МЕХАНИКА

УДК 519.632:531.252. 517.54

И.А. Александров

КРУЧЕНИЕ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ С КРАТНО-КРУГОВОЙ ОБЛАСТЬЮ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Методами математической теории упругости и конформных отображений решается задача о кручении стержня, сечение которого имеет форму односвязного кругового многоугольника с n-кратной симметрией вращения.

Ключевые слова: *кручение стержня, конформное отображение, комплексная функция кручения, круговой многоугольник, уравнение Шварца.*

Рассматривается задача о кручении изотропного однородного стержня при условии отсутствия объёмных сил и внешних напряжений на его боковой поверхности.

Предполагается, что сечение стержня плоскостью, ортогональной его боковой поверхности, имеет форму некоторого односвязного кругового n-угольника D_n, n=3, 4, …, обладающего n-кратной симметрией вращения относительно точки, принимаемой за начало O прямоугольной системы координат. Её оси абсцисс Ox и ординат Oy лежат в плоскости сечения, а ось аппликат совпадает с осью круговой симметрии стержня.

Задачу будем решать,, пользуясь средствами теории функций комплексного переменного. Примем плоскость Oxy за плоскость комплексного переменного $z=x+iy$, а в качестве вершин области D_n примем точки $e_k = e^{\frac{2\pi(k-1)i}{n}}$, $k = 1,...,n$. Считаем, что ориентированная граница ∂D_n многоугольника D_n состоит из круговых дуг, образующих в e_k внутренние углы области D_n, равные $\alpha\pi$, $0 \le \alpha \le 2$.

При кручении стержня закручивающими парами, векторные моменты которых направлены по оси Ol аппликат, сечения не остаются плоскими, а искривляются. Компоненты смещения точки $z=x+iy \in D_n$ даются формулами [1, с. 518]

$$u = -\tau l y,\ v = \tau l x,\ w = \tau\varphi(x, y)\ ,$$

где τ – постоянная (степень закручивания), а $\varphi(x, y)$ – некоторая гармоническая функция, называемая функцией кручения. Она на ∂D_n удовлетворяет граничному условию

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = y\cos(n, x) - x\cos(n, y),$$

где через n обозначена внешняя нормаль к границе области D_n.

Отметим, что такая функция $\varphi(x,y)$ существует и может быть найдена как решение задачи Неймана, например, методами теории потенциала.

Введём вместо функции $\varphi(x,y)$ сопряжённую с ней гармоническую функцию $\psi(x,y)$, определяемую с точностью до аддитивной постоянной из условий Коши – Римана:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x},\quad (x,y)\in D_n.$$

Эти условия можно обобщить, заменяя дифференцирование по ортогональным направлениям, образованным осями Ox, Oy, на дифференцирование по направлению внешней нормали и направлению по касательной t к ∂D_n, получающейся поворотом нормали на угол $\pi/2$ против хода стрелки часов.. Пусть s – дуга на ∂D_n. Из равенств

$$\cos(n,x)=\cos(t,y)=\frac{dy}{ds},\qquad \cos(n,y)=-\cos(t,x)=-\frac{dx}{ds}$$

и условий Коши – Римана имеем

$$\frac{d\varphi}{dn}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos(n,x)+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos(n,y)=\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{dy}{ds}=\frac{d\psi}{ds}.$$

Граничному условию для $\varphi(x,y)$ можно придать вид

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=y\cos(n,x)-x\cos(n,y)=x\frac{dx}{ds}+y\frac{dy}{ds}=\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(x^2+y^2\right),$$

или, что то же самое,

$$\frac{d\psi}{ds}=\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(x^2+y^2\right).$$

Отсюда следует, что

$$\psi(x,y)=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)+C \text{ на } \partial D_n,$$

где C – произвольная постоянная. Положим её равной нулю. Видим, что граничное условие для функции $\psi(x,y)$ задаётся как её значения на границе области D_n и отыскание $\psi(x,y)$ приводит к задаче Дирихле. Её можно в отдельных случаях эффективно решить, применяя конформные отображения, что мы и сделаем применительно к данной задаче.

Отметим, что компоненты напряжения даются формулами

$$X_l=\mu\tau\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}-y\right),\quad Y_l=\mu\tau\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}+x\right),\quad (x,y)\in D_n.$$

Напряжения X_l, Y_l не меняются при замене ψ на ψ+const, μ – модуль сдвига.

Пусть $F(z)=\varphi(z)+i\psi(z)$ – комплексная функция кручения и $z=f(\zeta)$ – конформное отображение единичного круга $E=\{\zeta: |\zeta|<1\}$, удовлетворяющее условиям: $f(0)=0$, $f(1)=e_0=1$. Существование и единственность такой функции следует из теоремы Римана о конформной эквивалентности плоских областей.

Функция

$$\Omega(\zeta)=-iF(f(\zeta))=\psi(f(\zeta))-i\varphi(f(\zeta)),$$

голоморфная в E, имеет вещественную часть $\psi_1(\zeta)=\psi(f(\zeta))$, принимающую на границе круга E, т.е. при $\zeta=e^{i\theta}$, $0\le\theta\le2\pi$, значения

$$\psi_1\left(e^{i\theta}\right)=\psi\left(f\left(e^{i\theta}\right)\right)=\frac{1}{2}|f(\zeta)|^2,$$

где $f\left(e^{i\theta}\right)$ – точка на D_n, соответствующая точке $e^{i\theta}$ на окружности ∂E. Взаимная однозначность и непрерывность отображения $f:\partial E\to\partial D_n$ следует из теории соответствия границ при конформных отображениях областей, ограниченных непрерывными жордановыми кривыми.

Согласно формуле Шварца, имеем интегральное представление

$$\Omega(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial E}\operatorname{Re}\Omega(\xi)\frac{\xi+\zeta}{\xi-\zeta}\frac{d\xi}{\xi}+i\operatorname{Im}\Omega(0),\quad \zeta\in E,$$

функции $\Omega(\zeta)$ в E через её значения на границе ∂E круга. Эту формулу легко преобразовать к виду

$$\Omega(\zeta)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\partial E}\frac{\operatorname{Re}\Omega(\xi)}{\xi-\zeta}d\xi-\overline{\Omega(0)}$$

и использовать для интегрального представления комплексной функции кручения. Имеем

$$F(f(\zeta))=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\partial E}\frac{\operatorname{Re}\Omega(\xi)}{\xi-\zeta}d\zeta+\text{const}.$$

Полагая здесь $\zeta=f^{-1}(z)$, $z\in D_n$, $2\operatorname{Re}\Omega(\xi)=|f(\xi)|^2$ получаем (отбрасывая постоянную) формулу

$$F(z)=\varphi(z)+i\psi(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial E}\frac{|f(\xi)|^2}{\xi-f^{-1}(z)}d\xi,$$

дающую решения задачи о кручении стержня. Остаётся найти $f(\zeta)$. Удаётся получить её аналитическое представление с использованием гипергеометрической функции.

Так как область D_n совпадает с собой при повороте около нуля на угол, кратный $\frac{2\pi}{n}$, то в силу указанной теоремы справедливо функциональное уравнение $e_k f(\zeta)=f(e_k\zeta)$. Представив $f(\zeta)$ в виде степенного ряда

$$f(\zeta)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\zeta^k,\quad c_1\neq 0,$$

равномерно сходящегося по теореме Тейлора внутри E, имеем

$$\sum_{s=1}^{\infty}e_k c_s\zeta^s=\sum_{s=1}^{\infty}c_s(e_k\zeta)^s.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ζ, находим

$$c_s\left(1-e_k^{s-1}\right)=0,\ s=1,2,\ldots.$$

Отсюда легко следует, что все коэффициенты c_s при $s\neq nl+1$, l=0, 1,…, равны нулю и, значит,

$$f(\zeta)=c_1\zeta+c_{n+1}\zeta^{n+1}+\ldots=\sum_{l=0}^{\infty}c_{\ln+1}z^{\ln+1}.$$

Разложение производной Шварца

$$\{f(z),z\}=\frac{f'''(z)}{f'(z)}-\frac{3}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2$$

в степенной ряд около нуля будет содержать только слагаемые вида $A_l z^{nl-2}$, т.е. представляться рядом вида

$$\sum_{l=1}^{\infty} A_l z^{nl-2}\,.$$

Пусть $p_1=\dfrac{1-\alpha}{2}$, $p_2=\dfrac{1+\alpha}{2}$, $m_1=1-\dfrac{1}{n}$, $m_2=1+\dfrac{1}{n}$.

Функция $f(\zeta)$ отображает круг на круговой многоугольник и, как известно [2, с. 412], удовлетворяет уравнению Шварца, принимающему в рассматриваемом случае вид

$$\frac{w'''}{w'}-\frac{3}{2}\left(\frac{w''}{w'}\right)^2=2p_1p_2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(\zeta-e_k)^2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{M_k}{\zeta-e_k}\,,$$

где M_k – акцессорные постоянные, подлежащие нахождению из геометрических свойств многоугольника.

Так как

$$\prod_{k=1}^{n}(\zeta-e_k)=\zeta^n-1 \text{ и } \sum_{k=1}^{n}\ln(\zeta-e_k)=\ln\left(\zeta^n-1\right),$$

то

$$\frac{n\zeta^{n-1}}{\zeta^n-1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\zeta-e_k}$$

и поэтому первую сумму в правой части уравнения можно представить в виде

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(\zeta-e_k)^2}=-\frac{d}{d\zeta}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\zeta-e_k}=-\frac{d}{d\zeta}\frac{n\zeta^{n-1}}{\zeta^n-1}=n\zeta^{n-2}\left[\frac{n\zeta^n}{\left(\zeta^n-1\right)^2}-\frac{n-1}{\zeta^n-1}\right]=\sum_{l=1}^{\infty}c_l\zeta^{nl-2}.$$

Вторая сумма записывается как отношение многочлена степени n–1 с неопределёнными коэффициентами $D_1,\ldots D_n$, к многочлену ζ^n-1:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{M_k}{\zeta-e_k}=\frac{D_1\zeta^{n-1}+D_2\zeta^{n-2}+\ldots+D_n}{\zeta^n-1}\,.$$

Из равенства

$$\sum_{l=1}^{\infty}A_l\zeta^{nl-2}=2p_1p_2\sum_{l-2}^{\infty}c_l\zeta^{nl-2}+\frac{D_1\zeta^{n-1}+D_2\zeta^{n-2}+\ldots+D_n}{\zeta^n-1}$$

следует, что $D_1=D_3=\ldots=D_n=0$ и, значит,

$$\frac{w'''}{w'}-\frac{3}{2}\left(\frac{w''}{w'}\right)^2=\zeta^{n-2}\left[\frac{2n^2p_1p_2}{\left(\zeta^n-1\right)^2}+\frac{2np_1p_2+D_2}{\zeta^n-1}\right].$$

Производная Шварца для $f(\zeta)$ (продолженной по принципу симметрии Римана – Шварца во внешность круга E) имеет на бесконечности нуль не ниже четвертого порядка [2, с. 412] относительно ζ^n, и поэтому $D_2 = -2np_1p_2$. Таким образом, уравнение для $f(\zeta)$ приводится к виду [3, с.83]

$$\frac{w'''}{w'} - \frac{3}{2}\left(\frac{w''}{w'}\right)^2 = \frac{2n^2 p_1 p_2 \zeta^{n-2}}{\left(\zeta^n - 1\right)^2}.$$

Переходя к решению уравнения, отметим, что общее решение даётся формулой

$$w(\zeta) = \frac{af(\zeta) + b}{cf(\zeta) + d},$$

где a,b,c,d – постоянные, $ab - bc \neq 0$, а $f(\zeta)$ – некоторое решение уравнения. Поэтому достаточно найти одно решение. Воспользуемся легко проверяемым равенством

$$\frac{w'''}{w'} - \frac{3}{2}\left(\frac{w''}{w'}\right)^2 = -2\sqrt{w'}\,\frac{d^2}{d\zeta^2}\left(\frac{1}{\sqrt{w'}}\right)$$

и приведем уравнение к следующему виду:

$$\frac{d^2}{d\zeta^2}\left(\frac{1}{\sqrt{w'}}\right) + \frac{n^2 p_1 p_2 \zeta^{n-2}}{\left(\zeta^n - 1\right)^2}\frac{1}{\sqrt{w'}} = 0.$$

Положим здесь

$$\frac{1}{\sqrt{w'}} = t, \text{ т.е. } f'(\zeta) = \frac{1}{t^2(\zeta)}.$$

Линейное однородное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 t}{d\zeta^2} + \frac{n^2 p_1 p_2 \zeta^{n-2}}{\left(\zeta^n - 1\right)^2} t = 0$$

имеет два линейно независимых решения, пусть $t_1(\zeta)$, $t_2(\zeta)$. Найдем их. Сделаем в уравнении подстановку $z=\zeta^n$. Получим

$$nz\frac{d^2 t}{dz^2} + (n-1)\frac{dt}{dz} + \frac{np_1 p_2}{(z-1)^2} t = 0.$$

Подстановкой $t = (z-1)^{p_1} u$ уравнение приводится виду

$$z(z-1)\frac{d^2 u}{dz^2} + \left[(p_1 - p_2 + 1 + m_1)\right]\frac{du}{dz} + p_1(m_1 - p_2)u = 0 \qquad (*)$$

– частному случаю известного гипергеометрического уравнения Гаусса

$$z(z-1)\frac{d^2 u}{dz^2} + \left[(\alpha + \beta + 1)z - \gamma\right]\frac{du}{dz} + \alpha\beta u = 0,$$

если в нем положить

$$\alpha = m_1 - p_2, \quad \beta = p_1, \quad \gamma = m_1.$$

Решение уравнения Гаусса в форме степенного ряда, сходящегося в единичном круге при всех α, β, γ, γ>0, имеет вид

$$u = F(\alpha,\beta,\gamma;z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{(\gamma)_k}\frac{z^k}{k!},$$

где $(a)_k = a(a+1)...(a+k-1)$ – символ Похгаммера.

Для уравнения (*) одним из решений будет

$$u_1(z) = F(m_1 - p_2, p_1, m_1; z).$$

Другое решение можно также получить в виде гипергеометрического ряда, умноженного на степенную функцию:

$$u_2(z) = z^{1-m_1} F(p_1, m_2 - p_2, m_2; z).$$

Решения $u_1(z)$, $u_2(z)$ линейно независимы.

Вернемся к уравнению для $t(\zeta)$. Подсчитаем производную отношения $t_2(\zeta)$ к $t_1(\zeta)$:

$$\frac{d}{d\zeta}\frac{t_2}{t_1} = \frac{t_1t_2' - t_2t_1'}{t_1^2} = \frac{1}{t_1^2}\begin{vmatrix} t_1 & t_2 \\ t_1' & t_2' \end{vmatrix} = \frac{1}{t_1^2} W(t_1,t_2).$$

По теореме Остроградского – Лиувилля определитель Вронского $W(t_1,t_2)$ равен постоянной, которую обозначим через C. Используя равенства

$$\frac{d}{d\zeta}\frac{t_2}{t_1} = \frac{C}{t_1^2} = C\frac{d}{d\zeta} f(\zeta)$$

и возвращаясь от переменных z к ζ и от t к u, получаем функцию

$$f(\zeta) = \frac{t_2}{t_1} = \frac{\zeta}{C}\frac{F\left(p_1, m_2 - p_2, m_2; \zeta^n\right)}{F\left(p_1, m_1 - p_2, m_1; \zeta^n\right)},$$

дающую однолистное конформное отображение единичного круга.

Очевидно, $f(0)=0$. Условие $f(1)=e_0=1$ выполняется для

$$C = \frac{\Gamma(m_2)\Gamma(m_1 - p_1)}{\Gamma(m_1)\Gamma(m_2 - p_1)}.$$

Таким образом, отображение круга E на область D_n найдено и задача о кручении стержня решена.

Функцию $f(\zeta)$ можно выразить через определенные интегралы, воспользовавшись формулой [4, формула 7.211]

$$F(\alpha,\beta,\gamma,;z) = \frac{1}{B(\beta,\gamma-\beta)}\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-tz)^{-\alpha}\,dt,$$

где

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$$

– эйлеров интеграл первого рода. Бета-функция $B(x,y)$ связана с гамма-функцией

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$$

– эйлеровым интегралом второго рода – соотношением

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

После простых вычислений получаем

$$f(\zeta)=\zeta\frac{\int_0^1 t^{-p_2}(1-t)^{p_2-m_1}\left(1-t\zeta^n\right)^{p_2-m_2}dt}{\int_0^1 t^{-p_2}(1-t)^{p_2-m_2}\left(1-t\zeta^n\right)^{p_2-m_1}dt}.$$

В частности, при α=0

$$f(\zeta)=\zeta\frac{\int_0^1 t^{-1/2}(1-t)^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}\left(1-t\zeta^n\right)^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}dt}{\int_0^1 t^{-1/2}(1-t)^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}\left(1-t\zeta^n\right)^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}dt}.$$

В заключение сделаем добавление, позволяющее сравнить решение указанной выше задачи с решением более простой задачи также о кручении стержня.

Пусть Δ_{2n} – прямолинейный многоугольник с n-кратной симметрией вращения относительно z=0. Будем считать, что n вершин многоугольника Δ_{2n} даются точками $e_k=e^{\frac{2\pi i}{n}(k-1)}$, $k=1,...,n$, а остальные вершины совпадают с точками $\varepsilon_k=e_k a$, где $a=re^{i\gamma}$, $0<r<1$, $0<\gamma<\dfrac{2\pi}{n}$. Область Δ_{2n} имеет вид простой звезды с n треугольными зубцами. Пусть $\alpha\pi$ – угол Δ_{2n} в точке e_k, $\beta\pi$ – угол этой же области в точке ε_k. Так как для суммы углов при вершинах многоугольника Δ_{2n} справедлива формула $n(\alpha\pi+\beta\pi)=\pi(2n-2)$,то

$$\beta=2-\alpha-\frac{\pi}{n}.$$

Конформное отображение $z=f(\zeta)$, $f(0)=0$, $f(1)=1$, круга E на Δ_{2n} дается формулой Кристоффеля – Шварца

$$z=f(\zeta)=\frac{1}{C}\int_0^\zeta\left(1-\zeta^n\right)^{\alpha-1}\left(b^n-\zeta^n\right)^{1-\alpha-\frac{2}{n}}d\zeta,$$

в которой

$$C=\int_0^1\left(1-\zeta^n\right)^{\alpha-1}\left(b^n-\zeta^n\right)^{1-\alpha-\frac{2}{n}}d\zeta,$$

b – прообраз вершины $re^{i\gamma}$ многоугольника Δ_{2n}, т.е.$f^{-1}(re^{i\gamma})=b$ – некоторая точка на дуге окружности, лежащая между точками e_1 и e_2. Существуют способы её нахождения, использующие отображения полуплоскости на круговые треугольники

В выполнении работы принимала участие студентка III курса ММФ Е.А. Паньковская.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Изд. АН СССР, 1954.
2. *Александров И.А.* Теория функций комплексного переменного. Томск: Том. ун-т, 2002.
3. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.
4. *Рыжик И.М.* и *Градштейн И.С.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М. – Л.: ГИТТЛ, 1951.

Статья принята в печать 10.10.2010г.

Alexandrov I.A. TORSION OF AN ELASTIC ROD WITH A MULTICIRCULAR CROSS-SECTION. The problem of torsion of an elastic rod having a multicircular simple connected cross-section with rotational *n*-symmetry is solved by methods of elasticity theory and conformal mappings.

Keywords: twisting of a rod, conformal mapping, complex twisting function, circular polygon, Schwarz equation

ALEXANDROV Igor' Aleksandrovich (Tomsk State University)
E-mail: ma@math.tsu.ru