

УДК 536.25

О.Г. Шилова, И.И. Клыков, В.С. Попонин, А.В. Кошеутов**ОБРАЗОВАНИЕ АНЕВРИЗМЫ В КАПИЛЛЯРАХ¹**

В работе рассмотрены большие деформации цилиндра и сферы, состоящие из однородного материала, подчиняющиеся закону Гука. Показано, что при определенных условиях деформации принимают катастрофический характер. Произведены оценки величин давления и прочностных параметров сосуда, при которых деформации стремительно нарастают, приводя к разрыву стенок сосуда.

Ключевые слова: *стенки капилляра, упругий материал, большие деформации, критическое давление, разрыв сосуда.*

Состояние микроциркуляции является наиболее наглядным показателем для оценки существующих изменений сосудистого русла при сахарном диабете [1]. Одним из самых тяжелых офтальмологических проявлений сахарного диабета является поражение сетчатой оболочки глаза – диабетическая ретинопатия, первым и наиболее характерным патоморфологическим признаком которой являются мешотчатые образования – микроаневризмы. При длительном течении сахарного диабета их количество увеличивается, а величина колеблется от 20 до 200 мкм [2].

Стенки капилляров состоят из эластина, коллагеновые волокна отсутствуют. В силу однородности эластиновых стенок капилляра возможен упрощенный подход к прочности капилляра по отношению к избыточному давлению в нём.

Задача по расчёту напряжений в толстостенной трубе относится к разряду классических: задача Ламе – Гадolina. В этой задаче рассматривается зависимость механических напряжений от давлений внутри и вне трубы. Нас же интересует зависимость диаметра цилиндрического сосуда от избыточного давления в нём. В теории сопротивления материалов очень редко интересуются большими деформациями, так как основные конструкционные материалы (металлы и сплавы) работают в области малых относительных деформаций, не превышающих 1%.

В данной работе рассмотрены большие деформации цилиндра и сферы. Оценивается тенденция развития процесса с ростом внутреннего давления в системе. Выделена критическая величина давления. Показано, что при приближении давления к указанной величине процесс развития деформаций принимает катастрофический характер. Сделаны оценки давления и прочностных параметров сосуда, при которых деформации стремительно нарастают, приводя к разрыву стенок сосуда.

Допущения и предпосылки

Материал подчиняется закону Гука, коэффициент Пуассона равен 0.5 (материал несжимаем). Несмотря на кажущуюся натянутость последнего допущения, заметим, что для резины (высокоэластичный полимер) коэффициент Пуассона равен 0,48, что весьма близко к 0,5.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант РФФИ № 08-01-00484-а).

Как известно (задача Ламе – Гадолина) [3], связь между параметрами толсто-стенного цилиндра и давлением записывается как

$$\frac{dp}{db} = \frac{2E}{3ba^2}(b^2 - a^2), \quad (1)$$

где E – модуль Юнга, a – внутренний диаметр цилиндра (сосуда), b – внешний, p – трансмуральное давление (превышение внутреннего давления над внешним).

В силу несжимаемости площадь поперечного сечения стенок сосуда будет постоянной

$$b^2 - a^2 = b_0^2 - a_0^2 \equiv S_0, \quad (2)$$

где b_0 и a_0 – внешний и внутренний диаметры сосуда при исходном давлении p_0 .

Используя соотношение (2), исключим внутренний диаметр сосуда из дифференциального уравнения (1):

$$\frac{dp}{db} = \frac{2E}{3ba^2}(b^2 - a^2) = \frac{2ES_0}{3b(b^2 - S_0)}. \quad (3)$$

Решая уравнение (3) относительно p , получим

$$p = \frac{E}{3} \ln \left(\frac{(b^2 - S_0)b_0^2}{b^2 a_0^2} \right). \quad (4)$$

Разрешая (4) относительно b^2 , имеем

$$b^2 = b_0^2 \frac{1 - \left(\frac{a_0}{b_0}\right)^2}{1 - \left(\frac{a_0}{b_0}\right)^2 \exp\left(\frac{3p}{E}\right)}. \quad (5)$$

Из этой формулы видно, что знаменатель обращается в нуль при

$$p_{cr} = \frac{2E}{3} \ln \left(\frac{b_0}{a_0} \right), \quad (6)$$

что означает неограниченный рост внешнего диаметра (следовательно, и внутреннего) при приближении давления к критическому значению p_{cr} .

Учитывая условие несжимаемости (2), для внутреннего диаметра сосуда a , имеем

$$a^2 = a_0^2 \exp(3p/E) \frac{1 - (a_0/b_0)^2}{1 - (a_0/b_0)^2 \exp(3p/E)} = \left(\frac{b}{b_0}\right)^2 a_0^2 \exp(3p/E). \quad (7)$$

Толщина стенок сосуда $h = b - a$ легко получается из выражений (5) и (7):

$$\begin{aligned} h = b - a &= b_0 \sqrt{\frac{1 - (a_0/b_0)^2}{1 - (a_0/b_0)^2 \exp(3p/E)}} \left(1 - \frac{a_0}{b_0} \exp(3p/2E) \right) = \\ &= b \left(1 - \frac{a_0}{b_0} \exp(3p/2E) \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Результаты (5), (7), (8) удобно представить в безразмерном виде. Для этого введём пять безразмерных обозначений

$$\beta = \frac{b}{b_0}, \quad \alpha = \frac{a}{b_0}, \quad \beta_0 = \frac{a_0}{b_0}, \quad \eta = h/h_0, \quad \gamma = \frac{p}{E}. \quad \beta > 1; \quad \beta_0 < 1. \quad (9)$$

Эти переменные можно трактовать следующим образом: β – относительный внешний диаметр – это внешний диаметр сосуда при давлении p по отношению к внешнему диаметру в нормальном состоянии; α – относительный внутренний диаметр – это внутренний диаметр сосуда при давлении p по отношению к внешнему диаметру в нормальном состоянии; β_0 – отношение внутреннего диаметра к внешнему в нормальном состоянии; η – отношение толщины стенок при давлении p к толщине стенок в нормальном состоянии; γ – относительное давление.

Очевидны следующие неравенства: $\beta > 1$; $\beta_0 < 1$.

С учетом безразмерных обозначений, относительные диаметры и толщины стенок запишутся как

$$\beta^2 = \frac{1 - \beta_0^2}{1 - (\beta_0 \exp(3\gamma/2))^2}; \quad (10)$$

$$\alpha^2 = \frac{1 - \beta_0^2}{1 - (\beta_0 \exp(3\gamma/2))^2} \beta_0^2 \exp(3\gamma), \quad \alpha = \beta \beta_0 \exp(3\gamma/2); \quad (11)$$

$$\eta = h/h_0 = (\beta - \alpha)/(1 - \beta_0) = \sqrt{\frac{(1 + \beta_0)(1 - \beta_0 \exp(\gamma/2))}{(1 - \beta_0)(1 + \beta_0 \exp(\gamma/2))}}. \quad (12)$$

В этом случае безразмерное критическое давление (для цилиндра) равно

$$\gamma_{cr} = \frac{2}{3} \ln(1/\beta_0). \quad (13)$$

Заметим, что величины α , β , η при $\gamma = 0$ обращаются в единицу, есть имеет место нормальное состояние сосуда при отсутствии избыточного давления.

Решение для сферы при тех же предположениях, что и для цилиндра.

Как известно, связь между параметрами толстостенного цилиндра и давлением записывается как

$$\frac{dp}{db} = \frac{4E}{3ba^3} (b^3 - a^3). \quad (14)$$

В силу несжимаемости площадь поперечного сечения стенок сферы будет постоянной:

$$b^3 - a^3 = b_0^3 - a_0^3 \equiv V_0. \quad (15)$$

Применяя аналогичный подход, что и для цилиндра, получим

$$p = \frac{4E}{9} \ln \left(\frac{(b^3 - V_0)b_0^3}{b^3 a_0^3} \right). \quad (16)$$

Разрешая (4) относительно b^2 , имеем

$$b^3 = b_0^3 \left[1 - \left(\frac{a_0}{b_0} \right)^3 \right] / \left[1 - \left(\frac{a_0}{b_0} \exp(3p/4E) \right)^3 \right]. \quad (17)$$

Из этой формулы видно, что знаменатель обращается в нуль при

$$p_{cr} = \frac{4E}{3} \ln \left(\frac{b_0}{a_0} \right). \quad (18)$$

Критическое давление для сферы в два раза больше, чем для цилиндра, что показывает, что сфера в два раза крепче цилиндра при тех же конструктивных характеристиках.

Учитывая условие несжимаемости (15), для внутреннего диаметра сосуда a получим

$$a^3 = \left(\frac{a_0}{b_0} \exp(3p/4E) \right)^3 b_0^3 \frac{1 - (a_0/b_0)^3}{1 - \left(\frac{a_0}{b_0} \exp(3p/4E) \right)^3}. \quad (19)$$

Толщина стенок сосуда $h = b - a$ легко получается из выражений (17) и (19)

$$h = b - a = b \left(1 - \frac{a_0}{b_0} \exp(3p/4E) \right). \quad (20)$$

С учетом безразмерных обозначений (9), относительные диаметры и толщины стенок запишутся как

$$\beta^3 = \frac{1 - \beta_0^3}{1 - (\beta_0 \exp(3\gamma/4))^3}; \quad (21)$$

$$\alpha = \beta \beta_0 \exp(3\gamma/4); \quad (22)$$

$$\eta = h/h_0 = (\beta - \alpha)/(1 - \beta_0) = \beta(1 - \beta_0 \exp(3\gamma/4))/(1 - \beta_0). \quad (23)$$

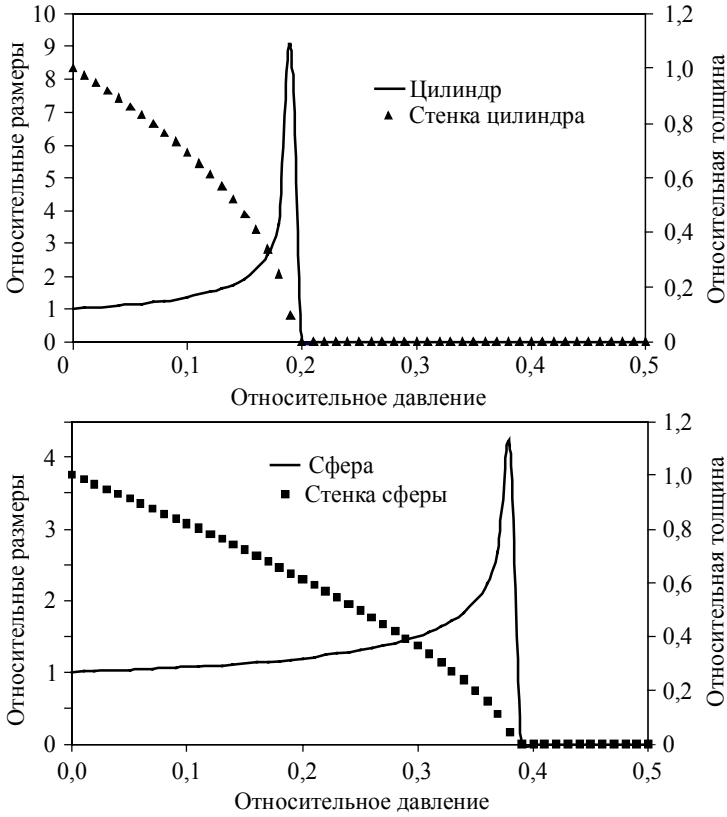
В этом случае безразмерное критическое давление (для сферы)

$$\gamma_{cr} = \frac{4}{3} \ln(1/\beta_0). \quad (24)$$

Приведём графики зависимости относительного внешнего диаметра β и относительной толщины стенок η от величины относительного давления γ для цилиндра и сферы.

Обе диаграммы приведены для значения начального относительного диаметра $\beta_0 = 0,75$. На каждой диаграмме приведено два графика: сплошной линией показаны внешние диаметры цилиндра или сферы, треугольничками – толщина стенок, отложенная по правой вспомогательной шкале. При приближении к критическому давлению видно, что диаметр резко возрастает, а толщина стенок стремится к нулю. Причём скорость убывания толщины стенок в зависимости от диаметра гораздо больше для сферы, чем для цилиндра, что очевидно из геометрических соображений.

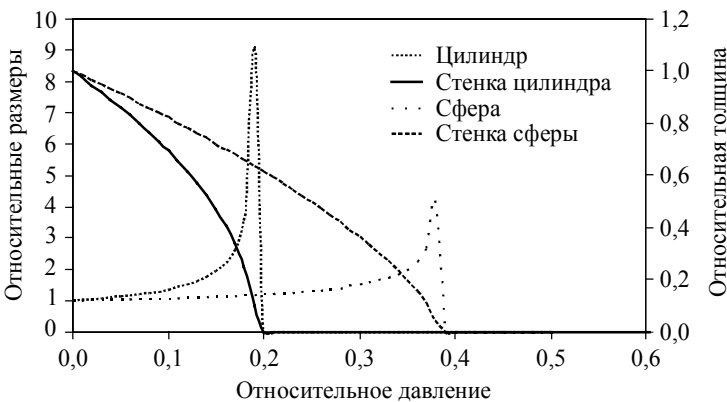
Реальная картина появления аневризмы в капилляре выглядит так: на одном из участков стенки капилляра вследствие биохимических процессов появляется пятно с ослабленными упругими характеристиками (модуль Юнга E уменьшается, а безразмерное давление $\gamma = p/E$ возрастает). Это приводит к локальному выпячиванию стенки и, следовательно, к уменьшению её толщины. С развитием процесса толщина стенки всё более уменьшается (см. диаграмму), и при приближении к критическому давлению происходит катастрофическое уменьшение толщины стенки при быстром увеличении диаметра аневризмы с неизбежным прорывом.



Для количественных оценок воспользуемся значениями для эндотелия, взятыми из работы [4]:

- модуль Юнга $E \approx 3 \cdot 10^5 \text{ Па} \approx 2300 \text{ Торр}$;
- начальное давление $p_0 \approx 10^3 \text{ Па} \approx 10\text{--}20 \text{ Торр}$.

На повреждённом участке сосуда модуль Юнга существенно меньше, чем на здоровом и величина γ_0 возрастает в 10 раз, что ведет к аневризме при меньшем давлении.



ЛИТЕРАТУРА

1. Бунин А.Я., Кацнельсон Л.А., Яковлев А.А. Микроциркуляция глаза. М.: Медицина, 1984. 173 с.
2. Марголис М.Г. Изменения органа зрения при эндокринных заболеваниях // Патология органа зрения при общих заболеваниях. М.: Медицина, 1982. С. 133–180.
3. Амензаде Ю.А. Теория упругости. 3-е изд. М.: Высшая школа, 1976.
4. Каро К., Педли Т., Шротер Р., Сид У. Механика кровообращения. М.: Мир, 1981. 624 с.

Статья принята в печать 05.09.2010г.

Shilova O.G., Klykov I. I., Poponin V.S., Kosheutov A.V. ANEURISM FORMATION IN CAPILLARIES. Large-scale deformations of a homogeneous sphere and a cylinder obeying Hooke's law were considered. It was shown that, under certain conditions, the deformations acquire catastrophic character. The magnitude of pressure and strength properties of vessels at which the deformations are boosting at high rates were estimated.

Keywords: wall of capillary, elastic material, high deformations, critical pressure, vessel rupture

SHILOVA Olga Gennad'evna (Siberian State Medical University)

E-mail: vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru

KLYKOV Ivan Ivanovich (Tomsk State University)

E-mail: ykar@hotmail.ru

POPONIN Vladimir Sergeevich (Tomsk State University)

E-mail: posv@mail.tomsknet.ru

KOSHEUTOV Aleksei Vladimirovich (Tomsk Polytechnic University)

E-mail: alex_k@hotmail.com