

УДК 533.6+539.3

Е.П. Лукашик, О.В. Иванисова

ВЛИЯНИЕ ВОЛНООБРАЗОВАНИЯ НА ГИДРОУПРУГУЮ УСТОЙЧИВОСТЬ ПОДВОДНОГО ПРОФИЛЯ

Настоящая работа посвящена постановке связанной задачи гидроупругости тонкого упруго-деформируемого профиля в ограниченном потоке тяжелой жидкости при различных условиях закрепления кромок профиля, а также разработке эффективного метода расчета его гидродинамических характеристик и прогибов. Проведено исследование влияния волнообразования и упругих свойств на устойчивость профиля в потоке.

Ключевые слова: *задача гидроупругости, крыловой профиль, весовая жидкость, волнообразование, устойчивость профиля.*

Движение тел вблизи или под свободной поверхностью жидкости, находящейся в поле действия силы тяжести, приводит к возникновению вынужденных поверхностных волн. Возмущения поверхности жидкости, инициированные движением тела, порождают колебания частиц жидкости около положения равновесия. Процесс возникновения и передачи этих колебаний, обусловленный восстанавливающим действием силы тяжести, носит название волнообразование, а данный вид волн определяется как гравитационные. Вызванные волнообразованием дополнительные скорости жидкости влияют на закон распределения давления по поверхности тела, в результате чего на тело действуют гидродинамические силы волновой природы. Определение этих сил, а также вида вынужденных волн в зависимости от формы тела, скорости и других условий его движения является важной проблемой гидродинамики, имеющей большое значение при исследовании движения различных типов судов [1].

В последнее время в гидродинамике наряду с классическими исследованиями сравнительно жестких, слабо деформируемых крыльев значительное внимание уделяется мягким поверхностям. Гибкие элементы из высокопрочных мягких материалов используются в качестве несущих поверхностей судов на подводных крыльях, лопастей гидромашин. В связи с проблемами экологии и охраны природы, гибкие несущие поверхности используются для удержания в надлежащем месте рыбозащитных устройств на гидротехнических сооружениях.

Стремление полнее использовать известные свойства материалов требует глубоких комплексных исследований явлений и свойств, зачастую с привлечением сведений из различных смежных областей. Расширение представлений об упругом поведении материалов в настоящее время в значительной степени базируется на универсальных методах расчета, основу создания и разработку которых составляют математические теории. Сложность совместной задачи требует разумного компромисса между учетом особенностей гидродинамических и упругих явлений. В соответствии со вкусами авторов здесь возможны варианты с различной степенью учета факторов той или иной части составляющих общей связанной задачи: больше гидродинамики и менее точный учет упругости или наоборот.

В работах Фельца [2] и Нильсена [3] в качестве уравнения связи между прогибами профиля и перепадом давления было использовано уравнение статики гиб-

кой нити. Нильсен впервые указал на собственные формы равновесия гибкой нити в потоке несжимаемой жидкости. При рассмотрении обтекания упруго-деформируемых профилей Б.С. Берковским [4] перемещения точек профиля определялись согласно уравнению изгиба балки-полоски. Б.С. Берковский исследовал профили достаточно большой жесткости, когда учет влияния упругих деформаций приводит к незначительным изменениям в определении аэродинамических сил и моментов.

Замена профиля дискретными вихрями применялась С.И. Гур-Мильнером [5] при исследовании дивергенции консольного профиля, закрепленного по выходной кромке. Наиболее общий подход к решению задач гидроупругости крыла на основе вихревой теории изложен в работах С.М. Белоцерковского, А.С. Вольмира, М.И. Ништа, А.Т. Пономарева [6].

Представляет интерес подход, широко используемый многими авторами, наиболее полно представленный в монографии В.В. Болотина [7] и основанный на применении линейных уравнений изгиба пластин при наличии заданных постоянных усилий в срединной плоскости. Такое приближение позволяет несколько упростить анализ сложных механических явлений, обусловленных взаимодействием гидродинамических и упругих сил, и в то же время сохраняет основные особенности гидроупругих явлений.

Для упруго-деформируемых профилей, обтекаемых несжимаемой жидкостью или дозвуковым потоком, аэродинамическая гипотеза, аналогичная «теории поршня», предложена И.И.Ефремовым [8].

Следует отметить, что, несмотря на отдельные работы, вопросы учета влияния упругих деформаций на гидродинамические характеристики тонких крыльев изучены еще недостаточно. Особенно это касается учета влияния границ потока, в том числе волновых, в гидродинамической части задачи и различных способов закрепления кромок профиля в упругой части.

Постановка задачи

Рассмотрим движение тонкого упругого крыла бесконечного размаха под свободной границей идеальной несжимаемой весомой жидкости. Для тонких тел справедливо допущение о малости относительных высот вынужденных волн, вызываемых их движением. Это позволит в дальнейшем считать малыми скорости, вызванные волновым движением, и применить линейную теорию волн.

Чтобы свести задачу к изучению установившегося движения, применим принцип обратимости. Будем рассматривать обтекание неподвижного профиля, расположенного под свободной поверхностью жидкости, потоком со скоростью на бесконечности впереди V_∞ . Подвижную систему координат свяжем с профилем. Направим ось Ox вдоль скорости V_∞ . Ось Oy проведем через середину хорды профиля и направим вверх против силы тяжести g . Таким образом, профилю соответствует на оси Ox отрезок $[-l, l]$, l – полухорда профиля.

Расстояние между профилем и невозмущенным уровнем свободной поверхности обозначим H . В уравнении свободной поверхности $y = H + \eta(x)$ и в уравнении $y = f_0(x) + f(x)$, определяющем форму тонкого упругого профиля, отдельно выделены деформационные составляющие ($\eta(x)$ – изменения свободной поверхности относительно невозмущенного уровня, $f(x)$ – упругие смещения относительно заданной первоначальной формы профиля $f_0(x)$). Принимаем, что деформации свободной поверхности, а также прогибы профиля малы по сравнению с длиной хорды.

Предположения о тонкости профиля и малости возмущений позволяют линеаризовать постановку задачи, сохранив в ней величины первого порядка малости и снося соответствующие граничные условия на невозмущенный уровень жидкости и на разрез вдоль оси Ox (проекцию профиля).

Для упругих несущих поверхностей геометрическая форма поверхности заранее не известна и определяется в зависимости от возникающих гидродинамических нагрузок, в то время как сами гидродинамические нагрузки существенно зависят от упругих перемещений несущей поверхности. В этом случае задача определения перепада давления (*гидродинамическая*) и задача определения упругих перемещений (*упругая*) должны решаться совместно.

Существуют различные способы сведения двух указанных задач к одной. Первый способ, как правило, основан на обращении интеграла типа Коши, исключении неизвестной гидродинамической нагрузки и переходе к обобщенному уравнению изгиба пластины. Такой способ, например, удобно применять в случае существования точного решения гидродинамической части общей задачи гидроупругости. Однако для большинства задач с ограниченными потоками точного решения не существует.

Поэтому в таких случаях чаще всего обращаются к подходу, когда строится точное решение упругой части задачи (например, методом функций Грина), исключаются из системы неизвестные упругие деформации и задача сводится к гидродинамическому уравнению с модифицированным углом атаки.

В данной работе будет принят второй способ как более универсальный для гидродинамических ситуаций и приемлемый для упругой части задачи.

1. Гидродинамическая часть задачи

При изучении проблемы влияния волнообразования на гидродинамические характеристики гибкого профиля, как обычно в теории волн, движение жидкости предполагается потенциальным.

В подвижной системе, связанной с профилем, потенциал не зависит от времени, а вынужденные волны неподвижны относительно выбранной системы координат.

Внутри течения, кроме области профиля $S = \{y = 0, x \in [-l, l]\}$, потенциал возмущенного течения $\phi(x, y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta \phi = 0, \quad y < H. \quad (1)$$

Для решения этого уравнения сформулируем граничные условия на контуре профиля, на свободной поверхности и на бесконечности.

Условия на свободной поверхности:

а) *динамическое* условие следует из интеграла Бернулли при предположении, что вдоль свободной поверхности жидкости давление постоянно и равно атмосферному, т.е. p_∞

$$V_\infty \cdot \phi'_x + g \cdot \eta = 0, \quad (2)$$

б) *кинематическое* условие означает, что свободная граница является линией тока

$$\phi'_y = V_\infty \cdot \eta'_x. \quad (3)$$

Объединяя эти два условия, получим условие для потенциальных течений на свободной поверхности тяжелой жидкости, известное как условие теории малых волн

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = H, \quad (4)$$

где $v = g / V_\infty^2$.

Условие плавного обтекания тонкого крыла:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_{y=0} = v_y(x) = V_\infty \left(\frac{df_0}{dx} + \frac{df}{dx} \right) \text{ при } |x| \leq l. \quad (5)$$

Условия на бесконечности обеспечивают отсутствие возмущений по мере удаления от профиля, т.е. возмущенное течение далеко впереди крыла (при $x \rightarrow -\infty$) и на бесконечной глубине ($y \rightarrow -\infty$) должно отсутствовать, позади профиля (при $x \rightarrow +\infty$) должно быть ограничено.

2. Упругая часть задачи

В качестве уравнения связи деформации формы профиля с распределением давления вдоль его границ возьмем уравнение равновесия для случая цилиндрического изгиба пластины при наличии усилий в срединной плоскости

$$D \frac{d^4 f}{dx^4} - T \frac{d^2 f}{dx^2} = p_- - p_+ = \rho V_\infty \gamma(x). \quad (6)$$

Здесь D – изгибная жесткость, T – усилие в срединной плоскости ($T > 0$ в случае растягивающих усилий, $T < 0$ – для сжимающих усилий).

Уравнение (6) должно быть дополнено краевыми условиями закрепления кромок профиля.

Так, закрепление концов профиля в шарнире приводит к исчезновению смещений и момента сил на концах, что описывается соотношениями

$$f(\pm l) = f''(\pm l) = 0.$$

В случае жесткого закрепления краев профиля отсутствует смещение на концах и фиксируется направление контура, т.е.

$$f(\pm l) = f'(\pm l) = 0.$$

Методика решения

Введем в рассмотрение функцию $\gamma(x)$, которую можно интерпретировать как интенсивность вихревого слоя, моделирующего влияние профиля на поток:

$$\gamma(x) = \left(\frac{\partial \varphi_+}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_-}{\partial x} \right) \bigg|_{y=0}, |x| \leq l,$$

где $\varphi_+(x)$ и $\varphi_-(x)$ – потенциалы скорости выше и ниже уровня $y = 0$ соответственно.

На основе интеграла Бернулли имеем следующее выражение для распределения давления вдоль профиля:

$$p_- - p_+ = \rho V_\infty \gamma(x).$$

Под действием преобразования Фурье по переменной x задача (1), (4), (5) перейдет в уравнение

$$\Gamma(\alpha) K(\alpha) = V(\alpha), \quad (7)$$

где $\Gamma(\alpha)$, $V(\alpha)$ – образы по Фурье функций $\gamma(x)$ и $v_y(x)$ соответственно,

$$K(\alpha) = \frac{1}{2i} \operatorname{sign} \alpha \left(1 + e^{-2|\alpha|H} + \frac{2v}{|\alpha| - v} e^{-2|\alpha|H} \right).$$

Применяя обратное преобразование Фурье к уравнению (7) и используя теорему о свертке функций, получим

$$\int_{-l}^l \gamma(\xi) k(x - \xi) d\xi = v_y(x) = V_\infty \left(\frac{df_0}{dx} + \frac{df}{dx} \right),$$

$$k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha.$$
(8)

Заметим, что $K(\alpha)$ является сингулярным ядром типа Коши, так как $K(\alpha) \xrightarrow{|\alpha| \rightarrow \infty} \frac{1}{2i} \text{sign}(\alpha)$. Функция $K(\alpha)$ имеет следующие особые точки: $\alpha = 0$ – точка ветвления, $\alpha = \pm v$ – два симметричных действительных полюса. Для определенности выбрана главная ветвь ($\sqrt{1}=1$). Данный выбор учитывался при построении решения, чтобы обеспечить условие на бесконечной глубине (при $y \rightarrow -\infty$).

Для выполнения условий далеко впереди профиля либо далеко за ним при $x > 0$ контур интегрирования замыкаем на нижнюю полуплоскость (α), а при $x < 0$ – на верхнюю полуплоскость.

Применение принципа предельного поглощения [9] показывает, что полюса выходят на действительную ось с нижней полуплоскости при стремлении коэффициента диссипации к нулю, т.е. их вклад нужно учитывать при $x > 0$. Для удовлетворения условию конечности возмущений при $x \rightarrow +\infty$ разрез проведем вдоль мнимой отрицательной оси. Вычисление ядра для положительных x , таким образом, сводится к сумме двух вычетов и интегрированию вдоль отрицательной мнимой оси.

В случае отрицательных x необходимо обеспечить выполнение условия отсутствия возмущений при $x \rightarrow -\infty$. Это условие удастся выполнить, если разрез плоскости (α) провести вдоль положительной мнимой оси. В результате при отрицательных x интеграл для $k(x)$ (8) сводится к вычислению интегралов по берегам разреза вдоль положительной мнимой оси.

Таким образом, гидродинамическая часть задачи сводится к сингулярному интегральному уравнению, которое можно записать в безразмерном виде:

$$\int_{-1}^1 \bar{\gamma}(\xi) \left\{ \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{\bar{x} - \xi} + \frac{\bar{x} - \xi}{(\bar{x} - \xi)^2 + 16h^2} \right) - R(\bar{x} - \xi) \right\} d\xi =$$

$$= -(\bar{f}'_0(\bar{x}) + \bar{f}'(\bar{x})), \quad |\bar{x}| \leq 1,$$
(9)

где

$$R(x) = \begin{cases} -I(x) & \text{при } x < 0; \\ I(x) - \frac{1}{Fr^2} e^{-\frac{2h}{Fr^2}} \cos \frac{x}{2Fr^2} & \text{при } x > 0; \end{cases}$$

$$I(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\beta|x|}}{4\beta^2 Fr^4 + 1} (\cos 4\beta h + 2Fr^2 \beta \sin 4\beta h) d\beta.$$

Здесь $x = l\bar{x}$, $\gamma(\xi) = V_\infty \bar{\gamma}(\xi)$, $f(x) = l\bar{f}(\bar{x})$, $h = \frac{H}{2l}$, $Fr = \frac{V_\infty}{\sqrt{2lg}}$.

Используя параметры

$$\lambda = \frac{\rho V_{\infty}^2 (2l)^3}{D}, \quad \mu = \frac{\rho V_{\infty}^2 2l}{T},$$

запишем уравнение цилиндрического изгиба пластины (6) в безразмерном виде:

$$\frac{d^4 \bar{f}}{d\bar{x}^4} - \frac{\beta^2}{4} \frac{d^2 \bar{f}}{d\bar{x}^2} = \frac{\lambda}{8} \bar{\gamma}(\bar{x}), \quad \beta^2 = \frac{\lambda}{\mu}.$$

В дальнейшем черточки над безразмерными величинами будем опускать.

Для выражения решения упругой части задачи через произвольное распределение давления по профилю применим метод функций Грина $G(x, s)$. Функция Грина зависит от краевых условий, например:

для шарнирного закрепления

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\lambda}{8} \int_{-1}^1 \gamma(s) G_1(x, s) ds = \\ &= \frac{\lambda}{\beta^3} \left\{ \int_{-1}^x \gamma(s) \left[\operatorname{sh} \frac{\beta(x-s)}{2} - \frac{\beta(x-s)}{2} \right] ds - \right. \\ &\quad \left. - \int_{-1}^1 \gamma(s) \left[\frac{1}{\operatorname{sh} \beta} \operatorname{sh} \frac{\beta(1-s)}{2} \operatorname{sh} \frac{\beta(1+x)}{2} - \frac{\beta}{4} (1-s)(1+x) \right] ds \right\}; \end{aligned}$$

для жесткого закрепления

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\lambda}{8} \int_{-1}^1 \gamma(s) G_2(x, s) ds = \\ &= \frac{\lambda}{\beta^3} \left\{ \int_{-1}^x \gamma(s) \left[\operatorname{sh} \frac{\beta(x-s)}{2} - \frac{\beta(x-s)}{2} \right] ds + \frac{\operatorname{sh} \frac{\beta(1+x)}{2} - \frac{\beta(1+x)}{2}}{(2 \operatorname{ch} \beta - \beta \operatorname{sh} \beta - 2)} \times \right. \\ &\quad \times \int_{-1}^1 \gamma(s) \left[\operatorname{ch} \frac{\beta(1+s)}{2} + 1 - \operatorname{ch} \beta - \operatorname{ch} \frac{\beta(1-s)}{2} + \frac{\beta(1-s)}{2} \operatorname{sh} \beta \right] ds - \\ &\quad - \frac{\operatorname{ch} \frac{\beta(1+x)}{2} - 1}{(2 \operatorname{ch} \beta - \beta \operatorname{sh} \beta - 2)} \int_{-1}^1 \gamma(s) \left[\operatorname{sh} \frac{\beta(1+s)}{2} + \frac{\beta(1+s)}{2} - \beta \operatorname{ch} \frac{\beta(1-s)}{2} \right] ds - \\ &\quad \left. - \frac{\operatorname{ch} \frac{\beta(1+x)}{2} - 1}{(2 \operatorname{ch} \beta - \beta \operatorname{sh} \beta - 2)} \int_{-1}^1 \gamma(s) \left[\frac{\beta(1-s)}{2} \operatorname{ch} \beta - \operatorname{sh} \beta + \operatorname{sh} \frac{\beta(1-s)}{2} \right] ds \right\}. \end{aligned}$$

Выражение для упругих перемещений $f(x)$, полученное через функцию Грина $G(x, s)$, подставим в уравнение (9) и перенесем в левую часть. В результате получим обобщенное уравнение в безразмерном виде:

$$\int_{-1}^1 \gamma(s) \left[k(x-s) - \frac{\lambda}{8} \frac{\partial G}{\partial x}(x, s) \right] ds = \frac{df_0}{dx}. \quad (10)$$

Тип уравнения (10) определяет функция $k(x)$ (на особенность которой было указано в гидродинамической части), в силу чего соответствующий интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Решение уравнения (10) $\gamma(x)$ применяется для определения прогибов упругого профиля и реакции гидродинамических сил. Так, в данной работе использовались следующие формулы для определения

коэффициента подъемной силы

$$C_y = \int_{-1}^1 \gamma(s) ds ;$$

коэффициента сопротивления

$$C_x = \int_{-1}^1 \gamma(x) \left[\int_{-1}^1 \gamma(s) \left(R(x-s) - \frac{\lambda}{8} \frac{\partial G}{\partial x}(x, s) \right) ds \right] dx = C_{xw} + C_{xe}.$$

Заметим, что для данного случая плоского движения тела с постоянной скоростью парадокс Эйлера – Даламбера не наблюдается. Профиль при движении испытывает влияние горизонтальной силы, вызванной волнообразованием C_{xw} и упругими деформациями C_{xe} . Влияние сил волновой природы определяет регулярная функция $R(x)$. В случае невесомой жидкости ($Fr \rightarrow \infty$) $R(x) \rightarrow 0$. Волновое сопротивление C_{xw} имеет большое значение с точки зрения ходкости судов.

Для определения формы свободной поверхности $\eta(x)$ весомой жидкости используем динамическое условие (2). На основе преобразования Фурье имеем интегральное представление для потенциала скорости выше уровня $y = 0$:

$$\varphi_+(x) = \int_{-1}^1 \gamma(s) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K_1(\alpha) e^{-i\alpha(x-s)} d\alpha ds ,$$

где

$$K_1(\alpha) = \frac{\text{sign } \alpha}{i} \frac{2Fr^2}{2\alpha^2 Fr^2 - |\alpha|} e^{-|\alpha|2h}.$$

В результате для $\eta(x)$ получим выражение в виде

$$\eta(x) = \int_{-1}^1 \gamma(s) R_1(x-s) ds ,$$

где

$$R_1(x) = \begin{cases} I_1(x) & \text{при } x < 0; \\ I_1(x) - 2e^{-\frac{h}{Fr^2}} \sin \frac{x}{2Fr^2} & \text{при } x > 0; \end{cases}$$

$$I_1(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{2Fr^2 e^{-\beta|x|}}{4\beta^2 Fr^4 + 1} (2Fr^2 \beta \cos 2\beta h - \sin 2\beta h) d\beta.$$

Для численного решения уравнения (10) используем метод дискретных вихрей, который успешно применяется в гидродинамике для решения сингулярных уравнений типа Коши. Для обеспечения условия Жуковского – Чаплыгина о конечности давления в выходной кромке профиля выберем следующую схему расположения дискретных вихрей и точек коллокации:

$$s_j = -1 + \frac{2}{N} \left(j - \frac{3}{4} \right), \quad x_i = -1 + \frac{2}{N} \left(i - \frac{1}{4} \right), \quad i, j = \overline{1, N}.$$

Соответствующую уравнению (10) систему линейных алгебраических уравнений можно записать в матричном виде

$$(A - \lambda B)\gamma = C, \quad (11)$$

где A и B – матрицы порядка $N \times N$, C – вектор правой части, γ – вектор неизвестных γ_i .

Выбранная дискретная схема приводит к преобладанию диагональных элементов матрицы системы, что повышает устойчивость численных вычислений.

Зная γ_i , можно определить коэффициенты подъемной силы и сопротивления, форму профиля и свободной поверхности по следующим формулам:

$$C_y = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N \gamma_i,$$

$$C_x = \frac{4}{N^2} \sum_{i=1}^N \gamma_i \sum_{j=1}^N \gamma_j \left\{ R(x_i - s_j) - \frac{\lambda}{8} \frac{\partial G}{\partial x}(x_i, s_j) \right\},$$

$$y(x_i) = f_0(x_i) + \frac{\lambda}{8} \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N \gamma_j G(x_i, s_j),$$

$$\eta(x_i) = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N \gamma_j R_1(x_i - s_j), \quad i = \overline{1, N}.$$

Численный эксперимент в работе проводился при $N = 50$.

Анализ результатов

Упругие деформации изменяют скос потока или эффективный угол атаки крыла, что приводит к перераспределению нагрузки вдоль хорды и сказывается на суммарных гидродинамических характеристиках.

1. Вначале рассмотрим поведение в потоке достаточно упругого профиля ($D \neq 0$, $T = 0$) при $f_0' = -\varepsilon$. Упругие свойства профиля в данном случае определяет его изгибная жесткость (параметр λ). Деформации формы такого профиля при различных условиях закрепления определяются по следующим формулам:

для шарнирного закрепления концов профиля

$$f(x) = \frac{\lambda}{48} \int_{-1}^x \gamma(s)(x-s)^3 ds - \frac{\lambda(x+1)}{96} \int_{-1}^1 \gamma(s)(1-s) [(x+1)^2 + (1-s)^2 - 4] ds;$$

для жесткого закрепления концов

$$f(x) = \frac{\lambda}{48} \int_{-1}^x \gamma(s)(x-s)^3 ds - \frac{\lambda(x+1)^2}{192} \int_{-1}^1 \gamma(s)(1-s)^2 [2(x-s) + xs - 1] ds.$$

Рис. 1 демонстрирует зависимость гидродинамических характеристик от λ . При переходе параметра гибкости λ через некоторые критические значения отмечается скачок характеристик и смена знака. Значения λ , при которых происходит потеря статической устойчивости, соответствуют собственным значениям λ_k матрицы $B^{-1}A$ (11).

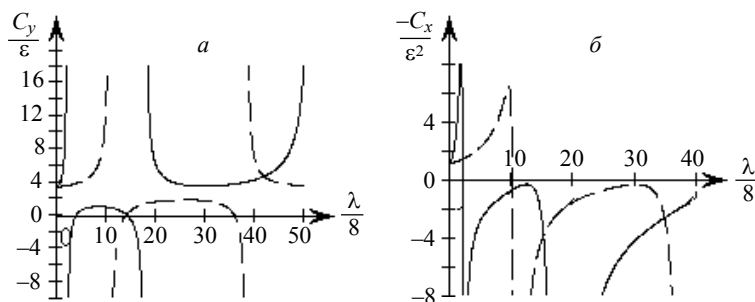


Рис. 1. Влияние изгибной жесткости на значения: *a* – подъемной силы, *б* – сопротивления при $Fr = 2$, $h = 0,5$ (— шарнирное, — — жесткое закрепление)

В табл. 1 приведены значения первых трех собственных значений для разных чисел Фруда при движении жестко закрепленного профиля на различных глубинах.

Таблица 1

Fr	h					
		0,2	0,3	0,4	0,6	0,8
0,2	λ_1	44,8	55,09	60,328	64,868	66,6
	λ_2	257,797	286,876	296,77	302,757	304,37
	λ_3	678,26	708,067	715,51	721,038	723,46
0,5	λ_1	-617+1316i	184,6+54,27i	62,58	60,485	64,46
	λ_2	-617-1316i	184,6-54,27i	284,958	298,57	302,566
	λ_3	495,24	665,21	694,3	713,296	720,125
1	λ_1	119,697	105,46	97,46	87,9	81,77
	λ_2	332,866	313	305,58	301,02	300,48
	λ_3	857,33	832,3	817,97	795,04	776,1
5	λ_1	89,69	82,18	78,43	75,097	73,72
	λ_2	329,84	315,82	310,657	307,09	305,92
	λ_3	769,19	754,91	750,34	746,19	744

Точки разрывов гидроупругих характеристик профиля соответствуют действительным значениям собственных чисел (см. рис. 1), если собственные числа – комплексные, то потери устойчивости не происходит.

Поведение упругого профиля в потоке жидкости существенно зависит от условий закрепления. Так, при шарнирном закреплении получено, что при $h = 0,2$ и $Fr \in [0,398; 0,559]$ величина λ_1 не имеет действительных значений, а для $h = 0,3$ при любых числах Fr значение λ_1 действительно. В случае жесткого закрепления: при $h = 0,2$ и $Fr \in [0,387; 0,577]$, а также при $h = 0,3$ и $Fr \in [0,48; 0,534]$ величина λ_1 не имеет действительных значений. Из рис. 1 также видно, что при жесткой заделке по обоим краям критические значения заметно возрастают, то есть профиль становится более устойчивым.

Кривизна профиля, также как подъемная сила, при переходе параметра λ через критические значения скачком меняет знак. Соответствующие критическим значениям λ формы профиля являются собственными криволинейными формами равновесия тонкой пластины в потоке жидкости. На рис. 2 представлены собственные формы равновесия гибкого, жестко закрепленного профиля при $Fr = 2$, $h = 0,5$. Первая собственная форма достаточно хорошо аппроксимируется косину-

соидой (рис. 2, а), вторая собственная форма имеет горб и впадину и близка к синусоиде (рис. 2, б). Приближение профиля к свободной границе не приводит к значительным изменениям собственных форм равновесия.

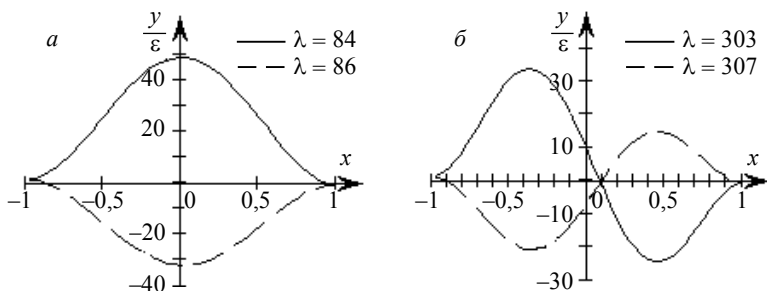


Рис. 2. Собственные формы профиля: а – первая (при $\lambda \sim \lambda_1$), б – вторая (при $\lambda \sim \lambda_2$)

На рис. 3 представлена зависимость волновой составляющей сопротивления от числа Фруда при $h = 0,5$ для жестко закрепленных профилей с различной изгибной жесткостью. В случае $\lambda = 0$ результаты совпадают с данными работы [10] для волнового сопротивления подводного жесткого профиля. На рис. 3 приводятся графики волнового сопротивления для значений $\lambda = 50$ и $\lambda = 100$, не совпадающих с собственными значениями λ . При $\lambda = 80$ существует две критические точки для $Fr \in [0, 3]$, в которых волновое сопротивление терпит разрыв.

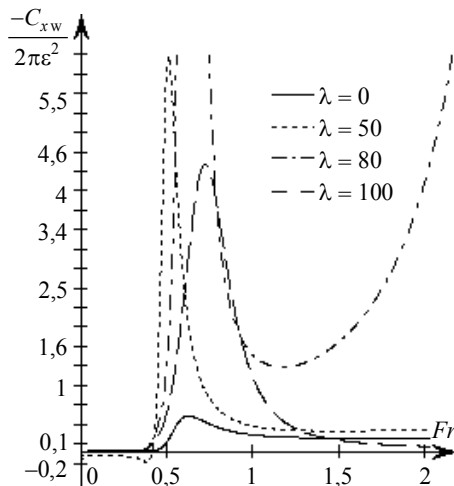


Рис. 3. Влияние числа Фруда на волновое сопротивление гибкого профиля

Рис. 4 показывает форму поверхностных волн при поступательном движении упругого профиля, жестко закрепленного на концах. Упругие свойства профиля изменяют форму профиля и, как следствие, сказываются на форме свободной границы весомой жидкости. Первая собственная форма такого профиля представлена на рис. 2, а. Кривизна линии свободной границы изменяется при переходе через критические значения параметра λ .

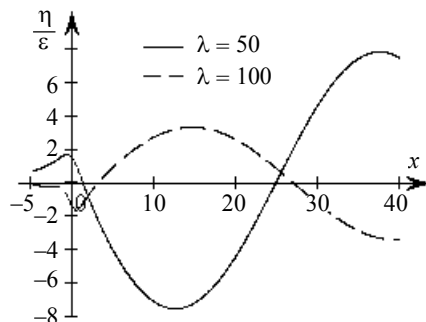


Рис. 4. Форма свободной поверхности при $Fr = 2$, $h = 0,5$

2. Отдельно рассмотрим движение мягкого (мембранного) профиля ($D = 0$, $T \neq 0$) при $f_0' = -\varepsilon$.

Упругие деформации формы профиля в этом случае задаются выражением:

$$f(x) = \frac{\mu}{2} \left\{ \frac{x+1}{2} \int_{-1}^1 \gamma(s)(1-s)ds - \int_{-1}^x \gamma(s)(x-s)ds \right\}.$$

В качестве параметра гибкости для мембранного профиля выступает параметр μ , определяемый натяжением T . Исследуем корни характеристического уравнения $|A - \mu B| = 0$. В табл. 2 представлены значения первых трех корней для разных значений Фруда и глубин погружения мягкого профиля.

Т а б л и ц а 2

Fr	h					
		0,2	0,3	0,4	0,6	0,8
0,2	μ_1	0,73	0,89	0,98	1,067	1,1
	μ_2	2,89	3,28	3,43	3,53	3,56
	μ_3	4,01	4,24	4,287	4,305	4,306
0,5	μ_1	1,85-6,56i	2,378-0,568i	0,9	0,967	1,056
	μ_2	1,85+6,56i	2,378+0,568i	3,52	3,508	3,537
	μ_3	4,4	3,855	4,06	4,26	4,297
1	μ_1	2,45	2,1	1,9	1,649	1,48
	μ_2	3,88	3,62	3,528	3,476	3,478
	μ_3	4,98	4,83	4,755	4,65	4,56
5	μ_1	1,58	1,45	1,38	1,31	1,28
	μ_2	3,92	3,73	3,655	3,599	3,58
	μ_3	4,537	4,42	4,39	4,383	4,38

Также как и в случае упругого профиля, если корни μ_i имеют действительные значения, то при этих значениях параметра гибкости отмечается разрыв характеристик мембранного профиля, если корень комплексный, то профиль устойчив в потоке жидкости (см. рис. 5).

Зависимость значения наименьшего критического числа μ_1 , при котором происходит потеря статической устойчивости, от весомости жидкости при различных отстояниях от свободной поверхности изображена на рис. 6.

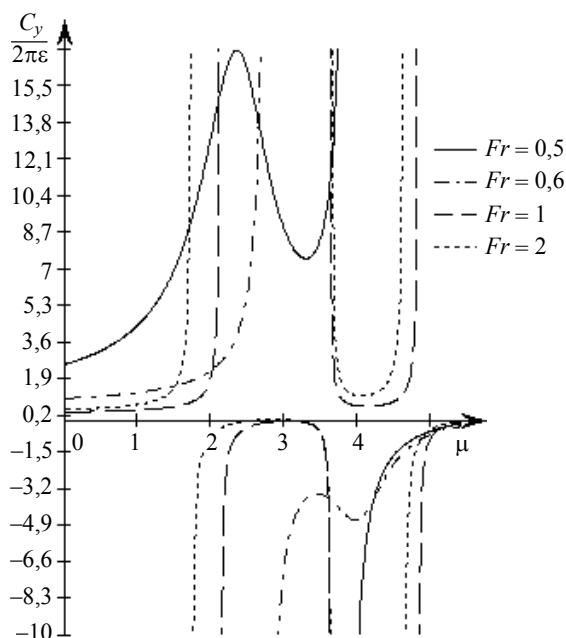


Рис. 5. Зависимость коэффициента подъемной силы от натяжения при $h = 0,3$

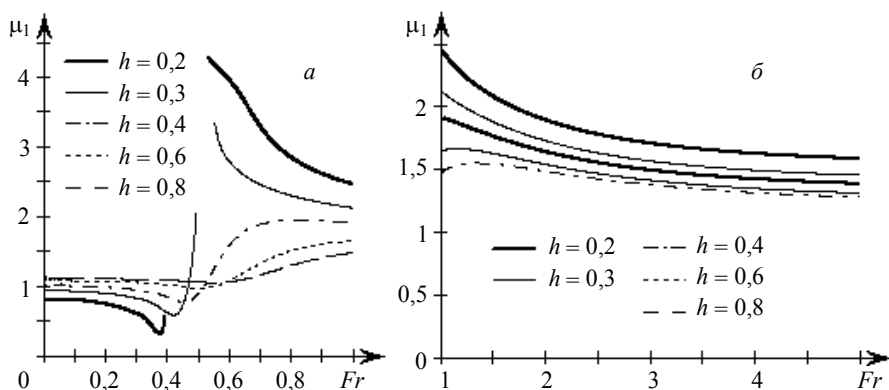


Рис. 6. Зависимость наименьшего критического значения μ_1 от числа Фруда

Из рис. 6 видно, что при малых h есть область устойчивости мембранного профиля. Так, при $h = 0,2$ и $Fr \in [0,388; 0,52]$, а также при $h = 0,3$ и $Fr \in [0,489; 0,547]$ величина μ_1 не имеет действительных значений. При $h = 0,2$ и $Fr \in [0,387; 0,68]$, при $h = 0,3$ и $Fr \in [0,49; 0,637]$ величина μ_2 не имеет действительных значений. При $h = 0,2$ и $Fr \in [0,524; 0,68]$, $h = 0,3$ и $Fr \in [0,548; 0,637]$ величина μ_3 не имеет действительных значений. Таким образом, при малых h существуют числа Fr , для которых характеристики мембранного профиля не имеют разрывов. Полученные закономерности подтверждаются результатами для мембранного профиля работы [11], в которой расчеты велись на основе функции, полученной для подводного крыла М.В. Келдышем и М.А. Лаврентьевым.

На рис. 7 показаны зависимости гидродинамических характеристик мягкого профиля от числа Фруда. Для жесткой пластины в работе [12] указано на немонотонный характер подъемной силы при малых числах Fr . Из рис. 7, *a* видно, что для мягкой пластины характер изменения C_y остается аналогичным, если при данном значении Fr значения μ отличны от $\mu_{\text{крит}}$. Если же μ близко к критическим значениям, то наблюдается разрыв C_y . Рис. 7, *б* демонстрирует влияние натяжения мембранного профиля на характер изменения сопротивления. При переходе через критическую точку сила сопротивления меняет знак, т.е. переходит в силу тяги.

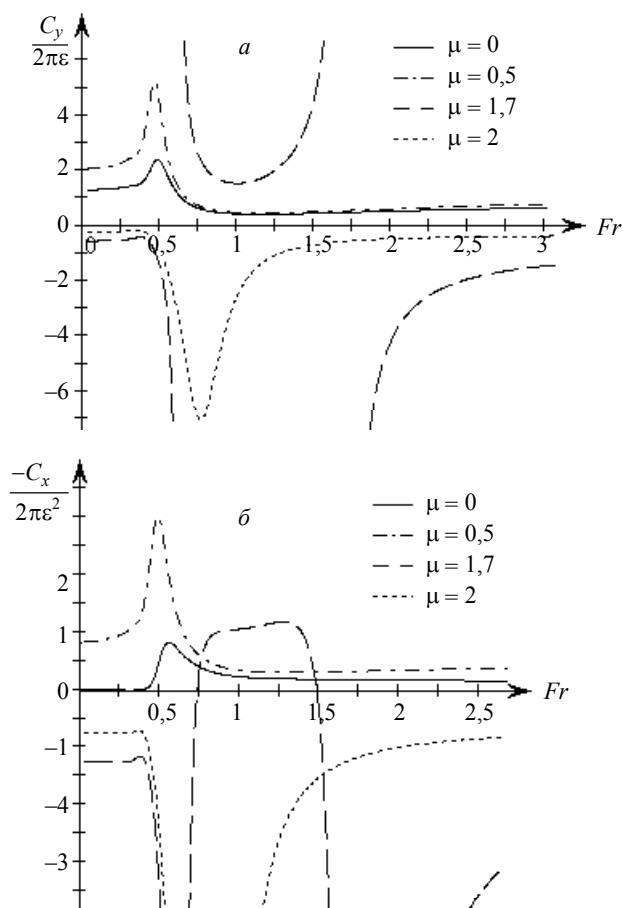


Рис. 7. Зависимость гидродинамических характеристик мембранного профиля от числа Фруда при $h = 0,4$

На рис. 8 можно проследить, как изменение скорости движения мембранного профиля сказывается на форме свободной границы весомой жидкости. Значение параметра μ для данных условий движения попадает в область устойчивости, близость к критическим значениям μ вызовет неограниченный рост амплитуды поверхностных волн. На больших расстояниях позади профиля гравитационные волны можно рассматривать как прогрессивные плоские волны с синусоидальным профилем, что соответствует положениям теории малых волн. Изменение числа

Фруда сказывается на всех параметрах поверхностных волн (сдвиге фаз, периоде и амплитуде). Изменение глубины погружения при одинаковых прочих параметрах приводит к изменению амплитуды волны, не затрагивая значения длины волны и сдвига фаз.

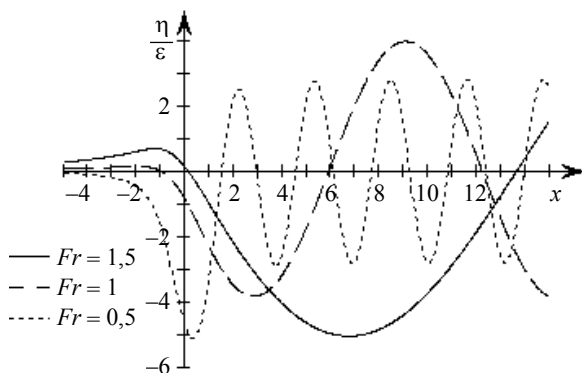


Рис. 8. Форма свободной границы при $h = 0,5$ и $\mu = 0,5$

3. На рис. 9 демонстрируется влияние на характер изменения подъемной силы упругого профиля параметров течения при ненулевых значениях изгибной жесткости, а также натяжения для случая жесткого закрепления концов профиля. Рис. 9, а показывает влияние весомости на C_y , а рис. 9, б – влияние глубины погружения профиля на C_y . При определенных сочетаниях упругих свойств отмечается потеря устойчивости профиля.

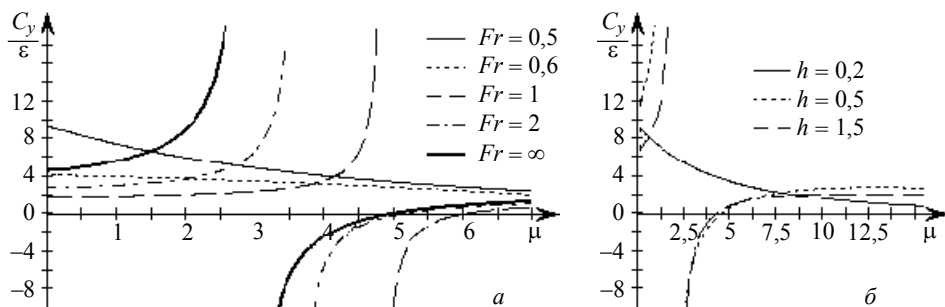


Рис. 9. Зависимость коэффициента подъемной силы от натяжения при $\lambda = 314$ для $h = 0,2$ (а) и $Fr = 0,5$ (б)

Заключение

Представленная в настоящей работе методика дает возможность определять реакцию гидродинамических сил на гибкий подводный профиль, возмущения свободной поверхности тяжелой жидкости, вызванные движущимся профилем, а также форму профиля, обладающего различными упругими свойствами и при разных условиях закрепления. Проведено исследование гидроупругой устойчивости тонкого профиля при различных условиях движения. Результаты выполненных вычислений в идентичных случаях были сопоставлены с данными известных работ по аналогичной тематике. Полученные результаты имеют практический ин-

интерес в рамках исследования качества несущих элементов, выполненных из упругих материалов и применяемых, например, на судах с подводными крыльями. Предложенную методику можно применить для исследования нестационарной гидроупругой устойчивости, а также при движении тонких упругих крыльев в слое жидкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Войткунский Я.И., Фаддеев Ю.И., Федяевский К.К.* Гидромеханика. Л.: Судостроение, 1982. 456 с.
2. *Voelz K.* Profil und Auftrieb eines Segels // *Z. Angew. Math. und Mech.* 1950. 30. Н. 10. Р. 301–317.
3. *Нильсен.* Теория гибких аэродинамических поверхностей: пер. с англ. // *Прикладная механика.* 1963. № 3. С. 131–139.
4. *Берковский Б.С.* Исследования аэродинамики жестких и деформируемых крыльев в ограниченной жидкости // *Прикладная математика.* Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1971. Вып. 2. С. 108–134.
5. *Гур-Мильнер С.И.* О форме упругого равновесия и устойчивости пластины в плоскопараллельном потоке несжимаемой жидкости // *Труды ЛКИ.* 1969. Вып. 65.
6. *Белоцерковский С.М., Вольмир А.С., Пономарев А.Т.* Исследование поведения пластин и оболочек на основе интегро-дифференциальной аэроупругости // *Изв.АН СССР. Механика твердого тела.* 1974. № 6. С. 85–94.
7. *Болотин В.В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
8. *Ефремов И.И., Марко М.Э., Семенов В.Н.* Некоторые задачи теории гибких и проницаемых несущих поверхностей // *Тез. докл. Всесоюз. науч.-технич. конф. по теории корабля.* Л.: Судостроение, 1977. С. 117–120.
9. *Ворович И.И., Бабешко В.А., Прякина О.Д.* Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Научный мир, 1999. 247 с.
10. *Целищев В.А.* Исследование влияния свободной поверхности тяжелой жидкости на стационарные гидродинамические характеристики тонкого профиля // *Гидродинамика больших скоростей.* Чебоксары: Изд-во Чувашского гос. ун-та, 1990. С. 143–147.
11. *Ефремов И.И., Макаеев М.В.* Обтекание тонкого упругого профиля под свободной поверхностью весомой жидкости // *Научные основы современных технологий орошения: сб. науч. трудов.* Краснодар: КГАУ, 1992. С. 67–76.
12. *Ефремов И.И., Иванисова О.В.* Гидродинамические характеристики малопогруженного подводного крыла // *Труды XI Всероссийской школы-семинара «Современные проблемы математического моделирования».* Ростов н/Д: Изд-во РГУ, 2005. С. 138–144.

Статья принята в печать 12.10.2010 г.

Lukashchik E.P., Ivanisova O.V. THE INFLUENCE OF WAVE GENERATION ON HYDRO-ELASTIC STABILITY OF AN UNDERWATER WING PROFILE. This article describes the formulation of the connected hydro-elastic problem for a thin elastic-deformed profile in a bounded flow of heavy fluid for different fixings of edges and the development of an efficient method for calculation of the hydrodynamic characteristics and deformations of the profile. An investigation of how wave generation and elastic properties influence on profile stability in a flow has been carried out.

Keywords: hydro-elastic problem, wing profile, heavy fluid, wave generation, profile stability.

LUKASHCHIK Elena Pavlovna (Kuban State University)

E-mail: lep_9091@mail.ru

IVANISOVA Olga Vladimirovna (Kuban State University)

E-mail: zah-ivanisov@yandex.ru