УДК 512.1; 517.53; 519.6

Ю.А. Несмеев

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ 3-й И 4-й СТЕПЕНЕЙ

Предлагаются теоретически обоснованные таблицы, позволяющие пользователю находить корни алгебраических уравнения 3-й и 4-й степеней без непосредственного использования аналитических или численных методов решения. Доказывается, что известный способ решения уравнения 4-й степени имеет в применении ограничение, не указанное в известном справочнике .

Ключевые слова: *уравнение*, *решение*, *таблица.*

Развитие механики и её применение к решению инженерных задач сопровождаются поиском корней алгебраических уравнений 3-й и 4-й степеней. К одному из таких уравнений, например, пришёл С.А. Чаплыгин [1, с. 111] при разработке первой законченной теоретической схемы обтекания крыла (уравнение Чаплыгина). Такие уравнения могут использоваться в инженерных расчётах для обеспечения устойчивости и определения допустимых колебаний упругих систем, например при проектировании процесса прокатки [2, с. 77].

Для нахождения корней алгебраических уравнений 3-й и 4-й степеней инженер-проектировщик (инженер) может использовать аналитические и численные методы или системы компьютерной математики (MathCAD, Maple, …). Однако ему естественнее использовать не эти средства, а таблицы, позволяющие ему оперативно и самостоятельно находить корни с помощью простейших компьютерных программ. Однако в настоящее время такие таблицы отсутствуют даже в популярных справочниках [3 – 7], а инженер заинтересован в их разработке. Лучшие варианты таких таблиц, в случае их разработки, не должны заставлять инженера выполнять следующие действия, изложенные в существующих справочниках в связи с описанием способов нахождения корней уравнений 3-й и 4-й степеней: извлечение кубических корней из комплексных чисел, приведение исходного уравнения к специальному виду, проверка корней вспомогательных квадратных уравнений на предмет их идентификации как корней исходного уравнения 4-й степени, решение тригонометрических уравнений, использование численных методов, использование элементарных методов решения алгебраических уравнений. Разработке таблиц, удовлетворяющих этому требованию, посвящена данная работа.

В работе предлагаются теоретически обоснованные табл. 1 и табл. 2.

В основу табл.1 положены результаты усовершенствования известной таблицы [5, с. 22] для решения уравнений 3-й степени. Таблица из [5] рассчитана на уравнение специального вида, требует решения вспомогательных тригонометрических уравнений, не охватывает всех случаев значений коэффициентов исходного уравнения. Табл. 2 является результатом развития известного способа [7, с. 27] сведения решения уравнения 4-й степени к решению вспомогательного уравнения 3-й степени и одной пары вспомогательных квадратных уравнений, который, как устанавливается в данной работе, требует проверки корней вспомогательных квадратных уравнений на предмет их идентификации как корней исходного уравнения 4-й степени.

Табл. 1 рассчитана на уравнение 3-й степени

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0. \tag{1}$$

В ней величины p и q выражаются через коэффициенты уравнения с помощью соотношений

$$p=9^{-1}a^{-2}(3ac - b^2),$$
$$q=27^{-1}a^{-3}b^3 - 6^{-1}a^{-2}bc + 2^{-1}a^{-1}d. \tag{2}$$

В табл. 1 приведены отсутствующие в справочниках формулы для вычисления корней и использованы такие формулы для вычисления значения величины φ, которые выведены из соотношений, представленных в [5], и в литературе отсутствуют. Справедливость формул для корней вытекает из совпадения результатов преобразования выражения $a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ с левой частью уравнения (1) для всех случаев значений величин p и q.

Таблица 1

Случаи		r	s	φ	Корни
1	p=0, q=0				$x_1=-3^{-1}ba^{-1}$ $x_2=-3^{-1}ba^{-1}$ $x_3=-3^{-1}ba^{-1}$
2	p=0, q>0				$x_1=-\exp(3^{-1}\ln(2q))-3^{-1}ba^{-1}$ $x_2=\{2^{-1}\exp(3^{-1}\ln(2q))-3^{-1}ba^{-1}\}+$ $+i\{3^{1/2}2^{-1}\exp(3^{-1}\ln(2q))\}$ $x_3=\{2^{-1}\exp(3^{-1}\ln(2q))-3^{-1}ba^{-1}\}-$ $-i\{3^{1/2}2^{-1}\exp(3^{-1}\ln(2q))\}$
3	p=0, q<0				$x_1=\exp(3^{-1}\ln(\|2q\|))-3^{-1}ba^{-1}$ $x_2=\{-2^{-1}\exp(3^{-1}\ln(\|2q\|))-3^{-1}ba^{-1}\}+$ $+i\{3^{1/2}2^{-1}\exp(3^{-1}\ln(\|2q\|))\}$ $x_3=\{-2^{-1}\exp(3^{-1}\ln(\|2q\|))-3^{-1}ba^{-1}\}-$ $-i\{3^{1/2}2^{-1}\exp(3^{-1}\ln(\|2q\|))\}$
4	p>0, q=0				$x_1=-3^{-1}ba^{-1}$ $x_2=-3^{-1}ba^{-1}+i(3p)^{1/2}$ $x_3=-3^{-1}ba^{-1}-i(3p)^{1/2}$
5	p<0, q=0				$x_1=-3^{-1}ba^{-1}$ $x_2=(3\|p\|)^{1/2}-3^{-1}ba^{-1}$ $x_3=-(3\|p\|)^{1/2}-3^{-1}ba^{-1}$
6	$p\neq0$, $q\neq0$, $p<0$, $q^2+p^3\leq0$	$r=\|p\|^{1/2}$, если $q>0$; $r=-\|p\|^{1/2}$, если $q<0$	q/r^3	$\mathrm{arctg}[(1-s^2)^{1/2}/s]$	$x_1=-2r\cos(\varphi/3)-3^{-1}ba^{-1}$ $x_2=2r\cos(\pi/3-\varphi/3)-3^{-1}ba^{-1}$ $x_3=2r\cos(\pi/3+\varphi/3)-3^{-1}ba^{-1}$
7	$p\neq0$, $q\neq0$, $p<0$, $q^2+p^3>0$	$r=\|p\|^{1/2}$, если $q>0$; $r=-\|p\|^{1/2}$, если $q<0$	q/r^3	$\ln[s+(s^2-1)^{1/2}]$	$x_1=-2r\,\mathrm{ch}(\varphi/3)-3^{-1}ba^{-1}$ $x_2=r\,\mathrm{ch}(\varphi/3)-3^{-1}ba^{-1}+i3^{1/2}r\,\mathrm{sh}(\varphi/3)$ $x_3=r\,\mathrm{ch}(\varphi/3)-3^{-1}ba^{-1}-i3^{1/2}r\,\mathrm{sh}(\varphi/3)$
8	$p\neq0$, $q\neq0$, $p>0$	$r=\|p\|^{1/2}$, если $q>0$; $r=-\|p\|^{1/2}$, если $q<0$	q/r^3	$\ln[s+(s^2+1)^{1/2}]$	$x_1=-2r\,\mathrm{sh}(\varphi/3)-3^{-1}ba^{-1}$ $x_2=r\,\mathrm{sh}(\varphi/3)-3^{-1}ba^{-1}+i3^{1/2}r\,\mathrm{ch}(\varphi/3)$ $x_3=r\,\mathrm{sh}(\varphi/3)-3^{-1}ba^{-1}-i3^{1/2}r\,\mathrm{ch}(\varphi/3)$

В [7] речь идёт о вычислении корней уравнения 4-й степени

$$z^4 + a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0 = 0. \quad (3)$$

с помощью действительного корня u_1 вспомогательного уравнения 3-й степени

$$u^3 - a_2u^2 + (a_1a_3 - 4a_0)u - (a_1^2 + a_0a_3^2 - 4a_0a_2) = 0 \quad (4)$$

и пары квадратных уравнений

$$\nu^2 + [a_3/2 + (a_3^2/4 + u_1 - a_2)^{1/2}]\nu + u_1/2 + [(u_1/2)^2 - a_0]^{1/2} = 0, \quad (5.1)$$

$$\nu^2 + [a_3/2 - (a_3^2/4 + u_1 - a_2)^{1/2}]\nu + u_1/2 - [(u_1/2)^2 - a_0]^{1/2} = 0. \quad (5.2)$$

В [7] сообщается, что эти уравнения дают четыре корня уравнения (3), но не сообщается о невыполнении этого свойства для каких-либо уравнений 4-й степени с числовыми коэффициентами. Однако невыполнение этого свойства, например, имеет место для уравнения Чаплыгина

$$x^4 - 2{,}377524922x^3 + 6{,}073505741x^2 - 11{,}179380230x + 9{,}052655259 = 0.$$

Действительно, привлечение к решению уравнения Чаплыгина уравнения (4) и пары (5) даёт корень $u_1 = -8{,}081892$ и уравнения

$$v^2 + 33{,}485299v + 0{,}044013 = 0,$$

$$v^2 + 0{,}181367v - 8{,}125907 = 0.$$

Однако ни одно из этих квадратных уравнений не имеет комплексных корней, в то время как уравнение Чаплыгина имеет комплексные корни.

Существование ограничения на применимость свойства, сформулированного в [7], следует уже из того, что в результате перемножения левых частей уравнений пары (5) при выполнении условий $a_3^2/4+u_1 - a_2>0$, $(u_1/2)^2 - a_0>0$, $a_3u_1 - 2a_1<0$ получается такой многочлен, у которого коэффициент при первой степени переменной не равен коэффициенту a_1.

Табл. 2 рассчитана на уравнение (3) и использование вспомогательного уравнения (4). В ней величины d_1 и d_2 вычисляются по формулам

$$d_1 = a_3^2/4 + u_1 - a_2; \quad (6.1)$$

$$d_2 = (u_1/2)^2 - a_0. \quad (6.2)$$

Таблица 2

Случаи и их варианты		Пара квадратных уравнений
1	$d_1>0$, $d_2>0$, $a_3u_1 - 2a_1\geq0$; $d_1=0$, $d_2>0$; $d_2=0$, $d_1>0$; $d_1=0$, $d_2=0$	$\nu^2+(a_3/2+\lvert d_1\rvert^{1/2})\nu +u_1/2+\lvert d_2\rvert^{1/2}=0$ $\nu^2+ (a_3/2 - \lvert d_1\rvert^{1/2})\nu +u_1/2 - \lvert d_2\rvert^{1/2}=0$
2	$d_1>0$, $d_2>0$, $a_3u_1 - 2a_1<0$; $d_1=0$, $d_2>0$; $d_2=0$, $d_1>0$; $d_1=0$, $d_2=0$	$\nu^2+(a_3/2+\lvert d_1\rvert^{1/2})\nu +u_1/2 - \lvert d_2\rvert^{1/2}=0$ $\nu^2+(a_3/2 - \lvert d_1\rvert^{1/2})\nu +u_1/2+\lvert d_2\rvert^{1/2}=0$
3	$d_1<0$, $d_2<0$, $a_3u_1 - 2a_1<0$; $d_1=0$, $d_2<0$; $d_2=0$, $d_1<0$; $d_1=0$, $d_2=0$	$\nu^2+(a_3/2+i\,\lvert d_1\rvert^{1/2})\nu+u_1/2+i\,\lvert d_2\rvert^{1/2}=0$ $\nu^2+(a_3/2 - i\,\lvert d_1\rvert^{1/2})\nu+u_1/2 - i\,\lvert d_2\rvert^{1/2}=0$
4	$d_1<0$, $d_2<0$, $a_3u_1 - 2a_1\geq0$; $d_1=0$, $d_2<0$; $d_2=0$, $d_1<0$; $d_1=0$, $d_2=0$	$\nu^2+(a_3/2+i\,\lvert d_1\rvert^{1/2})\nu+u_1/2 - i\,\lvert d_2\rvert^{1/2}=0$ $\nu^2+(a_3/2 - i\,\lvert d_1\rvert^{1/2})\nu+u_1/2+i\,\lvert d_2\rvert^{1/2}=0$

Табл. 2 предусматривает такие четыре случая значений параметров d_1, d_2, $a_3u_1 - 2a_1$ уравнения 4-й степени, каждый из которых имеет несколько вариантов. Каждый случай приводит к тем двум квадратным уравнениям, корни которых дают все корни исходного уравнения 4-й степени. Конкретный случай имеет место тогда, когда реализуется один из его вариантов. Вариантами являются представленные в табл. 2 системы соотношений, разделённые знаком «точка с запятой».

Если, например, удовлетворяется система неравенств $d_1 > 0$, $d_2 > 0$, $a_3u_1 - 2a_1 \geq 0$ (один из вариантов случая 1), то имеет место случай 1. Если, например, одновременно удовлетворяются неравенства $d_2=0$, $d_1>0$ (один из вариантов как случая 1, так и случая 2), то имеет место как случай 1, так и случай 2. Если одновременно удовлетворяются неравенства $d_1=0$, $d_2=0$ (один из вариантов каждого случая), то имеет место каждый случай. Первая пара квадратных уравнений с точностью до обозначений совпадает с парой квадратных уравнений из [7], если подкоренные выражения последней пары имеют неотрицательные значения. Другие пары квадратных уравнений предлагаются впервые.

Табл. 2 отражает связь между величинами d_1 и d_2, а также связи между величинами d_1, d_2, $a_3u_1 - 2a_1$ и корнями уравнения (3). Связи не имеют аналогов в литературе и приводятся ниже.

1. Величины d_1 и d_2 не могут принимать значения разных знаков.

2. Если $d_1>0$, $d_2>0$, $a_3u_1 - 2a_1\geq 0$, то корнями уравнения (3) являются корни квадратных уравнений

$$\nu^2 + (a_3/2 + |d_1|^{1/2})\nu + u_1/2 + |d_2|^{1/2} = 0,$$
$$\nu^2 + (a_3/2 - |d_1|^{1/2})\nu + u_1/2 - |d_2|^{1/2} = 0.$$

3. Если $d_1>0$, $d_2>0$, $a_3u_1 - 2a_1<0$, то корнями уравнения (3) являются корни квадратных уравнений

$$\nu^2 + (a_3/2 + |d_1|^{1/2})\nu + u_1/2 - |d_2|^{1/2} = 0,$$
$$\nu^2 + (a_3/2 - |d_1|^{1/2})\nu + u_1/2 + |d_2|^{1/2} = 0.$$

4. Если $d_1<0$, $d_2<0$, $a_3u_1 - 2a_1<0$, то корнями уравнения (3) являются корни квадратных уравнений

$$\nu^2 + (a_3/2 + i\,|d_1|^{1/2})\nu + u_1/2 + i\,|d_2|^{1/2} = 0,$$
$$\nu^2 + (a_3/2 - i\,|d_1|^{1/2})\nu + u_1/2 - i\,|d_2|^{1/2} = 0.$$

5. Если $d_1<0$, $d_2<0$, $a_3u_1 - 2a_1\geq 0$, то корнями уравнения (3) являются корни квадратных уравнений

$$\nu^2 + (a_3/2 + i\,|d_1|^{1/2})\nu + u_1/2 - i\,|d_2|^{1/2} = 0,$$
$$\nu^2 + (a_3/2 - i\,|d_1|^{1/2})\nu + u_1/2 + i\,|d_2|^{1/2} = 0.$$

6. Если $d_1 = 0$, $d_2 = 0$, то левая часть уравнения (3) является второй степенью квадратного трёхчлена

$$x^2 + (a_3/2)x + u_1/2.$$

7. Если $d_1 = 0$, $d_2>0$, то корнями уравнения (3) являются корни квадратных уравнений

$$\nu^2 + (a_3/2)\nu + u_1/2 + |d_2|^{1/2} = 0,$$
$$\nu^2 + (a_3/2)\nu + u_1/2 - |d_2|^{1/2} = 0.$$

8. Если $d_2 = 0$, $d_1>0$, то корнями уравнения (3) являются корни квадратных уравнений

$$\nu^2 + (a_3/2 + |d_1|^{1/2})\nu + u_1/2 = 0,$$
$$\nu^2 + (a_3/2 - |d_1|^{1/2})\nu + u_1/2 = 0.$$

9. Если $d_1 = 0$, $d_2<0$, то корнями уравнения (3) являются корни квадратных уравнений

$$\nu^2 + (a_3/2)\nu + u_1/2 + i|d_2|^{1/2} = 0,$$
$$\nu^2 + (a_3/2)\nu + u_1/2 - i|d_2|^{1/2} = 0.$$

10. Если $d_1 < 0$, $d_2 = 0$, то корнями уравнения (3) являются корни квадратных уравнений

$$\nu^2 + (a_3/2 + i\,|d_1|^{1/2})\nu + u_1/2 = 0,$$

$$\nu^2 + (a_3/2 - i\,|d_1|^{1/2})\nu + u_1/2 = 0.$$

Справедливость связи 1 следует из того, что при перемножении правых частей соотношений (6) получается величина, не принимающая отрицательных значений. Этой величиной служит квадратный трёхчлен

$$16^{-1}a_3^2\,u_1^2 - 4^{-1}a_1 a_3\,u_1 + 4^{-1}a_1^2\ .$$

Доказательство остальных связей сводится к доказательству того, что перемножение левых частей соответствующих квадратных уравнений приводит к такому многочлену, коэффициенты которого совпадают с коэффициентами уравнения (3). Доказательство использует равенства (4) и (6).

Таблицы, предлагаемые в работе, позволили составить достаточно простые программы на языке Турбо Паскаль [8] по нахождению корней уравнений 3-й и 4-й степеней со значениями коэффициентов в границах значений величины типа extended. Предлагаемые таблицы могут также использоваться в оперативных инженерных расчётах посредством микрокалькулятора.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чаплыгин С.А.* Избранные труды по механике и математике. М.: ГИТТЛ, 1954. 568 с.
2. *Выдрин В.И.*, *Сазонов В.В.* Крутильные автоколебания в главных линиях прокатных станов при прокатке с забоем валков // Обработка металлов давлением. Свердловск: Изд-во УПИ им. С.М. Кирова, 1986. С. 77–80.
3. *Математический* энциклопедический словарь. М.: Сов. энциклопедия, 1988. 847 с.
4. *Бронштейн И.Н.*, *Семендяев К.А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: Наука, 1964. 608 с.
5. *Янпольский А.Р.* Гиперболические функции. М.: Физматгиз, 1960. 196 с.
6. *Корн Г. и Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1970. 720 с.
7. *Справочник* по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами. М.: Наука, 1979. 832 с.
8. *Руководство* по программированию под управлением MS DOS. М.: Радио и связь, 1995. 544 с.

Статья принята в печать 25.10.2010 г.

Nesmeev Yu. A. AN APPROACH TO SOLUTION OF ALGEBRAIC EQUATIONS OF THE THIRD AND FOURTH DEGREES. Theoretically substantiated tables for the solution of algebraic equations of the third and fourth degrees are proposed. They do not require to apply an analytical or numerical method. It is shown that the known method for the solution of an algebraic equation of the fourth degree has a limitation not described in the known handbook.

Keywords: equation, solution, table.

NESMEEV Yurii Alekseevich (Magnitogorsk State Technical University)
E-mail: vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru