности, в возможности строить высокоточные решения краевых задач без потери точности по мере удаления от границы внутрь области. Дополнительным резервом повышения точности служит использование итеративных процедур в МКО, что позволяет привлекать для описания геометрии границы области и граничных условий задачи больший объём информации, чем, например, в МГЭ [17]. Причинами тому два обстоятельства: 1) свойство симметрии матриц СЛАУ, возникающих в используемом нами варианте построения конформного отображения [18], и, благодаря этому, экономия значительных объёмов машинной «памяти»; 2) количество неизвестных в МКО определяется не числом  $m$  граничных узлов интерполяции, как в МГЭ, а гораздо более низким по сравнению с  $m$  порядком многочленов, аппроксимирующих отображающие аналитиче-

ские функции. Что касается количества  $m$  граничных узлов, то в нашем методе оно практически не лимитируется.

Результаты численных экспериментов с применением разработанных компьютерных программ, реализующих описанный ниже метод, подтверждают ожидаемые предположения о его достаточной эффективности и точности.

### 1. Постановка задачи

Рассматривается классическая задача Сен-Венана о кручении (однородного, изотропного, упругого) полого прямого призматического или цилиндрического стержня, скручиваемого моментами силы  $M_t$ , приложенными к концам стержня [6, 9, 16]. Пусть поперечное сечение однородного по всей длине стержня представляет собой ограниченную двусвязную область  $B$  в плоскости комплексного переменного  $\zeta = x + iy$ ,  $\Gamma^+$  и  $\Gamma^-$  – соответственно внешняя и внутренняя граничные компоненты области  $B$ , являющиеся замкнутыми кусочно-гладкими жордановыми кривыми без точек возврата. Положительным направлением обхода каждого из контуров  $\Gamma^+$  и  $\Gamma^-$  считается такое, при котором внутренние точки области  $B$ , примыкающие к её границе, остаются слева (т.е. против часовой стрелки на  $\Gamma^+$  и по часовой – на  $\Gamma^-$ ). Влиянием собственного веса стержня пренебрегаем. Поперечные размеры стержня считаются малыми в сравнении с его протяжением  $l$  в осевом направлении. За ось стержня принимается линия, соединяющая центры тяжести всех поперечных сечений. На торце  $z = 0$  стержень закреплён от поворота. Иллюстрация к постановке задачи приведена на рис. 1.

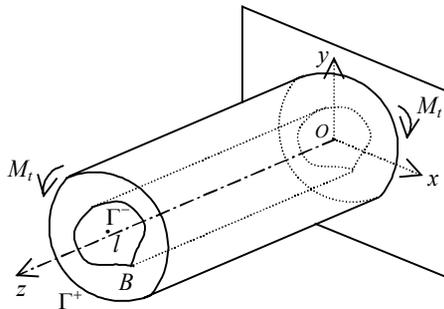


Рис. 1. Иллюстрация к постановке задачи

Решение задачи Сен-Венана сводится к определению гармонической в области  $B$  функции  $\psi(\zeta)$ , принимающей на границе  $\Gamma = \Gamma^+ \cup \Gamma^-$  значения

$$\psi|_{\Gamma^+} = h(\zeta); \tag{1}$$

$$\psi|_{\Gamma^-} = h(\zeta) + C, \tag{2}$$

где  $h(\zeta) = |\zeta|^2 / 2$ . Постоянная  $C$  должна быть выбрана так, чтобы выполнялось условие Прандтля [4]

$$\oint_{\Gamma^-} \tau dl = 2\mu\theta S(\Gamma^-).$$

Здесь  $\tau$  – касательное напряжение,  $\mu$  – модуль упругости при сдвиге,  $\theta$  – угол закручивания на единицу длины стержня,  $S(\Gamma^-)$  – площадь фигуры, ограниченной контуром  $\Gamma^-$ ,  $dl$  – элемент длины дуги. Отсюда, учитывая, что

$$\tau = -\mu\theta \frac{\partial}{\partial n} \left( \psi - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \right),$$

где  $\partial/\partial n$  означает производную в направлении внешней нормали к границе области сечения, и

$$\oint_{\Gamma^-} \frac{\partial}{\partial n} (x^2 + y^2) dl = 2 \oint_{\Gamma^-} y dx - x dy = -4S(\Gamma^-),$$

получаем

$$\oint_{\Gamma^-} \frac{\partial}{\partial n} \psi dl = 0. \quad (3)$$

Соотношение (3) можно рассматривать как уравнение для определения неизвестной постоянной  $C$ .

## 2. Редукция краевой задачи к задаче в круговом кольце

Сведём поставленную краевую задачу Дирихле к соответствующей задаче в круговом кольце с помощью конформного отображения. Пусть  $w = g(\zeta)$  – аналитическая функция, осуществляющая однолистное конформное отображение области  $B$  на круговое кольцо  $K_q = \{w : q < |w| < 1\}$  с некоторым значением радиуса  $q$ ,  $0 < q < 1$ , внутренней окружности  $\gamma^-$  кольца, и пусть  $\zeta = f(w)$  – обратная функция. Будем считать, что функция  $w = g(\zeta)$  нормирована следующим условием (обеспечивающим единственность такой функции): для произвольно фиксированного  $\zeta_0 \in B$  значение  $g(\zeta_0)$  принадлежит интервалу  $(q; 1)$  действительной прямой, т. е.

$$\operatorname{Re} g(\zeta_0) > 0, \operatorname{Im} g(\zeta_0) = 0. \quad (4)$$

Число  $1/q$  называется модулем кольца  $K_q$  или модулем двусвязной области  $B$ . Отметим, что модуль двусвязной области является конформным инвариантом.

В основу практического построения функции  $w = g(\zeta)$  положим известный итерационный процесс альтернации [16].

Суть метода альтернации состоит в следующем. На первом шаге строим отображение  $\omega_1 = P_1(\zeta)$  области  $\operatorname{aus}(\Gamma^-)$  на внешность круга  $\Delta_1 = \{\omega_1 : |\omega_1| > 1\}$  и находим образ  $\gamma_1^+ = P_1(\Gamma^+)$  внешней граничной компоненты области  $B$ . Затем строим отображение  $w_1 = Q_1(\omega_1)$  области  $\operatorname{int}(\gamma_1^+)$  на внутренность единичного круга  $E_1 = \{w_1 : |w_1| < 1\}$  и находим образ  $\Gamma_1^-$  единичной окружности при этом отображении. К полученной двусвязной области  $B^{(1)}$  с граничными компонентами  $\Gamma_1^-$  (внутренняя) и  $\Gamma_1^+ = \{w_1 : |w_1| = 1\}$  (внешняя) применяем второй шаг итерации, в результате которого получаем новую двусвязную область  $B^{(2)}$ , принадлежащую

кругу  $E_2 = \{w_2 : |w_2| < 1\}$ , и т.д. Известно [16], что описанный итеративный процесс сходится: последовательность областей  $B^{(k)}$  сходится при  $k \rightarrow \infty$  как к ядру к круговому кольцу  $K_q$  с некоторым значением  $q$ ,  $0 < q < 1$ . При этом, согласно теории К. Каратеодори [19], последовательность аналитических функций  $g_k : B \rightarrow B^{(k)}$  сходится к функции  $g : B \rightarrow K_q$  равномерно на замыкании  $\bar{B} = B \cup \Gamma$  области  $B$ .

На практике, задавая требуемым уровнем точности  $\delta > 0$ , совершаем итерации до тех пор, пока получившиеся на  $k$ -м шаге граничные компоненты  $\Gamma_k^+$ ,  $\Gamma_k^-$  области  $B^{(k)}$  не станут приближённо, «с точностью до  $\delta$ », совпадать соответственно с единичной окружностью и окружностью

$$\{w : |w| = q^*\} : \max_{w \in \Gamma_k^+} ||w| - 1| < \delta, \quad \max_{w \in \Gamma_k^-} ||w| - q^*| < \delta.$$

Здесь  $q^* = \frac{1}{2} \left( \max_{w \in \Gamma_k^-} |w| + \min_{w \in \Gamma_k^+} |w| \right)$ .

По достижении требуемой точности за приближение к искомому отображению  $g : B \rightarrow K_q$  берём композицию отображений  $g_k = Q_k \circ P_k \circ \dots \circ Q_2 \circ P_2 \circ Q_1 \circ P_1$ , а приближённым значением для  $q$  считаем  $q^*$ .

Конформные отображения внешних областей на внешность и внутренних – на внутренность единичного круга можно получить одним из известных методов [15, 16, 20 и др.]. Мы предлагаем использовать хорошо оправдавшие себя методы, основанные на минимизации длины образа границы отображаемой области с аппроксимацией минимизирующих функций многочленами по положительным (случай внутренних областей) или по отрицательным (случай внешних областей) степеням комплексного переменного [15, 18].

На завершающем этапе построения отображения, когда в качестве образа  $B$  получена звездообразная (относительно начала координат) область, близкая к круговому кольцу, бывает полезно использовать приём улучшения отображений, основанный на методе граничных вариаций М.А.Лаврентьева [12, с. 377 – 379]. Используя формулы Лаврентьева, можно совершать «улучшающие» отображения

$$\varphi(w) = w \left( 1 + \frac{a_0}{2} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - ib_k) w^{k+1}$$

областей  $\text{int}(\Gamma_k^+)$  на внутренность круга и отображения

$$\chi(w) = w \left( 1 - \frac{a_0}{2} \right) - a_1 - \sum_{k=1}^{\infty} (a_{k+1} + ib_{k+1}) w^{-k}$$

областей  $\text{aus}(\Gamma_k^-)$  на внешность круга, добиваясь, чтобы граница получаемой при этом двусвязной области становилась всё ближе к границе кругового кольца. При этом в обеих приведённых формулах

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - |\omega(\vartheta)|) \cos k\vartheta d\vartheta, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - |\omega(\vartheta)|) \sin k\vartheta d\vartheta,$$

где  $\omega(\vartheta)$  – аффикс точки на контуре, имеющей аргумент, равный  $\vartheta$ .

В завершение построения нормированного условиями (4) приближённого отображения  $B$  на круговое кольцо остаётся найти значение  $\alpha = \arg g_k(\zeta_0)$  и умножить  $g_k(\zeta)$  на  $e^{-i\alpha}$ :  $g(\zeta) = e^{-i\alpha} g_k(\zeta)$ .

Введём в рассмотрение гармоническую в кольце  $K_q$  функцию  $\psi^*(w)$ , принимающую в точке  $w \in K_q$  значение  $\psi(z)$ ,  $z = f(w)$ :  $\psi^*(w) = \psi(f(w))$ . Пусть  $h^+(\tau)$ ,  $h^-(\tau)$  ( $-\pi \leq \tau \leq \pi$ ) – приведённые к границе кольца  $K_q$  граничные значения функции  $\psi^*(w)$  на внешней и внутренней граничных компонентах  $\gamma^+$ ,  $\gamma^-$  кольца:  $h^+(\tau) = h_1(\tau)$ ,  $h^-(\tau) = h_q(\tau) + C$ , где  $h_1(\tau) = h(f(e^{i\tau}))$ ,  $h_q(\tau) = h(f(qe^{i\tau}))$ . Решая задачу Дирихле для кольца  $K_q$

$$\Delta \psi^* = 0, \quad \psi^* \Big|_{\gamma^+} = h^+, \quad \psi^* \Big|_{\gamma^-} = h^-,$$

получим этим решение задачи в соответствующих точках области  $B$ .

Отметим, что  $2\pi$ -периодические функции  $h^+(\tau)$ ,  $h^-(\tau)$  непрерывны всюду на  $[-\pi; \pi]$ . Кроме того, они непрерывно дифференцируемы на  $(-\pi; \pi)$  всюду, кроме конечного числа точек  $\tau_j^\pm$ , соответствующих точкам  $\omega_j^\pm = g(\zeta_j^\pm)$ ,  $\omega_j^+ = \exp(i\tau_j^+)$ ,  $\omega_j^- = q \exp(i\tau_j^-)$ , – образам угловых граничных точек  $\zeta_j^\pm$  области  $B$  (т.е. точек с внутренними для  $B$  углами при них, не равными  $\pi$ ).

### 3. Решение редуцированной задачи в круговом кольце

Решение задачи Дирихле для кольца  $K_q$  в точке  $w \in K_q$  получаем по формуле Виля [5]:

$$\psi^*(re^{it}) = A \ln r + a_0^+ + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (K(r, t, \tau) h_1(\tau) - K(qr, t, \tau) h_q(\tau)) d\tau, \quad q \leq r \leq 1. \quad (5)$$

Здесь

$$A = \frac{C + a_0^- - a_0^+}{\ln q}, \quad a_0^+ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h_1(\tau) d\tau, \quad a_0^- = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h_q(\tau) d\tau, \quad (6)$$

$$K(\rho, t, \tau) = \sum_{n=\pm 1, \pm 2, \dots} \frac{\rho^n}{1 - q^{2n}} \cos n(t - \tau).$$

Для определения неизвестной постоянной  $C$  преобразуем условие Прандтля (3). Учитывая, что

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} \Big|_{\Gamma^-} = - \frac{\partial \psi^*}{\partial r} \Big|_{w=qe^{it}} \cdot |g'(\zeta)|_{\zeta=f(qe^{it})}$$

и  $dl = |d\zeta| = |f'(w)| |dw| = |g'(\zeta)|^{-1} ds$ , где  $ds$  – элемент длины дуги окружности  $\gamma^- = \{w: |w| = q\}$ , запишем условие (3) в виде

$$q \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial \psi^* (re^{it})}{\partial r} \Big|_{r=q} dt = 0.$$

Подставляя сюда  $\psi^*$  из (5), приходим к равенству

$$A = -\frac{1}{2\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1-q^{2n}} \int_{-\pi}^{\pi} h^-(\tau) \cos n(t-\tau) d\tau \right) dt.$$

Интегрируя ряд почленно, получаем  $A = 0$ , и, следовательно,

$$C = a_0^+ - a_0^-. \quad (7)$$

Таким образом, условие Прандтля (3) сводится к отсутствию у функции  $\psi^*$  логарифмической составляющей.

Формула (5), а также вид ядровой функции  $K(\rho, t, \tau)$  известны из литературы [15, 20, 21]. Однако мы приводим их в ином виде, более удобном для наших целей.

#### 4. Определение крутильной жёсткости стержня

Крутильная (геометрическая) жёсткость стержня  $D$  определяется равенством [6, 7]

$$D(B) = \iint_B \left( x^2 + y^2 - x \frac{\partial \psi}{\partial x} - y \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dx dy.$$

Отсюда, применяя формулу Остроградского – Грина, с учётом граничных условий (1), (2), получаем

$$D(B) = 2 \iint_B \psi dx dy + \frac{1}{3} \oint_{\Gamma^+} (y^3 dx - x^3 dy) + \frac{1}{3} \oint_{\Gamma^-} (y^3 dx - x^3 dy) + 2CS(\Gamma^-). \quad (8)$$

Для численного определения интеграла  $I(B) = \iint_B \psi dx dy$  в (8) целесообразно использовать метод статистических испытаний Монте-Карло (М-К) [22].

#### 5. Программная реализация метода

По описанному алгоритму разработаны в пакете MATLAB программы *AltRingDir*, *RingDir*, *HardTorsShaft*. Первая программа предназначена для сведения задачи Дирихле к соответствующей задаче в круговом кольце путём построения необходимого конформного отображения с использованием метода альтернации и граничных вариаций по Лаврентьеву. Программа *RingDir* предназначена для решения задачи Дирихле в круговом кольце и определения постоянной  $C$  по формулам (6), (7). Программой *HardTorsShaft* вычисляется крутильная жёсткость по методу, описанному выше. Меню этой программы снабжено также опцией вычисления касательных напряжений  $\tau_{zx} = \mu\theta(\partial\psi/\partial y - y)$ ,  $\tau_{zy} = \mu\theta(-\partial\psi/\partial x + x)$  с использованием специальной процедуры частного дифференцирования функции  $\psi$ , заданной численно по множеству случайных точек, образующих в области  $B$  плотную сеть, и графического отображения линий равных напряжений.

Охарактеризуем кратко некоторые особенности программ.

Во всех трёх программах область  $B$  задаётся как двусвязный полигон  $B_m$  с вершинами  $\zeta_1^+, \zeta_2^+, \dots, \zeta_{m^+}^+$  на  $\Gamma^+$  и  $\zeta_1^-, \zeta_2^-, \dots, \zeta_{m^-}^-$  на  $\Gamma^-$  ( $m = m^+ + m^-$ ). В случае, если область  $B$  полигонального вида и число вершин полигона невелико, для повышения точности квадратур совершается (в автоматическом режиме) их пополнение дополнительными точками, равномерно распределёнными внутри каждого звена граничной ломаной, до образования на  $\Gamma^\pm$  достаточно плотных сетей узлов  $\zeta_1^\pm, \zeta_2^\pm, \dots, \zeta_{m^\pm}^\pm$ .

Программа *AltRingDir* перед построением конформного отображения  $B \rightarrow K_q$  выполняет следующее:

1) приводит (если это необходимо), начало системы координат к центру тяжести области  $B$  и координатные оси – к главным осям инерции;

2) задаёт случайным образом большое число  $M(B)$  (задаваемое пользователем) равномерно распределённых внутри  $B$  точек  $\zeta_k$  и определяет по методу М-К приближённое значение  $S_1(B)$  площади  $S(B)$ ;

3) приближённым контурным интегрированием вычисляет значение  $S_2(B)$  площади  $S(B)$  по формуле  $S_2(B) = S(\Gamma^+) - S(\Gamma^-)$ , где

$$S(\Gamma^+) = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma^+} xdy - ydx, \quad S(\Gamma^-) = -\frac{1}{2} \oint_{\Gamma^-} xdy - ydx, \quad (9)$$

обеспечивающей высокую точность при выборе подходящей сети граничных узлов.

Дублирование вычисления величины  $S(B)$  (контурным интегрированием и методом М-К) объясняется необходимостью достижения максимально высокой возможной точности вычисления интеграла  $I(B)$  с использованием случайно сгенерированных точек  $\zeta_k \in B$ ,  $k = 1, \dots, M(B)$ . Высокоточное интегрирование по методу М-К возможно лишь при высокой степени равномерности распределения таких точек по области  $B$ . Своеобразным, косвенным, способом контроля равномерности распределения может служить сравнение величины  $S_1(B)$  с точным значением  $S(B)$  (если его определение возможно) или с величиной  $S_2(B)$ , определяемой контурным интегрированием весьма точно при достаточно большом числе граничных узлов. Поэтому из различных вариантов распределения точек  $\zeta_k \in B$  при вычислении интеграла  $I(B)$  по методу М-К предпочтительнее тот, для которого величина  $|S_1(B) - S_2(B)|$  (или  $|S_1(B) - S(B)|$ ) меньше.

На каждом шаге альтернации отслеживаются образы точек  $\zeta_k \in B$  и в результате построения окончательного отображения  $g: B \rightarrow K_q$  устанавливаются их образы  $w_k = g(\zeta_k)$ , в которых вычисляются по формуле (5) значения  $\psi^*(w_k) = \psi(\zeta_k)$ , используемые далее в методе М-К при вычислении интеграла  $I(B)$ . Имея в виду случайный характер результатов, получаемых по методу М-К, вычисление  $I(B)$ , с целью повышения точности, повторяется несколько раз для разных массивов случайно взятых  $M(B)$  точек и полученные значения усредняются.

## 6. Опробование метода

Выполнено опробование метода расчётами для различных видов и размеров областей сечений стержней. Ниже приведено описание модельных областей и некоторые результаты расчётов для них.

1) Модель «Кольцо»: область  $B$  ограничена концентрическими окружностями радиусов 3 и 1.

2) Модель «Эллипсы»:

$$\Gamma^+ = \{(x, y) : x^2/16 + y^2/4 = 1\}, \quad \Gamma^- = \{(x, y) : x^2/4 + y^2 = 1\}.$$

3) Модель «Квадраты» (рис. 2).

4) Модель «6-угольники» (рис. 3).

5) Модель «Гайка» (рис. 4).

6) Модель «Шайба»:

$$\Gamma^+ = \{(x, y) : x^2/16 + y^2/9 = 1\}, \quad \Gamma^- = \{(x, y) : x^2 + y^2/4 = 1\}.$$

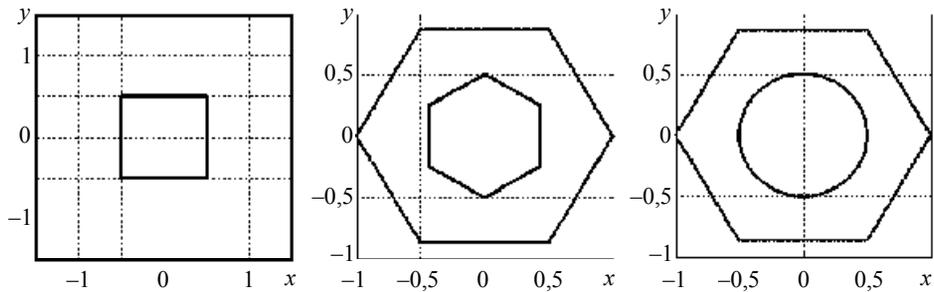


Рис. 2. Модель «Квадраты»

Рис. 3. Модель «6-угольники»

Рис. 4. Модель «Гайка»

Рис. 5 иллюстрирует применение метода альтернации для отображения двусвязной области на кольцо. На рис. 5, *a* показана область  $B$ , модель «6-угольники», с заданными внутри области 2000 равномерно распределёнными точками для реализации метода М-К. Граница области задана 800 точками, по 400 на каждой из граничных компонент  $\Gamma^+$  и  $\Gamma^-$ . После 5 шагов альтернации и трёхкратного применения вариаций границ по Лаврентьеву в качестве конформного образа  $B$

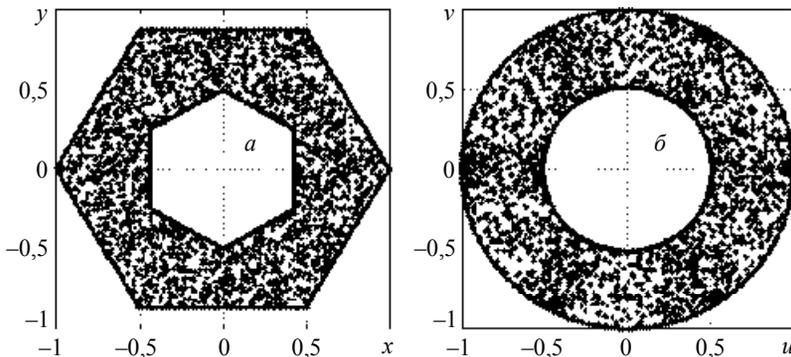


Рис. 5. Иллюстрация применения метода альтернации для отображения двусвязной области на кольцо, модель «6-угольники»

получено кольцо  $K = \{w: 0,5152 < |w| < 1\}$  (рис. 5, б); максимальное отклонение образа  $\Gamma^+$  от единичной окружности составило  $7,7 \cdot 10^{-4}$ , образа  $\Gamma^-$  от окружности радиуса  $q = 0,5152 - 4,5 \cdot 10^{-3}$ .

Охарактеризуем точность решения задачи Дирихле для двусвязной области описанным методом конформного отображения результатами следующего численного эксперимента. По заданным в 400 граничных точках (по 200 на каждой из граничных компонент  $\Gamma^+$ ,  $\Gamma^-$ ) области  $B$ , модель «Эллипсы», значениям гармонической функции

$$h(x, y) = 0,25((x-3)^2 - (y+1)^2) + 2,13$$

были рассчитаны по формуле (5) приближённые значения этой функции в 400 случайно расположенных в  $B$  точках и проведено сравнение с соответствующими точными значениями. При этом при построении конформного отображения области  $B$  на кольцо  $K_q$ ,  $q = 0,5646$ , были использованы четыре итерации в методе альтернации с многочленами (псевдомногочленами) порядков до 60 и два шага вариации границы по Лаврентьеву с использованием тригонометрических многочленов порядка 80. Максимальная погрешность, зафиксированная в точке  $(-3,54; 0,82)$  (на расстоянии 0,013 от границы), равна 0,024, что составляет 0,18 % от полной вариации  $h(x, y)$  в области  $B$  (равной 13,65). По мере удаления точек от границы внутрь области погрешность уменьшается и на расстоянии от границы, большем, чем 0,020, становится меньше 0,01. Среднеквадратическая погрешность по всем 400 точкам составила 0,003 (0,02 %). В табл. 1 приведены рассчитанные для этой же модели производные  $\partial h / \partial x$ ,  $\partial h / \partial y$  указанной функции  $h$  в 15 наудачу взятых точках области  $B$  сравнительно с точными значениями.

Таблица 1

Результаты вычислений функции  $h$  и её частных производных  
(модель «Эллипсы»,  $M(B) = 4000$ )

№ п/п	$x$	$y$	$h_{\text{прибл}}$	$h_{\text{точн}}$	$\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_{\text{прибл}}$	$\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_{\text{точн}}$	$\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)_{\text{прибл}}$	$\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)_{\text{точн}}$
1	2,183	-1,313	2,272	2,272	-0,399	-0,408	0,149	0,156
2	-0,662	1,471	3,956	3,955	-1,850	-1,831	-1,250	-1,235
3	0,656	1,899	1,403	1,402	-1,182	-1,172	-1,403	-1,449
4	2,549	0,647	1,503	1,502	-0,224	-0,225	-0,800	-0,823
5	0,478	1,173	2,540	2,540	-1,250	-1,261	-1,100	-1,086
6	-1,803	1,312	6,561	6,560	-2,399	-2,401	-1,150	-1,156
7	-2,419	-0,623	9,436	9,435	-2,699	-2,709	-0,200	-0,189
8	1,301	1,318	1,508	1,508	-0,849	-0,849	-1,150	-1,159
9	-2,256	1,227	7,797	7,797	-2,624	-2,628	-1,098	-1,113
10	-1,005	1,149	4,985	4,986	-2,000	-2,002	-1,074	-1,074
11	-0,356	-1,424	4,901	4,901	-1,675	-1,678	0,200	0,212
12	-3,256	0,039	11,643	11,646	-3,138	-3,128	-0,499	-0,519
13	2,710	0,030	1,886	1,886	-0,149	-0,145	-0,524	-0,515
14	-0,374	-1,261	4,959	4,960	-1,699	-1,687	0,125	0,130
15	-1,804	-1,398	7,860	7,861	-2,399	-2,402	0,199	0,199

Как видно из табл.1, точность вычисления функции  $h$  довольно высокая, для частных производных функции  $h$  – несколько хуже. Подобные результаты наблюдались и в экспериментах на других моделях.

Результаты расчётов геометрической жёсткости стержней для моделей 1) – 6) приведены в табл. 2, в которой используются следующие обозначения:  $m^+$ ,  $m^-$  – общее число точек на граничных компонентах  $\Gamma^+$  и  $\Gamma^-$ , с учётом пополнения, используемых при решении задачи Дирихле;  $C$  – значение постоянной, полученное в соответствии с условием Прандтля;  $M(B)$  – количество равномерно распределённых внутри области  $B$  точек в методе М-К;  $S_K$ ,  $S_{MK}$  – приближённые значения площади  $S(B)$ , полученные контурным интегрированием и по методу М-К;  $q$  – полученное значение радиуса внутренней окружности кольца, конформно изоморфного области  $B$ ;  $D(B)$  и  $\tilde{D}$  – точное и приближённое значения геометрической жёсткости;  $\Delta = |D(B) - \tilde{D}|$  – абсолютная погрешность;  $\delta D = 100|D(B) - \tilde{D}|/D(B)$  – относительная погрешность (%).

Таблица 2

Результаты вычислений геометрической жёсткости стержней

Наименование модели	$m^+$	$m^-$	$C$	$M(B)$	$S_K$	$S_{MK}$	$S(B)$	$q$	$\Delta$	$\delta D$ (%)	$\tilde{D}$	$D(B)$
Кольцо	200	200	4,0000	2500	25,128	25,126	25,133	0,3333	0,010	$7,9 \cdot 10^{-3}$	125,674	125,664 [9]
	400	400	4,0000	3500	25,132	25,135		0,3333	0,003	$2,4 \cdot 10^{-3}$	125,661	
	400	400	4,0000	4500	25,132	25,132		0,3333	0,004	$3,2 \cdot 10^{-2}$	125,660	
Эллипсы	200	200	2,4002	2000	18,846	18,851	18,850	0,5646	0,367	$4,9 \cdot 10^{-1}$	75,031	75,398 [9]
	200	200	2,4002	3500	18,846	18,849		0,5646	0,004	$6,2 \cdot 10^{-3}$	75,394	
	400	400	2,4001	4000	18,849	18,851		0,5646	0,271	$3,6 \cdot 10^{-1}$	75,127	
Квадраты	300	300	1,1528	3500	8,000	8,001	8,000	0,3717	0,025	0,223	11,205	11,230 [9, 13]
	400	400	1,1531	2500	8,000	7,998		0,3725	0,013	0,116	11,243	
	400	400	1,1526	3500	8,000	8,001		0,3729	0,017	0,151	11,213	
6-угольники	200	200	0,2980	2500	1,948	1,943	1,948	0,5152	-	-	0,969	-
	400	400	0,2981	3500	1,948	1,942		0,5152			0,953	
	400	400	0,2981	4500	1,948	1,944		0,5154			0,961	
Гайка	200	200	0,2797	2500	1,813	1,806	1,813	0,5563	-	-	0,935	-
	400	400	0,2797	3500	1,813	1,811		0,5563			0,935	
	400	400	0,2797	4500	1,813	1,811		0,5563			0,939	
Шайба	200	200	4,2006	2500	31,411	31,414	31,416	0,4696	-	-	197,86	-
	400	400	4,2006	3500	31,415	31,414		0,4696			199,33	
	400	400	4,2006	4500	31,415	31,423		0,4696			198,74	

При вычислении геометрической жёсткости  $D(B)$  на погрешность метода конформного отображения накладывается погрешность вычисления двойного интеграла в формуле (8) по методу М-К, для которой – в зависимости от числа  $M(B)$  используемых случайных реализаций – характерна величина  $O((M(B))^{-0,5})$  [22]. В нашем методе эта погрешность частично компенсируется за счёт использования описанного приёма отбора случайных реализаций, соответствующих наиболее точному значению величины площади области  $B$ , а также за счёт усреднения величины  $I(B)$  по выборке объёмом от 3 до 5 значений.

Отметим, что прямой зависимости повышения точности вычисления крутильной жёсткости  $D(B)$  (так же, как и площади области  $B$ , рассчитанной по методу М-К) от увеличения количества  $M(B)$  не наблюдается, как это видно из результатов, приведённых в табл. 2.

На рис. 6 и 7 (сгенерированных программой *RingDir*) показаны поля изолиний функции  $\psi(x, y)$  (а) и касательных напряжений  $\tau_{zx} = \mu\theta(\partial\psi/\partial y - y)$  (б),  $\tau_{zy} = \mu\theta(-\partial\psi/\partial x + x)$  (в) для двух описанных выше моделей ( $\mu = \theta = 1$ ).

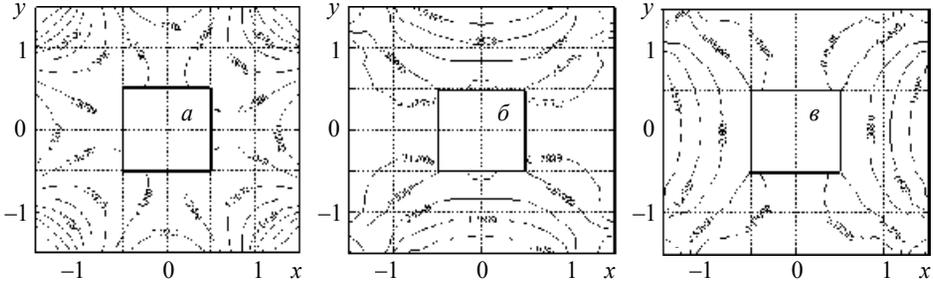


Рис. 6. Модель «Квадраты»

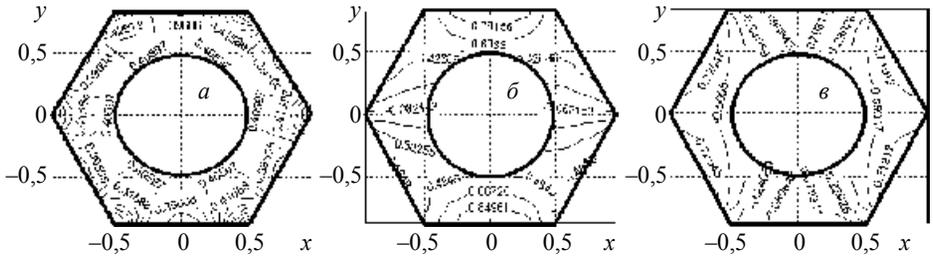


Рис. 7. Модель «Гайка»

## 7. Выводы

Из результатов численных экспериментов можно сделать вывод, что стабильность результатов приближённых вычислений функции  $\psi$  и её производных  $\partial\psi/\partial x$ ,  $\partial\psi/\partial y$  (а, значит, и касательных напряжений  $\tau_{zx}$ ,  $\tau_{zy}$ ), а также геометрической жёсткости стержня  $D(B)$  наступает при количестве узлов около 200 на каждой из внешней и внутренней граничных компонент области и числе случайных реализаций в методе М-К около 3 – 4 тысяч.

Высокая точность результатов, в части вычисления гармонической функции и её производных, полученных для моделей с известными точными решениями, даёт основание считать метод надёжным. Погрешность вычисления крутильной жёсткости  $D(B)$ , определяемая особенностями метода М-К, заметно больше и может составлять 1–2 %.

Предложенный метод прост, не требует больших затрат времени на подготовку модели к расчёту, достаточно эффективен и обеспечивает приемлемую точность решение задачи Сен-Венана о кручении стержня для широкого круга двусвязных областей сечения.

Метод может найти применение в инженерной практике для исследования зависимости крутильной жёсткости полого стержня от геометрических параметров и конфигурации области сечения. Внося соответствующие изменения, его можно применить также к решению общих краевых задач Дирихле, Неймана и смешанной краевой задачи для гармонических функций в плоских двусвязных областях.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Greenhill A.G. // Quart. J. Math. 1879. V. 16. P. 227.
2. Mac Donald H.M. // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1893. V. 8. P. 62.
3. Bredt R. // Zeitschr. d. Ver. d. Ing. 1903. V. 40. P. 785.
4. Prandtl L. // Jahresb. d. Deutschen Math. und Mech. Vereinig. 1904. V. 13. P. 31.
5. Геккелер И.В. Статика упругого тела. Л.; М., 1934. 287 с.
6. Арутюнян Н.Х., Абрамян Б.Л. Кручение упругих тел. М., 1963. 688 с.
7. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М., 1975. 576 с.
8. Hasegawa H., Akiyama H., Takahashi S. Torsion of an elastic thick walled cylinder with a semicircular notch // Nihon kikai gakkai ronbunshu. A N Trans. Jap. Soc. Mech. Eng. A. 1998. V. 64. No. 619. P. 656–660.
9. Wang C.Y. Torsion of tubes of arbitrary shape // Int. J. Solids and Struct. 1998. V. 35. No. 7–8. P. 719–731.
10. Jabmołnski T.F., Andreaus U. Torsion of a saint-venant cylinder with a non-simply connected cross-section // Eng. Trans. 1999. V. 47. No. 1. P. 77–91.
11. Morassi A. Torsion of thin tubes with multicell cross-section // Meccanica. 1999. V. 34. No. 2. P. 115–132.
12. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М., 1965. 716 с.
13. Голузин Г.М. О конформном отображении двусвязных областей, ограниченных прямолинейными и круговыми многоугольниками // Конформные отображения односвязных и многосвязных областей. М.; Л., 1937. С. 90–97.
14. Александров И.А. Кручение упругого стержня с кратно-круговой областью поперечного сечения // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2010. № 4(12). С. 56–63.
15. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. М.; Л. 1962. 708 с.
16. Фильчаков П.Ф. Численные и графические методы математики. Киев, 1970. 800 с.
17. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. М., 1987. 524 с.
18. Соболев В.В., Ищенко Н.В. Программа численного построения конформного отображения ограниченной двусвязной области на круговое кольцо и обратного отображения. Ростов н/Д: РГАСХМ. Зарегистрир. ГОФ АП РФ (ВНТИЦ). № 50200100349, 2001. 26 с.
19. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М., 1966. 628 с.
20. Коппенфельс В., Штальман Ф. Практика конформных отображений. М., 1963. 406 с.
21. Villat H. Lecons sur l' hydrodynamique. Paris, 1929. 291 p.
22. Соболев И.М. Численные методы Монте-Карло. М., 1973. 64 с.
23. Прочность. Устойчивость. Колебания: справочник в 3 т. / под общей редакцией И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. М., 1968. Т. 1. 831 с.

Статья поступила 29.10.2010 г.

*Sobolev V.V., Molchanov A.A.* NUMERICAL SOLUTION OF SAINT-VENANT'S PROBLEM ABOUT TORSION OF A SHAFT WITH TWO-CONNECTED DOMAIN SECTION BY THE METHOD OF CONFORMAL MAPPING. A numerical method for solving the Saint-Venant problem about torsion of a shaft with an arbitrary two-connected section domain was developed. This method is based on preliminary building of a conformal mapping of this domain onto a circle ring followed by the solution of the reduced boundary Dirichlet problem. The testing of this method with employment of computer programs demonstrates its sufficiently high efficiency and precision.

Keywords: Saint-Venant problem, shaft torsion, Dirichlet boundary problem, harmonic function, two-connect domain, conformal mapping, numerical method, computer program.

*SOBOLEV Vadim Vladimirovich* (Don State Technical University)

E-mail: sobolev@aaanet.ru

*MOLCHANOV Alexander Alexeevish* (Don State Technical University)

E-mail: aa\_molchanov@mail.ru