ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2011 Математика и механика № 1(13)

УДК 512.541

А.Р. Чехлов

О СКОБКЕ ЛИ ЭНДОМОРФИЗМОВ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП, 2*

Рассматриваются абелевы группы, в которых фиксированная степень всякого коммутатора эндоморфизмов равна нулю. Описаны группы с указанным выше свойством в ряде классов групп.

Ключевые слова: *вполне инвариантная подгруппа, кольцо эндоморфизмов, степенной E-коммутант, степенной E-коммутатор.*

Все группы в статье предполагаются абелевыми. Напомним, что если R – кольцо и $a,b \in R$, то элемент $[a,b] = ab - ba$ называется *коммутатором* (или *скобкой Ли*) элементов a и b. Если $a_1,\dots,a_n \in R$, то $[a_1,\dots,a_n] = [[a_1,\dots,a_{n-1}],a_n]$.

Продолжается исследование, начатое в [1]. Класс абелевых групп A со свойством $[\varphi,\psi]^n = 0$ для любых φ, ψ из кольца эндоморфизмов $E(A)$ обозначим через BL_n, а $\mathrm{BL}_n^* = \mathrm{BL}_n \setminus \mathrm{BL}_{n-1}$. В [1] изучались группы из класса BL_2. Ясно, что прямое слагаемое группы из класса BL_n также принадлежит BL_n. Отметим, что близкие классы групп изучались в [2 – 6].

Пусть A – абелева группа. Тогда $r(A)$ обозначает ее ранг, если не оговорено противное, то A_p – ее p-компонента, а $t(A)$ – периодическая часть. Если A – однородная группа без кручения, то $t(A)$ – ее тип. Запись $H \le A$ означает, что H – подгруппа в A; $H \le \mathrm{fi}\, A$, что H – вполне инвариантная подгруппа в A, т.е. $fH \subseteq H$ для каждого $f \in E(A)$. Если $f\colon A \to B$ – гомоморфизм, то $f\,|\,H$ – ограничение f на $H \subseteq A$. Если B, G – группы и $\varnothing \ne X \subseteq B$, то через $\mathrm{Hom}\,(B, G)X$ обозначим подгруппу в G, порожденную всеми подмножествами fX, где $f \in \mathrm{Hom}\,(B, G)$; $\mathrm{Hom}\,(B, G)B$ совпадает со следом группы B в G. Через 1_A обозначим тождественный автоморфизм группы A, через $o(a)$ – порядок элемента $a \in A$. $\mathbf{N}$ – множество всех натуральных чисел, $\mathbf{Q}$ – аддитивная группа всех рациональных чисел. $A^1 = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} nA$. Z_{p^∞} – квазициклическая p-группа, $\hat{Z}_p$ – группа целых p-адических чисел, Z_n – циклическая группа порядка n. Если $0 \ne A$ – ограниченная p-группа, то наименьшее натуральное m со свойством $p^m A = 0$ называется *экспонентой* группы A и обозначается через $e(A)$. Подгруппа G группы A называется *чистой*, если $nG = G \cap nA$ для каждого $n \in \mathbf{N}$.

Подгруппу $A' = \langle [\varphi,\psi]A \mid \varphi,\psi \in E(A)\rangle$ назовем E-*коммутантом* группы A. Определим по индукции $A^{(0)} = A$, $A^{(1)} = A', \dots, A^{(n+1)} = (A^{(n)})' = \langle [\varphi,\psi]A^{(n)} \mid \varphi,\psi \in E(A)\rangle$ и $A^{(\alpha)} = \bigcap_{\rho<\alpha} A^{(\rho)}$ при предельном ординале α. Как отмечалось в [2], все $A^{(\rho)}$ вполне инвариантны в A.

Подгруппу $H \le A$ назовем *коммутаторно инвариантной* (кратко ci-*подгруппой*), если $[\xi,\eta]H \subseteq H$ для любых $\xi,\eta \in E(A)$ [2, 6]. Отметим, что в [7 – 10] автор изучал проективно инвариантные подгруппы.

* Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 – 2013 годы. Государственный контракт П 937 от 20 августа 2009 г.

Если все эндоморфизмы подгруппы G группы A продолжаются до эндоморфизмов самой группы A, то считаем, что $G^{(n)} \subseteq A^{(n)}$.

Лемма 1. *Пусть* $A = \oplus_{i \in I} A_i$, *где* $|I| > 1$, *и* $G_i = \oplus_{j \in I\setminus\{i\}} A_j$.

1. $A^{(n)} = \oplus_{i \in I}(A^{(n)} \cap A_i)$ *для каждого* $n \in \mathbf{N}$.
2. $A^{(n)} = F$, *где* $F = \langle \mathrm{Hom}\,(A_i, G_i)(A^{(n-1)} \cap A_i), \mathrm{Hom}\,(G_i, A_i)(A^{(n-1)} \cap G_i), A_i^{(n)}, G_i^{(n)} \rangle$.
3. $\varphi(A^{(n)} \cap A_i) \subseteq \oplus_{j \in I\setminus\{i\}} (A^{(n+1)} \cap A_j)$ *для любого* $\varphi \in \mathrm{Hom}\,(A_i, \oplus_{j \in I\setminus\{i\}} A_j)$.
4. *Следующие условия эквивалентны*:

а) $A^{(n)} = \oplus_{i \in I} A_i^{(n)}$;
б) $\mathrm{Hom}\,(A_i, A_j)(A^{(n-1)} \cap A_i) \subseteq A_j^{(n)}$ *для каждого* $i \in I$ *и всякого* $j \in I \setminus \{i\}$.

Доказательство. П. 1 вытекает из вполне инвариантности $A^{(n)}$. 2. Пусть $\pi: A \to A_i$, $\theta: A \to G_i$ – проекции, $f \in \mathrm{Hom}\,(A_i, G_i)$ и $a \in A^{(n-1)} \cap A_i$. Тогда если $\varphi \in E(A)$ – такой, что $\varphi|A_i = f$, $\varphi|G_i = 1_{G_i}$, то $[\theta,\varphi]a = fa$. Это доказывает, что $\mathrm{Hom}\,(A_i, G_i)(A^{(n-1)} \cap A_i) \subseteq A^{(n)}$. Аналогично $\mathrm{Hom}\,(G_i, A_i)(A^{(n-1)} \cap G_i) \subseteq A^{(n)}$. Поэтому $F \subseteq A^{(n)}$. В частности, из проведенных рассуждений следует справедливость п. 3.

Осталось показать обратное включение. Пусть $\xi, \eta \in E(A)$ и $z \in A^{(n-1)}$. Имеем $z = x + y$, где $x \in A^{(n-1)} \cap A_i$, $y \in A^{(n-1)} \cap G_i$. Далее

$$[\xi,\eta]x = [(\pi + \theta)\xi,(\pi + \theta)\eta]x =$$
$$= [\pi\xi,\pi\eta]x + (\pi\xi\theta\eta - \pi\eta\theta\xi)x + (\theta\xi\pi\eta + \theta\xi\theta\eta - \theta\eta\pi\xi - \theta\eta\theta\xi)x.$$

Здесь $[\pi\xi,\pi\eta]x \in A_i^{(n)}$, второе слагаемое принадлежит $\mathrm{Hom}\,(G_i, A_i)(A^{(n-1)} \cap G_i)$, а третье – $\mathrm{Hom}\,(A_i, G_i)(A^{(n-1)} \cap A_i)$. Поэтому $x \in F$ и, аналогично, $y \in F$, значит, $A^{(n)} \subseteq F$. П. 4 вытекает из пп. 1 – 3.

Отметим, что возможен случай, когда $A' = \oplus A_i'$, но $A'' \neq \oplus A_i''$. Действительно, пусть $o(a) = p$, $o(b) = p^2$, $o(c) = o(d) = p$ и $A = (\langle a \rangle \oplus \langle b \rangle) \oplus (\langle c \rangle \oplus \langle d \rangle)$. Тогда

$$A' = A[p] = (\langle a \rangle \oplus \langle pb \rangle) \oplus (\langle c \rangle \oplus \langle d \rangle) = (\langle a \rangle \oplus \langle b \rangle)' \oplus (\langle c \rangle \oplus \langle d \rangle)'.$$

Однако $$A'' = A[p] \neq (\langle a \rangle \oplus \langle b \rangle)'' \oplus (\langle c \rangle \oplus \langle d \rangle)'' = \langle pb \rangle \oplus (\langle c \rangle \oplus \langle d \rangle).$$

Обозначим через $A_{(n)}$ следующую подгруппу $\langle [\varphi,\psi]^n A \mid \varphi,\psi \in E(A) \rangle$ (*n-й степенной* E-*коммутант*). Ясно, что $A_{(n)} \subseteq A^{(n)}$ ($A_{(0)} = A^{(0)} = A$). Элемент $[\varphi,\psi]^n a$ будем называть *n-м степенным* E-*коммутатором* (соответствующий эндоморфизмам φ и ψ). Если $H \subseteq A$, то подгруппу $\langle [\varphi,\psi]^n H \mid \varphi,\psi \in E(A) \rangle$ обозначим через $[A,H]_{(n)}$.

Группа A называется E-*разрешимой класса* $\leq n$, если $A^{(n)} = 0$. Как показывает следующий пример классы BL_n и E-разрешимых групп класса $\leq n$ различны.

Пример. Пусть $\mathbf{Z}[i] = \{m + ki \mid m,k \in \mathbf{Z}\}$ – кольцо целых гауссовых чисел. Рассмотрим кольцо $K = (\mathbf{Z}[i])[x_1,\ldots,x_m,\ldots;\, ^{-}\,]$ комлексно-косых многочленов от переменных $x_1,\ldots,x_m,\ldots$ с коэффициентами из $\mathbf{Z}[i]$, для которых выполняются равенства $x_i a = \bar{a} x_i$, где $\bar{a}$ – комплексное число, сопряженное с a.

Пусть теперь $K_n = K/J$, где J – идеал, порожденный элементами $x_1^n,\ldots,x_m^n,\ldots$, а n – фиксированное натуральное число. Тогда $[f,g]^n = 0$ для любых $f,g \in K_n$. Аддитивная группа K_n^+ кольца K_n является счетной редуцированной группой без кручения, поэтому по теореме Корнера [11, теорема 110.1] существует группа A, кольцо эндоморфизмов которой изоморфно K_n. Тогда $A \in \mathrm{BL}_n$, но A не является E-разрешимой группой, поскольку для каждого ненулевого коммутатора $[f,g] \in K_n$ найдутся коммутаторы $[]_1,\ldots,[]_m$ со свойством $[f,g][]_1\ldots[]_m \neq 0$ ($m \in \mathbf{N}$). В частности, $0 = A_{(n)} \neq A^{(n)}$. Так как $[x_k,\underbrace{i,\ldots,i}_{m}] = (-2i)^m x_k \neq 0$, то A не является и E-энгелевой группой.

Лемма 2. *Пусть B – прямое слагаемое группы A с дополнительным прямым слагаемым G.*

1. $\mathrm{Hom}\,((B,G)B_{(m)})$, $[G, \mathrm{Hom}\,(B,G)B]_{(m)} \subseteq A_{(m+1)}$ *для каждого* $m \in \mathbf{N}$.

2. *Если* $A \in \mathrm{BL}_n$, *то* $\sum_{i=0}^{n-1}[\varphi,\psi]^i\rho[\xi,\eta]^{n-i-1} = 0$ *для любых* $\varphi,\psi \in E(G)$, $\xi,\eta \in E(B)$ *и* $\rho \in \mathrm{Hom}\,(B,G)$.

3. *Если* $G \leq \mathrm{fi}\,A$, $B,G \in \mathrm{BL}_n$ *и для* A *выполняется свойство, указанное в п.* 2, *то* $A \in \mathrm{BL}_n$.

4. *Если* $B \in \mathrm{BL}_s$, $G \in \mathrm{BL}_t$ *и* $G \leq \mathrm{fi}\,A$, *то* $A = B\oplus G \in \mathrm{BL}_{s+t}$.

5. *Если существуют эпиморфизмы* $\varphi\colon B\to G$, $\varphi\colon G\to B$, *то для каждого* $n \in \mathbf{N}$ *любой элемент группы* A *является* n*-м степенным* E*-коммутатором. В частности,* $A_{(n)} = A$.

Доказательство. 1. Пусть $\xi,\eta \in E(B)$, $\alpha,\beta \in E(G)$ и $\rho \in \mathrm{Hom}\,(B,G)$; продолжим их до эндоморфизмов группы A, полагая $\xi,\eta,\rho|_G = 0$ и $\alpha,\beta|_B = 0$. Тогда если $\overline{\xi} = \xi + \rho$, $\overline{\eta} = \eta + \rho$, то $[\overline{\xi},\overline{\eta}]b = [\xi,\eta]b + \rho(\eta - \xi)b$. Откуда $[\overline{\xi},\overline{\eta}]^{m+1}b = [\xi,\eta]^{m+1}b + \rho(\eta - \xi)[\xi,\eta]^m b$. Значит, $\rho(\eta - \xi)[\xi,\eta]^m b \in A_{(m+1)}$. Если вместо η взять $\eta' = \eta + 1_B$ $(\eta'|_G = 0)$, то ввиду равенства $[\xi,\eta'] = [\xi,\eta]$ получаем $\rho[\xi,\eta]^m b + \rho(\eta - \xi)[\xi,\eta]^m b \in A_{(m+1)}$. Откуда $\rho[\xi,\eta]^m b \in A_{(m+1)}$. Следовательно, $\mathrm{Hom}\,(B,G)B]_{(m)} \subseteq A_{(m+1)}$. Если $\overline{\alpha} = \alpha + \rho$, $\overline{\beta} = \beta + \rho$, то $[\overline{\alpha},\overline{\beta}]b = (\alpha - \beta)\rho b$. Откуда $[\overline{\alpha},\overline{\beta}]^{m+1}b = [\alpha,\beta]^m(\alpha - \beta)\rho b$. Взяв $\alpha' = \alpha + 1_G$, как и выше, получим $[\alpha,\beta]^m\rho b \in A_{(m+1)}$, что доказывает включение $[G, \mathrm{Hom}\,(B,G)B]_{(m)} \subseteq A_{(m+1)}$.

2. Возьмем эндоморфизм α группы A вида $\alpha = \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ \rho & \varphi \end{pmatrix}$, где $\xi \in E(B)$, $\rho \in \mathrm{Hom}\,(B,G)$, $\varphi \in E(G)$. Тогда если $\beta = \begin{pmatrix} \eta & 0 \\ \sigma & \psi \end{pmatrix}$, то

$$[\alpha,\beta] = \begin{pmatrix} [\xi,\eta] & 0 \\ \rho\eta + \varphi\sigma - \sigma\xi - \psi\rho & [\varphi,\psi] \end{pmatrix}.$$

Откуда

$$[\alpha,\beta]^n = \begin{pmatrix} [\xi,\eta]^n & 0 \\ \sum_{i=0}^{n-1}[\varphi,\psi]^i(\rho\eta + \varphi\sigma - \sigma\xi - \psi\rho)[\xi,\eta]^{n-1-i} & [\varphi,\psi]^n \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Так как $A \in \mathrm{BL}_n$, то при $\sigma = 0$ имеем $\sum_{i=0}^{n-1}[\varphi,\psi]^i(\rho\eta - \psi\rho)[\xi,\eta]^{n-1-i} = 0$. Взяв $\eta' = \eta + 1_B$ $(\eta'|_G = 0)$, окончательно получаем $\sum_{i=0}^{n-1}[\varphi,\psi]^i\rho[\xi,\eta]^{n-1-i} = 0$.

3. Если $G \leq \mathrm{fi}\,A$, то все эндоморфизмы α группы A имеют вид, указанный в доказательстве п. 2. Тогда согласно (1) $[\alpha,\beta]^n = 0$; значит, $A \in \mathrm{BL}_n$. Если к тому же $B \in \mathrm{BL}_s$, $G \in \mathrm{BL}_t$, то $[\alpha,\beta]^{s+t} = 0$ поскольку в (1) $[\xi,\eta]^{s+t} = 0$, $[\varphi,\psi]^{s+t} = 0$, а в $\sum_{i=0}^{s+t-1}[\varphi,\psi]^i(\rho\eta + \varphi\sigma - \sigma\xi - \psi\rho)[\xi,\eta]^{s+t-1-i}$ каждое слагаемое равно нулю из-за обращения в ноль соответствующей степени $[\varphi,\psi]^i$ или $[\xi,\eta]^{s+t-1-i}$, что доказывает 4.

5. Как и в п. 1 считаем, что $\varphi,\psi \in E(A)$. Для любых $b \in B$, $g \in G$ и каждого фиксированного n найдутся такие $x_n \in B$, $y_n \in G$, что $(\psi\varphi)^n x_n = b$, $(\varphi\psi)^n(-1)^n y_n = g$.

Имеем

$$[\psi,\varphi]^n(x_n + (-1)^n y_n) = ((\psi\varphi)^n + (-\varphi\psi)^n)(x_n + (-1)^n y_n) =$$
$$= (\psi\varphi)^n x_n + (-1)^{2n}(\varphi\psi)^n y_n = b + g.$$

Пусть дано семейство $\{A_i\}_{i\in I}$, $|I|>1$, групп с коммутативными кольцами $E(A_i)$. Будем говорить, что упорядоченный набор $\{A_{i_1},\ldots,A_{i_{n+1}}\}$ групп $A_{i_j}\in\{A_i\}$ удовлетворяет условию (∗), если

$$\mathrm{Hom}(A_{i_n},A_{i_{n+1}})(\ldots(\mathrm{Hom}(A_{i_2},A_{i_3})(\mathrm{Hom}(A_{i_1},A_{i_2})A_{i_1}))\ldots)\neq 0.$$

Число n будем называть *длиной* набора $\{A_{i_1},\ldots,A_{i_{n+1}}\}$. Если n – максимальная длина любого конечного набора с условием (∗), состоящего из групп семейства $\{A_i\}_{i\in I}$, то будем говорить, что данное семейство удовлетворяет *условию n-максимальности.*

Предложение 3. *Пусть каждый элемент группы A содержится в некотором ее прямом слагаемом, являющемся прямой суммой таких групп* $\{A_i\}$, *что все кольца* $E(A_i)$ *коммутативны и если* $\mathrm{Hom}\,(A_i,A_j)\neq 0$, *то* $\mathrm{Hom}\,(A_j,A_i)=0$ $(i\neq j)$. *Группа* $A\in \mathrm{BL}_{n+1}$ *тогда и только тогда, когда каждое указанное выше семейство* $\{A_i\}$ *удовлетворяет условию n-максимальности.*

Доказательство. Пусть $a\in A_{i^{(1)}}$, где $A_{i^{(1)}}$ принадлежит некоторому семейству $\{A_i\}$, $A=A_{i^{(1)}}\oplus G$, G – дополнительное к $A_{i^{(1)}}$ прямое слагаемое, $\pi: A\to A_{i^{(1)}}$ и $\theta: A\to G$ – проекции. Если $\xi,\eta\in E(A)$, то $[\xi,\eta]a=[(\pi+\theta)\xi,(\pi+\theta)\eta]a=$ $=(\theta\xi\pi\eta+\theta\xi\theta\eta-\theta\eta\pi\xi-\theta\eta\theta\xi)a$; учтено, что $[\pi\xi,\pi\eta]a=0$ и $\pi\xi\theta\eta=0$, $\pi\eta\theta\xi=0$. Поэтому $[\xi,\eta]a\in\mathrm{Hom}(A_{i^{(1)}},G)=\sum_{i^{(2)}\neq i^{(1)}}\mathrm{Hom}(A_{i^{(1)}},A_{i^{(2)}})A_{i^{(1)}}\subseteq A_{(1)}$, где суммирование ведется по такому набору указанных в условии прямых слагаемых $A_{i^{(2)}}$, что $A_{i^{(2)}}\subseteq G$ и $\mathrm{Hom}(A_{i^{(1)}},A_{i^{(2)}})\neq 0$. Откуда

$$[\xi,\eta]^n a\in \sum_{i^{(n+1)}\notin\{i^{(m)}\,|\,1\le m\le n\}}\mathrm{Hom}(A_{i^{(n)}},A_{i^{(n+1)}})(\ldots(\mathrm{Hom}(A_{i^{(2)}},A_{i^{(3)}})(\mathrm{Hom}(A_{i^{(1)}},A_{i^{(2)}})A_{i^{(1)}}))\ldots)=F.$$

По условию $\rho F=0$ для любого $\rho\in\mathrm{Hom}(A_{i^{(n)}},A_{i^{(n+1)}})$. Поэтому $[\xi,\eta]^{n+1}a=0$. Значит, $[\xi,\eta]^{n+1}=0$.

Из лемм 1, 2 и предложения 3 вытекает справедливость следующих утверждений:

I. *Если* $A=\oplus_{i\in I}A_i$, *где* $A_i\le \mathrm{fi}\,A$, *то* $A\in\mathrm{BL}_n$ *тогда и только тогда, когда* $A_i\in\mathrm{BL}_n$ *для каждого* $i\in I$.

II. *Для делимой группы* $D=t(D)\oplus D_0$ *следующие условия эквивалентны*:

а) $D\in\mathrm{BL}_n$ *для некоторого* $n\ge 2$;

б) $D\in\mathrm{BL}_2$;

в) *если* $D_p\neq 0$, *то* $D_p\cong Z_{p^\infty}$, *а если* $D_0\neq 0$, *то* $D_0\cong\mathbf{Q}$, *причем если* $t(D)=0$ *или* $D_0=0$, *то кольцо* $E(D)$ *коммутативно* (*т.е.* $D\in\mathrm{BL}_1$).

Делимая группа $D\in\mathrm{BL}_n$ *принадлежит* BL_2^* *тогда и только тогда, когда* $0\neq t(D)\neq D$.

III. *Если* $0\neq D$ – *делимая часть группы* A, $A=D\oplus B$, *то* $A\in\mathrm{BL}_n$ *тогда и только тогда, когда* $D\in\mathrm{BL}_2$, $B\in\mathrm{BL}_n$ *и выполнены следующие условия*:

а) *подгруппа* $B_{(n-1)}$ *периодична, причем* $(B_{(n-1)})_p=0$ *при* $D_p\neq 0$;

б) *если* $0\neq t(D)\neq D$, *то* $n\ge 2$ *и подгруппа* $B_{(n-2)}$ *периодична.*

Свойство вытекает из инъективности группы D: для всякого элемента $b \in B \setminus t(B)$ найдется гомоморфизм $\alpha: B \to D$ со свойством $\alpha b \neq 0$, причем если $D_0 \neq 0$, то α можно выбрать так, чтобы $\alpha b \in D_0$ и $\gamma\alpha b \neq 0$ для некоторого $\gamma \in \mathrm{Hom}(D_0, Z_{p^\infty})$, где p может быть любым простым.

IV. *Если $A \in \mathrm{BL}_n$ для некоторого n, то каждая ее ненулевая p-компонента A_p является коциклической группой либо (при $n \geq 2$) изоморфна группе вида $B_1 \oplus \ldots \oplus B_m \oplus B_0$, где $B_i = Z_{p^{k_i}}$, $k_1 < \ldots < k_m$ (при $m \geq 2$), а $B_0 = 0$ или $B_0 = Z_{p^\infty}$. Таким образом, $A = A_p \oplus E_{(p)}$ для некоторой подгруппы $E_{(p)} \subseteq A$, причем $(E_{(p)})_{(n-1)} \subseteq p^m E_{(p)}$, где $m = e(B_1 \oplus \ldots \oplus B_m)$. Нередуцированность A_p влечет периодичность $(E_{(p)})_{(n-1)}$.*

V. *Периодическая группа $A \in \mathrm{BL}_n$ тогда и только тогда, когда каждая ее p-компонента $A_p \in \mathrm{BL}_n$.*

Пусть $0 \neq D$ – делимая часть p-группы G, $G = C \oplus D$. Группа $G \in \mathrm{BL}_n$ тогда и только тогда, когда $D \cong Z_{p^\infty}$, а $C \in \mathrm{BL}_{n-1}$.

VI. *Пусть $A = B \oplus C$, где $B \cong Z_{p^k}$, $C \cong Z_{p^s}$ $(s > k)$. Тогда $A \in \mathrm{BL}_{2n+1}$, где n – наименьшее натуральное со свойством $ns \geq (n+1)k$, т.е. $n = k/(s-k)$, если это число целое и n совпадает с целой частью $[s/(s-k)]$ в противном случае.*

Действительно, пусть $B = \langle b \rangle$, $C = \langle c \rangle$, $\pi: A \to B$, $\theta: A \to C$ – проекции, $\varphi: C \to B$, $\rho: B \to C$ – такие гомоморфизмы, что $\varphi c = b$, $\rho b = p^{s-k}c$. Тогда $\mathrm{Ker}\varphi = \langle p^k b \rangle$. Пусть $\alpha = 1_B + \rho$, $\beta = 1_C + \varphi$ $(1_B, \rho|_C = 0$ и $1_C, \varphi|_B = 0)$. Тогда $\alpha\beta = \varphi + \rho\varphi$, $\beta\alpha = \rho + \varphi\rho$, $[\alpha,\beta] = \varphi - \rho + \rho\varphi - \varphi\rho$. Поэтому $[\alpha,\beta]c = \varphi c + \rho\varphi c$, $[\alpha,\beta]^2 c = -\rho\varphi c + (\rho\varphi)^2 c$, $[\alpha,\beta]^3 c = -\varphi\rho\varphi c + \varphi(\rho\varphi)^2 c - (\rho\varphi)^2 c + (\rho\varphi)^3 c, \ldots$ Имеем $\theta[\alpha,\beta]^{2n} c = (-1)^n (\rho\varphi)^n c + u$, где $u \in p^{(n+1)(s-k)}C$, поэтому если $(\rho\varphi)^n c \neq 0$, то $[\alpha,\beta]^{2n} \neq 0$. Далее, $\pi[\alpha,\beta]^{2n+1} c = (-1)^n (\varphi\rho)^n \varphi c + v$, где $v \in p^{(n+1)(s-k)}B$, поэтому $[\alpha,\beta]^{2n+1} \neq 0$ при $(\varphi\rho)^n \varphi c \neq 0$ и $[\alpha,\beta]^{2n+1} c = 0$, если $ns \geq (n+1)k$. Так как всякая композиция гомоморфизмов $B \to C \to B$ есть кратное $\varphi\rho$, а $C \to B \to C$ – кратное $\rho\varphi$ и $[\alpha,\beta]^m c = 0$ влечет $[\alpha,\beta]^m b = 0$, то указанное число n есть наибольшее среди индексов нильпотентности коммутаторов эндоморфизмов группы A.

В ряде работ изучались такие редуцированные смешанные группы A, что естественное вложение $\oplus_p A_p \to A$ продолжается до чистого вложения $\oplus_p A_p \to \prod_p A_p$. Такие группы называются sp-группами. Таким образом, для sp-группы A можно считать, что $\oplus_p A_p \subset A \subseteq \prod_p A_p$, причем A чиста в $\prod_p A_p$ (это равносильно делимости фактор-группы $A/(\oplus_p A_p)$). sp-группы являются частным случаем групп, рассматриваемых в следующем свойстве.

VII. *Пусть A – такая группа, что $A^1 = 0$ и A содержит плотную подгруппу $\oplus_{i \in I} A_i$, где $A_i \leq \mathrm{fi}\, A$ для каждого $i \in I$. Группа $A \in \mathrm{BL}_n$ тогда и только тогда, когда каждая $A_i \in \mathrm{BL}_n$.*

Действительно, если $\xi,\eta \in E(A)$, то $[\xi,\eta]^n A_i \subseteq A_i$ для каждой группы A_i, поэтому $[\xi,\eta]^n(\oplus A_i) = 0$. Но тогда $[\xi,\eta]^n A \subseteq A^1 = 0$.

VIII. *Пусть A – сепарабельная (векторная) группа без кручения, $\Omega(A)$ – множество типов всех ее прямых слагаемых ранга 1. Группа $A \in \mathrm{BL}_n$ тогда и только тогда, когда в A нет однородных прямых слагаемых ранга 2 и в $\Omega(A)$ все цепи линейно упорядоченных элементов имеют длину $\leq n-1$.*

Для сепарабельной группы это утверждение вытекает из предложения 3, а для векторной группы нужно воспользоваться следующими утверждениями: если $V = \prod_{i \in I} R_i$ и $W = \prod_{j \in J} S_j$ – векторные группы (R_i и S_j – группы ранга 1) и $\eta: V \to W$ – нетривиальный гомоморфизм, то $t(R_i) \leq t(S_j)$ для некоторых $i \in I$, $j \in J$ [11, лемма

96.1]; произвольное прямое слагаемое ранга 1 векторной группы $V = \prod_{i \in I} R_i$ изоморфно одной из групп R_i [11, предложение 96.2].

IX. *Для алгебраически компактной группы без кручения* A *следующие условия эквивалентны*:

а) $A \in \mathrm{BL}_n$ *для некоторого* $n \geq 2$;

б) $A \in \mathrm{BL}_2$;

в) $A = D \oplus B$, *где* $D = 0$ *или* $D \cong \mathbf{Q}$, *а* $B \cong \prod_{p \in \Pi} \hat{Z}_p$ *для некоторого множества* Π *простых чисел*, *причем если* $D = 0$, *то* $A \in \mathrm{BL}_1$.

X. *Если* $A \in \mathrm{BL}_n$ – *редуцированная копериодическая группа*, *то* A *алгебраически компактна*, $A = \prod_{p \in \Pi} A_p$, *где* Π – *некоторое множество простых чисел*, A_p – *p-адическая компонента группы* A, $A_p = B_p \oplus C_p$, $A_p \in \mathrm{BL}_n$, *причем* $C_p = 0$ *или* $C_p \cong \hat{Z}_p$, B_p – *конечная p-группа из* BL_{n-1} *при* $C_p \neq 0$.

XI. *Если* A – *редуцированная неограниченная p-группа*, *то* $A_{(n)} = A$ *для каждого* $n \in \mathbf{N}$. *Если* A – *ограниченная p-группа экспоненты* m, *то* $A_{(n)} = A$ *для каждого* $n \in \mathbf{N}$ *тогда и только тогда*, *когда подгруппа* $p^{m-1}A$ *разложима.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чехлов А.Р.* О скобке Ли эндоморфизмов абелевых групп // Вестник ТГУ. Математика и механика. 2009. № 2(6). С. 78–84.
2. *Чехлов А.Р.* О свойствах центрально и коммутаторно инвариантных подгрупп абелевых групп // Вестник Томского госуниверситета. Математика и механика. 2009. № 2(6). С. 85–99.
3. *Чехлов А.Р.* Об абелевых группах с нормальным кольцом эндоморфизмов // Алгебра и логика. 2009. Т. 48. № 4. С. 520–539.
4. *Чехлов А.Р.* Е-нильпотентные и Е-разрешимые абелевы группы класса 2 // Вестник Томского госуниверситета. Математика и механика. 2010. № 1(9). С. 59–71.
5. *Чехлов А.Р.* Некоторые примеры Е-разрешимых групп // Вестник ТГУ. Математика и механика. 2010. № 3(11). С. 69–76.
6. *Чехлов А.Р.* О коммутаторно инвариантных подгруппах абелевых групп // Сиб. матем. журн. 2010. Т.51. № 5. С. 1163–1174.
7. *Чехлов А.Р.* Свойства подгрупп абелевых групп, инвариантных относительно проекций // Вестник ТГУ. Математика и механика. 2008. № 1(2). С. 76–82.
8. *Чехлов А.Р.* О подгруппах абелевых групп, инвариантных относительно проекций // Фундамент. и прикл. матем. 2008. Т. 14. № 6. С. 211–218.
9. *Чехлов А.Р.* О проективно инвариантных подгруппах абелевых групп // Вестник ТГУ. Математика и механика. 2009. № 1(5). С. 31–36.
10. *Чехлов А.Р.* Сепарабельные и векторные группы, проективно инвариантные подгруппы которых вполне инвариантны // Сиб. матем. журн. 2009. Т.50. № 4. С. 942–953.
11. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1974. Т. 1; 1977. Т. 2.

Статья принята в печать 17.12.2010г.

Chekhlov A.R. ON THE LIE BRACKET OF ENDOMORPHISMS OF ABELIAN GROUPS, 2. We consider Abelian groups in which a fixed degree of any commutator of endomorphisms is zero. Groups with this property are described in some classes of groups.

Keywords: fully invariant subgroup, endomorphism ring, power E-commutant, power E-commutator.

CHEKHLOV Andrei Rostislavovich (Tomsk State University)
E-mail: cheklov@math.tsu.ru