

УДК 519.63

М.А. Бубенчиков

СПОСОБ МИНИМИЗАЦИИ СХЕМНОЙ ДИФФУЗИИ В ЧИСЛЕННОЙ МОДЕЛИ АЭРОДИНАМИКИ

Посредством линеаризации участка траектории жидкой частицы на фрагменте, отвечающем разностной ячейке, и в результате применения естественных переменных, связанных с траекторией частиц, а также использованием разностей против потока, в работе проведена аппроксимация конвективных членов, минимизирующая схемную или искусственную диффузию. Проведены тестовые расчеты, подтверждающие этот результат. Показано, что предлагаемая вычислительная технология удобна для применения в сочетании с методом последовательной перерелаксации (ППР), получившего современное название метода простой итерации.

Ключевые слова: *конвективно-диффузионная задача, естественные переменные, разности против потока, метод простой итерации, минимизация схемной или искусственной диффузии.*

В работе [1] сформулированы семь положений, характеризующих схемную диффузию, появляющуюся при решении конвективно-диффузионных задач.

1. Схемная или искусственная диффузия имеет место, когда поток наклонен по отношению к линиям сетки и существует ненулевой градиент зависимой переменной в направлении по нормали к потоку.

2. Приближенное выражение для коэффициента искусственной диффузии в двухмерном случае дано в [2]:

$$D_{\text{схем}} = \frac{\rho V \Delta r \Delta z \sin \theta}{4(\Delta r \sin^3 \theta + \Delta z \cos^3 \theta)},$$

где V – модуль вектора скорости; θ – угол наклона (от 0 до 90°) вектора скорости к направлению оси Oz . Из этого соотношения видно, что искусственная диффузия не появляется, если результирующий поток направлен вдоль одной из сеточных линий; кроме того, искусственная диффузия является максимальной, когда направление потока составляет угол 45° с линиями сетки.

3. Вклад искусственной диффузии можно уменьшить, используя меньшие шаги Δz и Δr и располагая сетку (если это возможно) так, чтобы сеточные линии более или менее совпадали с направлением потока.

4. Поскольку реальная диффузия имеет место во многих задачах, то достаточно сделать искусственную диффузию малой по сравнению с реальной.

5. Использование центрально-разностной схемы не является средством избавления от искусственной диффузии. Как упоминалось ранее, центрально-разностная схема дает совершенно нереальные решения, если рассматриваются большие числа Пекле.

6. Основной причиной возникновения искусственной диффузии является практика обращения с потоком через каждую грань контрольного объема как с локально-одномерным.

7. Схемы, которые обеспечили бы меньший вклад искусственной диффузии, должны учитывать многомерную природу потока. Для этого также необходимо включать большее число соседних точек в дискретный аналог.

Технология минимизации

Для минимизации схемной диффузии нами будет использован подход, аналогичный Рейсби [3]. Вспомним, что конвективная часть в стационарных уравнениях переноса $(\vec{V} \cdot \nabla \Phi)$ есть субстанциональная производная, которая является скоростью изменения переносимой субстанции во времени при перемещении жидкой или газообразной частицы вдоль ее траектории. Продолжая работу по изучению аэродинамики циклонной камеры [4] в рамках (ψ, ξ, W, T) -описания, в дальнейшем будем полагать, что $\Phi = W, \xi, T$. Здесь W – окружная компонента скорости; ξ – завихренность; T – температура. Таким образом

$$(\vec{V} \cdot \nabla \Phi) = \frac{D\Phi}{Dt}.$$

В плоском случае $\vec{V} = (V_s, V_n)$, $\nabla \Phi = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial s}, \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)$. Если в качестве координат (s, n) взять ортогональные координаты (z, r) , то

$$(\vec{V} \cdot \nabla \Phi) = U \frac{\partial \Phi}{\partial z} + V \frac{\partial \Phi}{\partial r}.$$

Если же s – координата, отсчитываемая вдоль траектории, а n – по ее нормали, то

$$\vec{V} = (V, 0), \quad \nabla \Phi = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial s}, \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) \text{ и } \frac{D\Phi}{Dt} = (\vec{V} \cdot \nabla \Phi) = V \frac{\partial \Phi}{\partial s}.$$

Таким образом, в естественных координатах (s, n) , связанных с траекторией жидкой частицы, запись конвективной части упрощается как в плоском, так и в пространственном случаях. Локальные значения естественных координат определяют ориентацию в пространстве конвективной ячейки, которая в общем случае не совпадает с разностной ячейкой диффузии.

Стало быть, подход Рейсби предполагает следующее представление конвективных членов в разностных уравнениях конвективного переноса

$$\left(U \frac{\partial \Phi}{\partial z} + V \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)_{i,j} = V_{i,j} \frac{\Phi_{i,j} - \Phi_*}{\Delta s} + o(\Delta s). \quad (1)$$

Здесь $V = \sqrt{U^2 + V^2}$; Φ_* – значение переносимой субстанции, найденное на границе разностной ячейки с наветренной стороны; Δs – расстояние от центрального узла ячейки (z_i, r_i) до найденной точки на границе (z_*, r_*) .

Как следует из представленного рисунка, $\Delta s = \sqrt{z_*^2 + r_*^2}$. При этом начало отсчета системы координат (z_*, r_*) берется в узле (z_i, r_j) . Угол наклона вектора скорости к оси z определяется соотношением $\theta = \arctg\left(\frac{V}{U}\right)$, а угол наклона диагонали разностной ячейки к оси $0z$ есть $\gamma = \arctg\left(\frac{\Delta r}{\Delta z}\right)$.

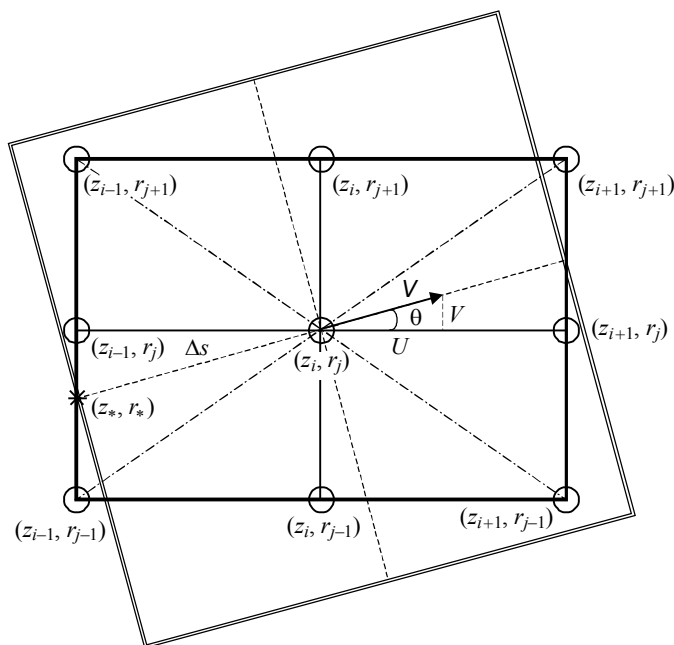


Рис. 1. Диффузионная разностная ячейка (одинарная линия)
и конвективная разностная ячейка (двойная линия)

Значение искомой величины Φ_* в точке (z_*, r_*) можно определить с использованием приведенной ниже таблицы.

Таблица 1

Значение искомой величины с наветренной стороны

θ	z_*	r_*	Φ_*
$[-\pi, -\pi+\gamma]$	Δz	$\Delta z \operatorname{tg} \theta$	$\Phi_* = \Phi_{i+1,j} + \frac{ r_* }{\Delta r} (\Phi_{i+1,j+1} - \Phi_{i+1,j})$
$[-\pi+\gamma, -\frac{\pi}{2}]$	$\Delta r \operatorname{ctg} \theta$	Δr	$\Phi_* = \Phi_{i,j+1} + \frac{ z_* }{\Delta z} (\Phi_{i+1,j+1} - \Phi_{i,j+1})$
$[-\frac{\pi}{2}, -\gamma]$	$\Delta r \operatorname{ctg} \theta$	Δr	$\Phi_* = \Phi_{i,j+1} + \frac{ z_* }{\Delta z} (\Phi_{i-1,j+1} - \Phi_{i,j+1})$
$[-\gamma, 0]$	$-\Delta z$	$-\Delta z \operatorname{tg} \theta$	$\Phi_* = \Phi_{i-1,j} + \frac{ r_* }{\Delta r} (\Phi_{i-1,j+1} - \Phi_{i-1,j})$
$[0, \gamma]$	$-\Delta z$	$-\Delta z \operatorname{tg} \theta$	$\Phi_* = \Phi_{i-1,j} + \frac{ r_* }{\Delta r} (\Phi_{i-1,j-1} - \Phi_{i-1,j})$
$[\gamma, \frac{\pi}{2}]$	$-\Delta r \operatorname{ctg} \theta$	$-\Delta r$	$\Phi_* = \Phi_{i,j-1} + \frac{ z_* }{\Delta z} (\Phi_{i-1,j-1} - \Phi_{i,j-1})$
$[\frac{\pi}{2}, \pi-\gamma]$	$-\Delta r \operatorname{ctg} \theta$	$-\Delta r$	$\Phi_* = \Phi_{i,j-1} + \frac{ z_* }{\Delta z} (\Phi_{i+1,j-1} - \Phi_{i,j-1})$
$[\pi-\gamma, \pi]$	Δz	$\Delta z \operatorname{tg} \theta$	$\Phi_* = \Phi_{i+1,j} + \frac{ r_* }{\Delta r} (\Phi_{i+1,j-1} - \Phi_{i+1,j})$

Тестовый пример

Рассмотрим следующую конвективно-диффузионную задачу:

$$U \frac{\partial \Phi}{\partial z} + V \frac{\partial \Phi}{\partial r} = D \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right), \quad (2)$$

$$\Phi|_{\Gamma_i} = \Phi_i, \text{ где } i = \overline{1, 4}; \quad \{\Gamma_i\} - \text{прямоугольник.} \quad (3)$$

Аппроксимируя конвективные члены в (2) по способу (1), а диффузионные члены с использованием центральных разностей, получим следующий разностный аналог рассматриваемого уравнения переноса:

$$V_{i,j} \frac{\Phi_{i,j} - \Phi_*}{\Delta s} = D \left(\frac{\Phi_{i+1,j} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i-1,j}}{\Delta z^2} + \frac{\Phi_{i,j+1} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i,j-1}}{\Delta r^2} + \frac{1}{r_j} \frac{\Phi_{i,j+1} - 2\Phi_{i,j-1}}{2\Delta r} \right). \quad (4)$$

Выражая из последнего соотношения $\Phi_{i,j}$, найдем рекуррентную формулу для перерасчета значений искомой сеточной функции во всех внутренних углах прямоугольной сетки:

$$\Phi_{i,j} = \left[\frac{V_{i,j} \Phi_*}{\Delta s} + D \left(\frac{\Phi_{i+1,j} + \Phi_{i-1,j}}{\Delta z^2} + \frac{\Phi_{i,j+1} + \Phi_{i,j-1}}{\Delta r^2} + \frac{1}{r_j} \frac{\Phi_{i,j+1} - 2\Phi_{i,j-1}}{2\Delta r} \right) \right] / \left(\frac{V_{i,j}}{\Delta s} + \frac{2D}{\Delta z^2} + \frac{2D}{\Delta r^2} \right). \quad (5)$$

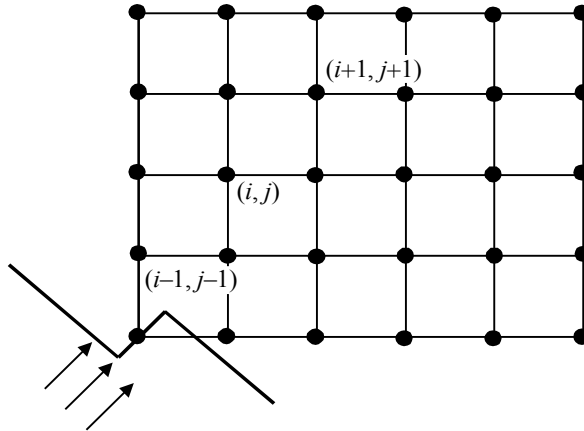


Рис. 2. Фрагмент разностной сетки с направлением потока под углом 45° и ступенчатым изменением Φ

Как следует из второго пункта сформулированных выше положений, схемная диффузия будет максимальной при $\theta = 45^\circ$. Пусть $D = 0$, $\Delta z = \Delta r$ и поток будет направлен по диагонали к разностной ячейке. Покажем, что в этом случае ступенчатый характер распределения Φ не изменится при итерационном применении схе-

мы (5). Полагая в (5) $D = 0$, получим

$$\Phi_{i,j} = \Phi_*,$$

но при $\gamma = \theta = 45^\circ$ и $\Delta z = \Delta r$ из таблицы 1 имеем

$$\Phi_* = \Phi_{i-1,j-1}.$$

Тогда окончательно результатом применения (5) будет

$$\Phi_{i,j} = \Phi_{i-1,j-1}. \quad (6)$$

Таким образом, вместо рекуррентной формулы для перерасчета значений искомой функции в центральной точке шаблона получим формулу явного определения $\Phi_{i,j}$ через значение этой же функции в ближайшем узле с наветренной стороны. Как видно из (6), в этом случае ступенчатый профиль Φ , который мы имели на входе в расчетную область, останется неизменным, что говорит об отсутствии схемной или искусственной диффузии.

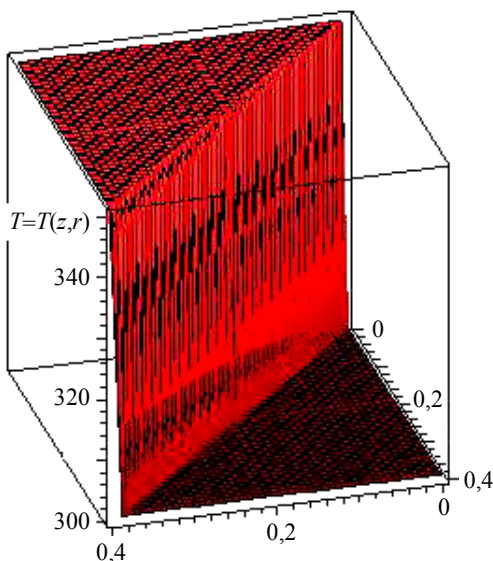


Рис. 3. Ступенчатый профиль температуры в однородном потоке, полученный с использованием рекуррентной формулы (5)

На рис. 3 показаны расчетные распределения температуры $\Phi = T$, полученные по формуле (5) при $D = a = 0$ (a – коэффициент температуропроводности среды) в однородном поле скорости, для которого $U \equiv 1$, $V \equiv 1$ (м/с). При этом на левой и верхней границах прямоугольника области определения температура была 350 К, а на правой и нижней – 350 К. Как видно из рисунка, профиль температуры остается ступенчатым, причем этот результат получается уже после первой глобальной итерации. Кроме того, если пролонгировать результат применения (5) к узлам верхней и правой границ прямоугольника, то получим полное распределение температуры без задания граничных условий на этих участках.

Заключение

В рамках (ψ, ξ, W, T) -описания динамики вязкой среды предложена простейшая технология минимизации численной диффузии, которая хорошо сочетается с методом простой итерации, применяемым для решения систем эллиптических уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984. 152 с.
2. De Vahl Davis G. and Mallinson G.D. False Diffusion in Numerical Fluid Mechanics / Univ. of New South Wales, School of Mech. and Ind. Eng. Sydney, 1972.
3. Raithby G.D. Skew upstream differencing schemes for problems involving fluid flow // Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1976. V. 9. No. 2. P. 153–164.
4. Бубенчиков М.А., Иванова И.А. Расчет аэродинамики циклонной камеры // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2011. № 1 (13). С. 67–73.

Статья поступила 29.03.2011 г.

Bubenchikov M. A. METHOD FOR MINIMIZING THE CIRCUIT DIFFUSION IN THE NUMERICAL MODEL OF AERODYNAMICS. Through linearization of the trajectory of a fluid particle on a fragment corresponding to a difference cell, and as a result of natural variables associated with the trajectory of particles, as well as the use of the differences against the flow, the convective terms were approximated with minimization of the circuit or artificial diffusion. The test calculations confirm this result. It is shown that the proposed computational technique is suitable for use in conjunction with the method of simple iteration.

Keywords: convection-diffusion problem, natural variables, differences against the flow, method of simple iteration, minimization of the circuit or artificial diffusion.

BUBENCHIKOV Mikhail Alekseevich (Tomsk State University)

E-mail: michael121@mail.ru