

УДК 519.6

Б.М. Шумилов

**АЛГОРИТМ С РАСЩЕПЛЕНИЕМ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ
ЭРМИТОВЫХ КУБИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ**

В статье исследован неявный метод разложения эрмитовых кубических сплайн-вейвлетов. С использованием расщепления по четным и нечетным узлам получен параллельный алгоритм вейвлет-преобразования эрмитовых кубических сплайнов в виде решения двух трехдиагональных систем линейных уравнений со строгим диагональным преобладанием.

Ключевые слова: эрмитовы сплайны, вейвлеты, соотношения разложения и восстановления.

Вейвлетом называется малая, то есть быстро затухающая волна, множество сжатий и смещений которой порождает пространство ограниченных функций на всей числовой оси [1 – 3]. Вейвлеты используют в тех случаях, когда результат анализа некоторого сигнала должен содержать не только перечисление его характерных частот, но и сведения о локальных координатах, при которых эти частоты проявляют себя. Это бывает важно при обработке и анализе нестационарных (во времени) или неоднородных (в пространстве) сигналов. И. Добеши [1] впервые построила ортонормальные вейвлеты неполиномиального типа с компактными носителями. Недостатками данных вейвлетов является то, что они не имеют аналитического представления и графически похожи на фрактальные кривые. Чуи и др. [2, 3] построили полуортонормальные сплайн-вейвлеты. В силу существования явного базиса их можно непосредственно использовать в методах типа Галеркина, однако недостатком данных вейвлетов является то, что они определены на достаточно широком носителе. В ряде работ [4 – 7] уменьшение носителя достигалось построением эрмитовых сплайн-мультивейвлетов, у которых с каждым узлом связано более одной базисной функции.

Вторым важным аспектом применения сплайн-вейвлетов является то, что для них, в отличие от вейвлетов Добеши, не существует явных конечных формул разложения. Поэтому приходится обходиться приближенными соотношениями для главных коэффициентов разложения [2] либо прибегать к решению систем линейных алгебраических уравнений, для которых не гарантирована хорошая обусловленность [3]. В данной работе для случая эрмитовых кубических сплайнов предлагается новый эффективный алгоритм вычисления вейвлет-преобразования на основе впервые полученных в [6, 8] конечных неявных соотношений разложения с расщеплением по четным и нечетным узлам.

Построение системы базисных сплайн-вейвлетов

Отправной точкой для построения вейвлет-преобразования является набор вложенных пространств $\dots V_{L-1} \subset V_L \subset V_{L+1} \dots$. Для случая эрмитовых кубических сплайнов пространство V_L является пространством сплайнов степени 3 гладкости C^1 на отрезке $[a, b]$ с равномерной сеткой узлов $\Delta^L: u_i = a + (b - a) i / 2^L$, $i = 0, 1, \dots, 2^L$, $L \geq 0$, и базисными функциями $N_{i,k}^L(v) = \varphi_k(v - i)$, $k = 0, 1 \forall i$, где

$v = 2^L(u - a) / (b - a) + 1$, с центрами в целых числах, порожденными сжатиями и сдвигами двух масштабирующих функций вида [9] (рис. 1, а):

$$\varphi_0(t) = \begin{cases} t^2(3-2t), & 0 \leq t \leq 1, \\ (2-t)^2(2t-1), & 1 \leq t \leq 2, \\ 0, & t \notin [0, 2]; \end{cases} \quad \varphi_1(t) = \begin{cases} t^2(t-1), & 0 \leq t \leq 1, \\ (2-t)^2(t-1), & 1 \leq t \leq 2, \\ 0, & t \notin [0, 2]. \end{cases}$$

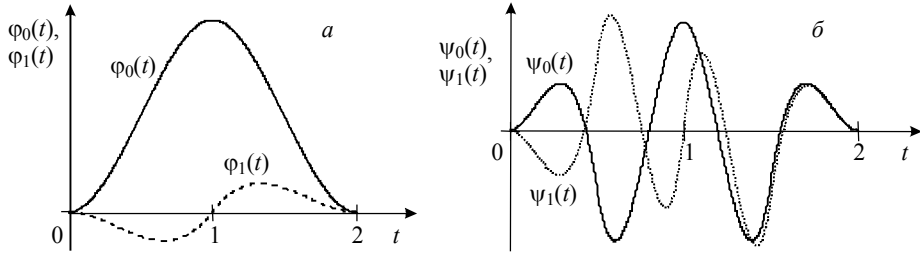


Рис. 1. Графики масштабирующих функций $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$ (а) и вид симметричного и несимметричного «материнских» вейвлетов $\psi_0(t)$, $\psi_1(t)$ (б)

С использованием вейвлет-преобразования функция в пространстве V_L прореживается на два подпространства, V_{L-1} и W_{L-1} . При этом «более грубый» уровень представления функции в V_{L-1} получается из «более подробного» уровня представления функции в V_L посредством прореживания (удаления каждого второго, как правило, отсчета). Здесь необходимо лишь, чтобы каждая базисная функция в V_{L-1} могла быть выражена в виде линейной комбинации базисных функций в V_L . В терминах масштабирующих функций это свойство называется масштабным соотношением, которое для эрмитовых сплайнов 3-й степени и коэффициента прореживания 2 можно получить в виде следующих формул [10]:

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) &= \varphi_0(2t-1) + \frac{1}{2}(\varphi_0(2t) + \varphi_0(2t-2)) + \frac{3}{4}(\varphi_1(2t) - \varphi_1(2t-2)), \\ \varphi_1(t) &= \frac{1}{2}\varphi_1(2t-1) - \frac{1}{8}(\varphi_1(2t) + \varphi_1(2t-2) + \varphi_0(2t) - \varphi_0(2t-2)), \quad 0 \leq t \leq 2. \end{aligned} \quad (1)$$

Базисными функциями для V_{L-1} будут функции $N^{L-1}_{i,k}$, с носителями в два раза большими по ширине и центрами в четных целых числах. Следующим этапом является определение пространства вейвлетов. В классической теории вейвлетов построение производится сжатиями и сдвигами единственного «материнского» вейвлета на бесконечной равномерной сетке, на всей числовой оси, и пространство W_{L-1} является ортогональным дополнением пространства сплайн-разложений на прореженной сетке V_{L-1} до пространства сплайнов на густой сетке V_L по отношению к обычному скалярному произведению. Это означает, что пространство V_L представляет прямую сумму V_{L-1} и W_{L-1} : $V_L = V_{L-1} \oplus W_{L-1}$. В отличие от классических вейвлетов, в [7] были найдены «материнские» вейвлеты вида (рис. 1, б):

$$\begin{aligned} \psi_0(t) &= -2\varphi_0(2t) + 4\varphi_0(2t-1) - 2\varphi_0(2t-2) - 21\varphi_1(2t) + 21\varphi_1(2t-2), \\ \psi_1(t) &= \varphi_0(2t) - \varphi_0(2t-2) + 9\varphi_1(2t) + 12\varphi_1(2t-1) + 9\varphi_1(2t-2), \end{aligned} \quad (2)$$

для которых удовлетворяются условия ортогональности относительно скалярного произведения с производными:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi'_k(x-i) \psi'_l(x-j) dx = 0 \quad \forall i, j \text{ и } k, l = 0, 1.$$

Очевидно, что носитель данных вейвлетов много меньше минимального в классической теории сплайн-вейвлетов, а именно, $[0, 2] \subset [0, 7]$. Также в [7] было отмечено, что эти вейвлеты удобны для решения по методу Галеркина обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с нулевыми краевыми условиями Дирихле. А в [11] они были успешно использованы при решении интегральных уравнений второго рода.

Что касается моделирования кривых, то часто ограничиваются рассмотрением периодического случая, когда первая и последняя точки кривой совпадают. Это соответствует аппроксимации замкнутых кривых [12]. Для незамкнутых кривых проще всего вычесть из исходных координат уравнение прямой, соединяющей первую и последнюю точки. Тогда их координаты обращаются в нуль, и соответствующие базисные функции удаляются из базиса. В результате, как нетрудно проверить непосредственным вычислением интегралов от произведения производных соответствующих базисных функций, условия ортогонального дополнения выполняются на конечном отрезке аппроксимации. Этот прием позволяет избежать существенных трудностей, связанных с построением приграничных вейвлетов [3, 4]. После такой модификации данных на любой сетке Δ^L , $L \geq 0$, кубический эрмитов сплайн с нулевыми значениями при $u=a, b$ может быть представлен как

$$S^L(u) = \sum_{i=1}^{2^L-1} C_i^{L,0} N_{i,0}^L(u) + \sum_{i=0}^{2^L} C_i^{L,1} N_{i,1}^L(u), \quad a \leq u \leq b, \quad (3)$$

где коэффициенты $C_i^{L,k}$, $k=0, 1$, являются заданными значениями аппроксимируемой функции и соответственно производными в узлах. Для дальнейшего удобно записать базисные сплайн-функции в виде единой матрицы-строки $\phi^L = [N_{0,1}^L, N_{1,0}^L, N_{1,1}^L, \dots, N_{2^L,1}^L]$ и впредь собирать узловые значения сплайна и

производных в вектор $C^L = [C_0^{L,1}, C_1^{L,0}, C_1^{L,1}, \dots, C_{2^L}^{L,1}]^T$. Тогда уравнение (3) переписывается как $S^L(u) = \phi^L(u) C^L$.

Аналогично обозначим базисные вейвлет-функции как $M_{i,k}^L = \psi_k(v-i)$, $k=0, 1 \forall i$, и запишем их в виде матрицы-строки $\psi^L = [M_{0,1}^L, M_{1,0}^L, M_{1,1}^L, \dots, M_{2^L,1}^L]$. Соответствующие коэффициенты вейвлет-разложения на сетке Δ^L будем собирать в вектор $D^L = [D_0^{L,1}, D_1^{L,0}, D_1^{L,1}, \dots, D_{2^L}^{L,1}]^T$. Для сетки Δ^{L-1} , $L \geq 1$, можно записать функции ϕ^{L-1} и ψ^{L-1} в виде линейных комбинаций функций ϕ^L , так как каждую широкую базисную функцию внутри отрезка аппроксимации можно построить из трех, а по краям интервала из двух, пар узких базисных функций $\phi^{L-1} = \phi^L P^L$ и $\psi^{L-1} = \phi^L Q^L$, где блоки матрицы P^L составлены из коэффициентов соотношения (1):

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 0 & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix}^T,$$

тогда как блоки матрицы Q^L – из коэффициентов соотношения (2):

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 & -2 & -21 & 0 & 21 \\ 1 & 0 & -1 & 9 & 12 & 9 \end{bmatrix}^T.$$

Любая функция в V_L может быть записана в виде суммы какой-то функции в V_{L-1} и какой-то функции в W_{L-1} . Следовательно, справедливы равенства

$$\phi^L C^L = \phi^{L-1} C^{L-1} + \psi^{L-1} D^{L-1} = \phi^L P^L C^{L-1} + \psi^L Q^L D^{L-1}. \quad (4)$$

Таким образом, восстановление коэффициентов эрмитового кубического сплайна с нулевыми значениями по концам отрезка аппроксимации из коэффициентов вейвлет-разложения может быть записано как $C^L = P^L C^{L-1} + Q^L D^{L-1}$, или, используя обозначения для блочных матриц,

$$C^L = [P^L | Q^L] \begin{bmatrix} C^{L-1} \\ D^{L-1} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Следующий пример представляет матрицу $[P^L | Q^L]$, соответствующую $L = 3$:

$$[P^3 | Q^3] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & & & & & & & & 12 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & & & & & & -1 & -2 & 1 \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{8} & & & & & & 9 & -21 & 9 \\ & 1 & 0 & & & & & & & 4 & 0 \\ & 0 & \frac{1}{2} & & & & & & & 0 & 12 \\ & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & & & & -2 & -1 & -2 & 1 \\ -\frac{3}{4} & -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{8} & & & & & 21 & 9 & -21 & 9 \\ & 1 & 0 & & & & & & & 4 & 0 \\ & 0 & \frac{1}{2} & & & & & & & 0 & 12 \\ & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & & & & -2 & -1 & -2 & 1 \\ -\frac{3}{4} & -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{8} & & & & & 21 & 9 & -21 & 9 \\ & 1 & 0 & & & & & & & 4 & 0 \\ & 0 & \frac{1}{2} & & & & & & & 0 & 12 \\ & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & & & & & -2 & -1 & 1 \\ -\frac{3}{4} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & & & & & & 21 & 9 & 9 \\ & & & \frac{1}{2} & & & & & & & 12 \end{bmatrix}.$$

Здесь и далее пустые позиции представляют собой нулевые элементы.

Определим блочную матрицу, обратную к матрице $[P^L | Q^L]$:

$$\begin{bmatrix} A^L \\ B^L \end{bmatrix} = [P^L | Q^L]^{-1}.$$

Тогда процесс создания версии с низшим разрешением C^{L-1} , характеризуемой меньшим количеством коэффициентов, можно выразить матричным уравнением

$$C^{L-1} = A^L C^L,$$

где A^L является матрицей размерности $2^L \times 2^{L+1}$.

При этом потерянные детали собираются в другой вектор D^{L-1} , определяемый выражением

$$D^{L-1} = B^L C^L,$$

где B^L – матрица той же размерности. Матрицы A^L и B^L называют фильтрами анализа, а матрицы P^L и Q^L – фильтрами синтеза [3].

Процедуру разбиения C^L на часть C^{L-1} , соответствующую низшему разрешению, и уточняющие коэффициенты D^{L-1} можно применить рекурсивно и к самой

[illegible]

Найдем коэффициенты первого из соотношений (7). В точках отрезка $(-1, 2)$, согласно табл. 1, для сплайнов имеем соответственно при

$$x = -\frac{1}{2}: \quad a_{-2}^0 = b_{-1}^{00}(-2) + c_{-1}^{00} \frac{1}{2} + b_{-1}^{01} + c_{-1}^{01} \left(-\frac{1}{8}\right),$$

$$x = 0: \quad a_{-1}^0 = b_{-1}^{00} \cdot 4 + c_{-1}^{00},$$

$$x = \frac{1}{2}: \quad a_0^0 = b_{-1}^{00}(-2) + b_0^{00}(-2) + c_{-1}^{00} \frac{1}{2} + c_0^{00} \frac{1}{2} + b_{-1}^{01}(-1) + b_0^{01} + c_{-1}^{01} \frac{1}{8} + c_0^{01} \left(-\frac{1}{8}\right),$$

$$x = 1: \quad a_1^0 = b_0^{00} \cdot 4 + c_0^{00},$$

$$x = \frac{3}{2}: \quad a_2^0 = b_0^{00}(-2) + c_0^{00} \frac{1}{2} + b_0^{01}(-1) + c_0^{01} \frac{1}{8}.$$

Аналогично, для производных при

$$x = -\frac{1}{2}: \quad 0 = b_{-1}^{00}(-42) + c_{-1}^{00} \frac{3}{2} + b_{-1}^{01} \cdot 18 + c_{-1}^{01} \left(-\frac{1}{4}\right),$$

$$x = 0: \quad 0 = b_{-1}^{01} \cdot 24 + c_{-1}^{01},$$

$$x = \frac{1}{2}: \quad 0 = b_{-1}^{00} \cdot 42 + b_0^{00}(-42) + c_{-1}^{00} \left(-\frac{3}{2}\right) + c_0^{00} \frac{3}{2} + b_{-1}^{01} \cdot 18 + b_0^{01} \cdot 18 + \\ + c_{-1}^{01} \left(-\frac{1}{4}\right) + c_0^{01} \left(-\frac{1}{4}\right),$$

$$x = 1: \quad 0 = b_0^{01} \cdot 24 + c_0^{01},$$

$$x = \frac{3}{2}: \quad 0 = b_0^{00} \cdot 42 + c_0^{00} \left(-\frac{3}{2}\right) + b_0^{01} \cdot 18 + c_0^{01} \left(-\frac{1}{4}\right).$$

Одно из решений полученной системы уравнений имеет вид

$$a_{-1}^0 = a_1^0 = 0, \quad b_{-1}^{00} = 1, \quad b_{-1}^{01} = 1, \quad c_{-1}^{00} = c_{-1}^{01} = -4, \quad b_{-1}^{01} = 2, \quad b_0^{01} = -2, \quad c_{-1}^{01} = -48, \\ c_0^{01} = 48, \quad a_{-2}^0 = a_2^0 = 4, \quad a_0^0 = -24.$$

Имеется еще одно решение, когда

$$a_{-2}^0 = a_{-1}^0 = 0, \quad b_{-1}^{00} = 1, \quad c_{-1}^{00} = 28, \quad b_{-1}^{00} = c_{-1}^{00} = b_{-1}^{01} = b_0^{01} = c_{-1}^{01} = c_0^{01} = 0, \\ a_0^0 = a_2^0 = 12, \quad a_1^0 = 32.$$

И для случая, когда $a_{-1}^0 = a_2^0 = 0$, имеется третье решение, симметричное полученному.

Найдем коэффициенты второго из соотношений (7). С помощью табл. 1 для значений сплайнов имеем следующие соотношения соответственно в точках

$$x = -\frac{1}{2}: \quad 0 = b_{-1}^{10}(-2) + c_{-1}^{10} \frac{1}{2} + b_{-1}^{11} + c_{-1}^{11} \left(-\frac{1}{8}\right),$$

$$x = 0: \quad 0 = b_{-1}^{10} \cdot 4 + c_{-1}^{10},$$

$$x = \frac{1}{2}: \quad 0 = b_{-1}^{10}(-2) + b_0^{10}(-2) + c_{-1}^{10} \frac{1}{2} + c_0^{10} \frac{1}{2} + b_{-1}^{11}(-1) + b_0^{11} + c_{-1}^{11} \frac{1}{8} + c_0^{11} \left(-\frac{1}{8}\right),$$

$$x = 1: \quad 0 = b_0^{10} \cdot 4 + c_0^{10},$$

$$x = \frac{3}{2}: \quad 0 = b_0^{10}(-2) + c_0^{10} \frac{1}{2} + b_0^{11}(-1) + c_0^{11} \frac{1}{8}.$$

Для производных соответственно при

$$x = -\frac{1}{2}: \quad 2a_{-2}^1 = b_{-1}^{10}(-42) + c_{-1}^{10}\frac{3}{2} + b_{-1}^{11} \cdot 18 + c_{-1}^{11}\left(-\frac{1}{4}\right),$$

$$x = 0: \quad 2a_{-1}^1 = b_{-1}^{11} \cdot 24 + c_{-1}^{11},$$

$$x = \frac{1}{2}: \quad 2a_0^1 = b_{-1}^{10} \cdot 42 + b_0^{10}(-42) + c_{-1}^{10}\left(-\frac{3}{2}\right) + c_0^{10}\frac{3}{2} + b_{-1}^{11} \cdot 18 + b_0^{11} \cdot 18 + \\ + c_{-1}^{11}\left(-\frac{1}{4}\right) + c_0^{11}\left(-\frac{1}{4}\right),$$

$$x = 1: \quad 2a_1^1 = b_0^{11} \cdot 24 + c_0^{11},$$

$$x = \frac{3}{2}: \quad 2a_2^1 = b_0^{10} \cdot 42 + c_0^{10}\left(-\frac{3}{2}\right) + b_0^{11} \cdot 18 + c_0^{11}\left(-\frac{1}{4}\right).$$

Одно из решений полученной системы уравнений имеет вид

$$a_{-1}^1 = a_1^1 = 0, b_{-1}^{10} = 1, b_{-1}^{10} = -1, c_{-1}^{10} = 4, c_{-1}^{10} = -4, b_{-1}^{11} = b_{-1}^{11} = -1, \\ c_{-1}^{11} = c_{-1}^{11} = 24, a_{-2}^1 = a_2^1 = 12, a_0^1 = -72.$$

Имеется еще одно решение, когда

$$a_{-2}^1 = a_{-1}^1 = 0, b_{-1}^{10} = 1, c_{-1}^{10} = 8, b_{-1}^{10} = b_{-1}^{10} = c_{-1}^{10} = c_{-1}^{10} = b_{-1}^{11} = c_{-1}^{11} = 0, \\ a_0^1 = a_2^1 = 8, a_1^1 = 16.$$

Для случая, когда $a_{-1}^1 = a_1^1 = 0$, решение симметрично полученному.

По краям отрезка аппроксимации, согласно построению, функции φ_0 и ψ_0 отбрасываются. Поэтому на двух крайних слева шагах сетки Δ^L после приведения к сетке с единичным шагом на отрезке $[0, 2]$ аналогично получаются разложения

$$16 \varphi_1(2x+1) + 8 \varphi_1(2x) = \psi_1(x+1) + 8 \varphi_1(x+1), \\ -28 \varphi_0(2x) + 4 \varphi_0(2x-2) = \psi_0(x) + 4\psi_1(x+1) - 2\psi_1(x) - 4 \varphi_0(x) - \\ - 96 \varphi_1(x+1) + 48 \varphi_1(x), \\ -60 \varphi_1(2x) + 12 \varphi_1(2x-2) = \psi_0(x) - 2\psi_1(x+1) - \psi_1(x) - 4\varphi_0(x) + \\ + 48 \varphi_1(x+1) + 24 \varphi_1(x).$$

На правом конце разложения симметричны полученным. И на нулевом уровне разложения разложения имеют вид

$$16 \varphi_1(2x+1) + 8 \varphi_1(2x) = \psi_1(x+1) + 8 \varphi_1(x+1), \\ -32\varphi_0(2x) = 4\psi_1(x+1) - 4\psi_1(x) - 96 \varphi_1(x+1) + 96 \varphi_1(x), \\ -48 \varphi_1(2x) = -2\psi_1(x+1) - 2\psi_1(x) + 48 \varphi_1(x+1) + 48 \varphi_1(x), \\ 8 \varphi_1(2x) + 16 \varphi_1(2x-1) = \psi_1(x) + 8 \varphi_1(x).$$

Полученные выше соотношения можно представить в виде равенства (6), где блоки матриц G^L и R^L составлены из коэффициентов левых и правых частей полученных разложений соответственно. Лемма 1 доказана.

Следствие 1. Для любого уровня разрешения L матрица вейвлет-разложения эрмитовых кубических сплайнов удовлетворяет уравнению

$$\left[\frac{A^L}{B^L} \right] G^L = R^L.$$

Доказательство. Из определения матрицы вейвлет-разложения следует, что

$$\Phi^L = [\Phi^{L-1} | \Psi^{L-1}] \cdot \begin{bmatrix} A^L \\ B^L \end{bmatrix}.$$

Подставляя полученное разложение в равенство (6) и учитывая линейную независимость базисных функций и вейвлетов, приходим к утверждению следствия 1.

Алгоритм с применением расщепления

Из полученного результата вытекает следующее утверждение, дающее последовательность вычисления коэффициентов вейвлет-разложения по известным коэффициентам сплайн-разложения на любом уровне разрешения L .

Теорема 1. Пусть величины $\Xi^L = [\xi_0^{L,1}, \xi_1^{L,0}, \xi_1^{L,1}, \dots, \xi_{2^L}^{L,1}]^T$, $L \geq 1$, получены из соотношений вида

$$\xi_i^{L,0} = \frac{1}{32} C_i^{L,0}, i = 2, 4, \dots, 2^L - 2; \quad \xi_i^{L,1} = \frac{1}{16} C_i^{L,1}, i = 0, 2, \dots, 2^L;$$

$$\begin{bmatrix} -28 & 4 & & & \\ 4 & -24 & 4 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 4 & -28 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi_1^{L,0} \\ \xi_3^{L,0} \\ \vdots \\ \xi_{2^{L-1}}^{L,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1^{L,0} - 12\xi_2^{L,0} \\ C_3^{L,0} - 12(\xi_2^{L,0} + \xi_4^{L,0}) \\ \vdots \\ C_{2^{L-1}}^{L,0} - 12\xi_{2^{L-2}}^{L,0} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -60 & 12 & & & \\ 12 & -72 & 12 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 12 & -60 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi_1^{L,1} \\ \xi_3^{L,1} \\ \vdots \\ \xi_{2^{L-1}}^{L,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1^{L,1} - 8(\xi_0^{L,1} + \xi_2^{L,1}) \\ C_3^{L,1} - 8(\xi_2^{L,1} + \xi_4^{L,1}) \\ \vdots \\ C_{2^{L-1}}^{L,1} - 8(\xi_{2^{L-2}}^{L,1} + \xi_{2^{L-1}}^{L,1}) \end{bmatrix};$$

$$\xi_1^{1,0} = -\frac{1}{32} C_1^{1,0}, \quad \xi_1^{1,1} = -\frac{1}{48} (C_1^{1,1} - 8(\xi_0^{1,1} + \xi_2^{1,1})).$$

Здесь точки, расставленные по диагонали, означают, что предшествующая строка повторяется соответствующее число раз, сдвигаясь при этом вправо на одну позицию.

Тогда коэффициенты вейвлет-разложения на низшем уровне представляют собой результат линейного отображения

$$\begin{bmatrix} C^{L-1} \\ D^{L-1} \end{bmatrix} = R^L \Xi^L.$$

Доказательство. Из соотношения (6), используя первое равенство в (4), находим

$$[\Phi^{L-1} | \Psi^{L-1}] \begin{bmatrix} C^{L-1} \\ D^{L-1} \end{bmatrix} = \Phi^L C^L = [\Phi^{L-1} | \Psi^{L-1}] R^L (G^L)^{-1} C^L.$$

Вычислим вспомогательные переменные Ξ^L из системы линейных уравнений $G^L \Xi^L = C^L$. При этом, как нетрудно видеть, матрица G^L представляет собой ленточную матрицу. Более того, после расщепления системы по четным и нечетным

узлам алгоритм сводится к решению независимо двух трехдиагональных систем уравнений. Теорема 1 доказана.

Теорема 1 полностью определяет вейвлет-разложение эрмитового кубического сплайна с нулевыми значениями по концам отрезка аппроксимации на любом уровне разрешения.

Утверждение 1. *Полученные выше соотношения вейвлет-разложения для эрмитовых сплайнов 3-й степени обладают свойствами существования, единственности и обратимости.*

Доказательство. Поскольку невырожденность линейных отображений гарантирована линейной независимостью базисных функций и равенством размерностей соответствующих пространств, а отыскание коэффициентов разложения сводится к решению трехдиагональных систем уравнений теоремы 1, то для доказательства достаточно наличия у них строгого диагонального преобладания. Ч.т.д.

Пример

Пусть дана кубическая функция $f(x) = x(x-2)(x-1)$ с числом разбиений $n = 2^L$ на интервале $0 \leq x \leq 1$, длина шага $\Delta x = 1/n$, где L – уровень разрешения. Индекс L связан с числом используемых значений функции и производной на интервале при выполнении вейвлет-преобразования.

В данном примере начнем с уровня разрешения $L = 5$, то есть $n = 32$.

При условии $f'(x) = 3x^2 - 6x + 1$ находим последовательно при

$$L = 5: D^{4,0} = [0, \dots, 0]^T, \quad D^{4,1} = [0,121; 0,09898; 0,0784; 0,05925; 0,04151; 0,02519; 0,01029; -0,003193; -0,01525; -0,0259; -0,03512; -0,04293; -0,04931; -0,05428; -0,05783; -0,05996; -0,06067]^T;$$

$$L = 4: D^{3,0} = [0, \dots, 0]^T, \quad D^{3,1} = [0,06049; 0,0392; 0,02075; 0,005144; -0,007627; -0,01756; -0,02466; -0,02891; -0,03033]^T;$$

$$L = 3: D^{2,0} = [0, 0, 0]^T, \quad D^{2,1} = [0,03024; 0,01038; -0,003814; -0,01233; -0,01517]^T;$$

$$L = 2: D^{1,0} = 0, \quad D^{1,1} = [0,01512; -0,001907; -0,007583]^T;$$

$L = 1$: на последнем шаге остается два коэффициента разложения, близких к значениям производной на концах интервала $C^{0,1} = [2,12103; -0,96979]^T$, и два вейвлет-коэффициента $D^{0,1} = [0,00756; -0,00379]^T$.

Резльтирующее вейвлет-разложение сплайна $S^5(u)$ с нулевыми значениями по концам отрезка аппроксимации может быть приближенно записано в виде

$$S^5(u) \approx \sum_{i=0}^1 C_i^{0,1} N_{i,1}^0(u) + \sum_{j=0}^4 \sum_{i=0}^{2^j} C_i^{j,1} M_{i,1}^j(u), \quad 0 \leq u \leq 1.$$

Таким образом, в данном случае для сжатия достаточно 38 значений, что дает коэффициент сжатия $62/38 \approx 1,632$.

Заключение

Представленные в статье схемы построения эрмитовых кубических сплайн-вейвлетов с уменьшенным носителем и получения для них неявных соотношений разложения с расщеплением по четным и нечетным узлам могут быть распространены и на сплайны более высокой степени [13, 14] и предоставляют широкие возможности для создания параллельных алгоритмов построения и использования эрмитовых сплайн-вейвлетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам: пер. с англ. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 332 с.
2. Чуи Ч. Введение в вейвлеты: пер. с англ. М.: Мир, 2001. 412 с.
3. Столниц Э., ДеРоуз Т., Салезин Д. Вейвлеты в компьютерной графике: пер. с англ. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. 272 с.
4. Dahmen W., Han B., Jia R.-Q., Kunoth A. Biorthogonal multiwavelets on the interval: cubic Hermite splines // *Constr. Approx.* 2000. V. 16. P. 221–259.
5. Han B. Approximation properties and construction of Hermite interpolants and biorthogonal multiwavelets // *J. Approxim. Theory.* 2001. V. 110. P. 18–53.
6. Попова О.О., Ручкина Ю.Ю., Шумилов Б.М. Построение системы базисных вейвлетов Эрмита для случая неравномерной сетки // 4-я Всерос. науч.-практич. конф. студентов «Молодежь и современные информационные технологии». Томск: ТПУ, 2006. С.37–38.
7. Jia R.-Q., Liu S.-T. Wavelet bases of Hermite cubic splines on the interval // *Advances Computational Mathematics.* 2006. V. 25. P. 23–39.
8. Шумилов Б.М., Эшаров Э.А. Построение эрмитовых сплайн-вейвлетов // *Вестник Томского государственного университета. Приложение.* 2006. № 19. С. 260–266.
9. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.
10. Heil C., Strang G., Strela V. Approximation by translate of refinable functions // *Numer. Math.* 1996. V. 73. P. 75–94.
11. Maleknejad K., Youse M. Numerical solution of the integral equation of the second kind by using wavelet bases of Hermite cubic splines // *Applied Mathematics and Computation.* 2006. V. 183. P. 134–141.
12. Zhao G., Xu S., Li W., Zhu X. Wavelets-based multiresolution representation and manipulation of closed B-spline curves // *Proceedings of IC-SEC.* 2002. P. 490–493.
13. Шумилов Б.М., Эшаров Э.А. Нестационарные сплайн-вейвлеты в ГИС и САПР линейно-протяженных пространственных объектов // *Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета.* 2006. № 1(12). С. 153–163.
14. Турсунов Д.А., Шумилов Б.М., Эшаров Э.А., Турсунов Э.А. Новый тип эрмитовых мультивейвлетов пятой степени // Пятая Сибирская конференция по параллельным и высокопроизводительным вычислениям: Программа и тезисы докладов (1 – 3 декабря 2009 г.). Томск: Изд-во Том. ун-та, 2009. С. 57–58.

Статья принята в печать 20.10.2010 г.

Shumilov B.M. AN ALGORITHM WITH SPLITTING OF THE WAVELET TRANSFORM OF HERMITIAN CUBIC SPLINES. In this paper an implicit method for the decomposition of Hermitian cubic spline wavelets is investigated. A parallel algorithm of the wavelet transform of Hermitian cubic splines has been found as a solution of two three-diagonal systems of linear equations with a dominating principal diagonal by use of splitting with respect to the even and odd mesh points.

Keywords: Hermitian splines, wavelets, relations of decomposition and restoration

SHUMILOV Boris Mikhailovich (Tomsk State University)

E-mail: b_shumilov@math.tsu.ru