УДК 512.552

А.В. Буданов

КВАЗИНЕОБРАТИМЫЕ ЭНДОМОРФИЗМЫ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП[1]

Определяются и изучаются квазинеобратимые эндоморфизмы абелевых групп без кручения. Для вполне разложимых и сепарабельных групп дается описание квазинеобратимых эндоморфизмов в терминах их действия на прямых слагаемых ранга 1, изучается структура фактор-кольца кольца эндоморфизмов группы по идеалу всех квазинеобратимых эндоморфизмов, а также связь данного идеала с ниль-радикалом.

Ключевые слова: *абелева группа, кольцо эндоморфизмов.*

В последнее время абелевы группы изучаются вместе с их кольцами эндоморфизмов. Одной из главных задач при таком подходе является описание структуры кольца эндоморфизмов в терминах действия эндоморфизмов на группе. Примером таких проблем служат проблемы описания радикалов колец эндоморфизмов различных классов групп в терминах действия эндоморфизмов из радикалов на группе [1, проблемы 17, 18; 2]. В настоящей статье вводится понятие квазинеобратимого эндоморфизма абелевой группы без кручения и с его помощью исследуются кольца эндоморфизмов вполне разложимых и сепарабельных групп без кручения. В указанных случаях показано, что множество всех квазинеобратимых эндоморфизмов образует идеал кольца эндоморфизмов, который может быть определен в терминах действия эндоморфизмов на группе. Этот результат сделал возможным исследование фактор-кольца по идеалу квазинеобратимых эндоморфизмов. В заключительной части выявлены некоторые взаимосвязи введенного идеала и первичного и ниль-радикалов кольца эндоморфизмов, представленные в виде условий нильпотентности идеала квазинеобратимых эндоморфизмов.

Все используемые обозначения и неопределяемые термины являются общепринятыми в теории абелевых групп и могут быть найдены в [3, 4]. Без дополнительных пояснений используются понятия типа и характеристики элементов групп без кручения и их свойства, изложенные в [4, § 85]. Знак включения «$\subset$» не исключает равенства. На протяжении всего текста все группы подразумеваются абелевыми и не имеющими кручения. Кольцо эндоморфизмов группы G обозначается $E(G)$.

Определение. *Пусть G – абелева группа без кручения. Будем говорить, что эндоморфизм $\alpha \in E(G)$ квазиобратим слева на элементе $g \in G$, если найдется эндоморфизм $\beta \in E(G)$ и натуральное число $n \in \boldsymbol{N}$, такие, что $\beta\alpha g = ng$.*

Эндоморфизм $\alpha \in E(G)$ назовем квазинеобратимым слева, если он не является квазиобратимым слева ни на одном элементе группы за исключением нуля. Иными словами, эндоморфизм $\alpha \in E(G)$ квазинеобратим слева, если для произвольных $g \in G$, $\beta \in E(G)$ и $n \in \boldsymbol{N}$ из равенства $\beta\alpha g = ng$ следует, что $g = 0$.

Аналогично определяются квазинеобратимые справа эндоморфизмы.

---

[1] Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России». Госконтракт П937 от 20 августа 2009 года.

Непосредственно из определения следует, что всякий эндоморфизм, являющийся умножением на рациональное число, отличное от нуля, будет квазиобратим слева на произвольном элементе группы. Нулевой эндоморфизм, очевидно, квазинеобратим.

Отметим несколько простых свойств введенного понятия.

1. *Эндоморфизм* $\alpha \in E(G)$ *квазинеобратим слева тогда и только тогда, когда для любых* $\beta \in E(G)$ *и* $n \in \boldsymbol{N}$ *эндоморфизм* $n - \beta\alpha$ *является мономорфизмом.*

Доказательство. Непосредственно следует из определения.

2. *Эндоморфизм* $\alpha \in E(G)$ *квазинеобратим слева тогда и только тогда, когда* $\langle E(G)\alpha g\rangle_* \cap \langle g\rangle_* = 0$ *для каждого* $g \in G$ *или, что равносильно,* $g \notin \langle E(G)\alpha g\rangle_*$, *если* $g \neq 0$.

Доказательство. Действительно, если α не квазинеобратимый слева эндоморфизм группы G, то найдутся $g \in G$, $\beta \in E(G)$ и $n \in \boldsymbol{N}$, для которых $\beta\alpha g = ng$, причем $g \neq 0$. Отсюда видно, что $0 \neq g \in \langle E(G)\alpha g\rangle_*$. С другой стороны, если $0 \neq g \in \langle E(G)\alpha g\rangle_*$, то $ng = \beta\alpha g$ при некоторых $\beta \in E(G)$ и $n \in \boldsymbol{N}$, что противоречит квазинеобратимости эндоморфизма α. Таким образом, отрицания утверждений доказываемого свойства эквивалентны и, следовательно, свойство доказано.

3. *Если* α *– квазинеобратимый слева эндоморфизм группы* G, $\varphi \in E(G)$, *то* $\alpha\varphi$ *и* $\varphi\alpha$ *также квазинеобратимы слева.*

Доказательство. Квазинеобратимость слева $\varphi\alpha$ очевидна. Покажем квазинеобратимость $\alpha\varphi$. Пусть $\beta\alpha\varphi g = ng$ для некоторых $\beta \in E(G)$ и $n \in \boldsymbol{N}$. Отсюда, $\varphi\beta\alpha\varphi g = \varphi ng = n\varphi g$. Так как эндоморфизм α квазинеобратим, то $\varphi g = 0$. С учетом этого из равенства $\beta\alpha\varphi g = ng$ находим $ng = 0$, что влечет $g = 0$, так как рассматриваются лишь группы без кручения.

4. *Квазинеобртимость слева равносильна квазинеобратимости справа.*

Доказательство. Пусть α квазинеобратим слева и пусть $\alpha\beta g = ng$ для каких-либо $g \in G$, $\beta \in E(G)$ и $n \in \boldsymbol{N}$. Тогда $\beta\alpha\beta g = \beta ng = n\beta g$, откуда $\beta g = 0$, что при подстановке в исходное равенство дает $ng = 0$, а значит, и $g = 0$, что показывает что из квазинеобратимости слева следует квазинеобратимость справа. Обратное доказывается аналогично.

Учитывая последнее свойство, квазинеобратимые слева эндоморфизмы будем называть просто квазинеобратимыми.

В работе Добрусина [5] введено понятие эндотранзитивной абелевой группы без кручения. Абелева группа без кручения G называется эндотранзитивной, если для любых $g, h \in G$ из того, что $\chi(g) = \chi(h)$, следует существование эндоморфизма $\varphi \in E(G)$ со свойством $\varphi(g) = h$.

5. *Пусть* α *– эндоморфизм группы* G. *Если для каждого* $g \in G \setminus Ker\alpha$ *выполнено* $t(g) < \mathrm{t}(\alpha g)$, *то* α *– квазинеобратимый эндоморфизм. Для эндотранзитивной группы* G *верно и обратное: если* α *– квазинеобратимый эндоморфизм эндотранзитивной группы* G, *то для произвольного* $g \in G \setminus Ker\alpha$ *выполнено* $t(g) < \mathrm{t}(\alpha g)$.

Доказательство. Пусть α – эндоморфизм группы G и для каждого $g \in G \setminus \mathrm{Ker}\,\alpha$ выполнено $t(g) < t(\alpha g)$. Пусть $\beta\alpha h = nh$ для некоторых $h \in G$, $\beta \in E(G)$ и $n \in \boldsymbol{N}$. Тогда имеем: $t(h) = t(nh) = t(\beta\alpha h) \geq t(\alpha(h))$, что по условию на эндоморфизм α влечет $h \in Ker\alpha$. Следовательно, $0 = \alpha h = \beta\alpha h = nh$, откуда $h = 0$.

Обратно, пусть G – эндотранзитивная группа и α – ее квазинеобратимый эндоморфизм. Пусть $g \in G$ и $\alpha g \neq 0$. Если $t(g) = t(\alpha g)$, то для некоторого $n \in \mathbf{N}$ будет выполнено $\chi(\alpha g) = \chi(ng)$. Тогда найдется $\beta \in E(G)$ со свойством $\beta\alpha g = ng$, что ввиду квазинеобратимости эндоморфизма α возможно лишь при $g = 0$. Последнее противоречит выбору элемента g.

Достаточное условие квазинеобратимости, данное в предыдущем свойстве, является для многих групп слишком строгим (примеры таких групп легко отыскать среди вполне разложимых групп). С другой стороны, вторая часть этого свойства показывает, что без дополнительных предположений о группе оно не может быть ослаблено.

6. *Если* α *– квазинеобратимый эндоморфизм группы* G, *то* $\alpha \mathrm{Soc}G = 0$.

Доказательство. Псевдоцоколь $\mathrm{Soc}G$ группы G есть сумма ее минимальных *pfi*-подгрупп. Достаточно показать, что квазинеобратимый эндоморфизм α аннулирует произвольную минимальную *pfi*-подгруппу группы G. Допустим, что A – минимальная *pfi* -подгруппа группы G и $\alpha A \neq 0$. Пусть тогда $a \in A$ и $\alpha a \neq 0$. В силу минимальности A $\langle E(G)\alpha a\rangle_* = A$, откуда $0 \neq a \in \langle E(G)\alpha a\rangle_*$. По свойству 2 α не является квазинеобратимым эндоморфизмом. Следовательно, $\alpha A = 0$ для всякой минимальной *pfi*-подгруппы A группы G, что дает $\alpha \mathrm{Soc}G = 0$.

В работе Крылова [6] определен идеал $N(G)$ кольца эндоморфизмов группы G как сумма всех идеалов, состоящих из поэлементно нильпотентных эндоморфизмов, т.е. таких эндоморфизмов ν, что для каждого $g \in G$ существует $m \in \mathbf{N}$ со свойством $\nu^m g = 0$. Очевидно, что этот идеал содержит ниль-радикал $N(E(G))$ кольца $E(G)$.

7. *Если* $\alpha \in N(G)$, *то* α *квазинеобратим.*

Доказательство. Пусть $\beta\alpha g = ng$ для некоторых $\beta \in E(G)$, $g \in G$ и $n \in \mathbf{N}$. Так как $\beta\alpha \in N(G)$, то существует $k \in \mathbf{N}$ со свойством $(\beta\alpha)^k g = 0$. С другой стороны, имеем $(\beta\alpha)^k g = n^k g = 0$, откуда $g = 0$.

8. *Пусть* A_0, A_i ($i = \overline{1,n}$) *– подгруппы ранга 1 группы* G, *такие, что сумма* A *групп* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *– прямая и служит для* G *прямым слагаемым. Пусть* α *– квазинеобратимый эндоморфизм группы* G, *причем* $0 \neq \alpha A_0 \subset A$ *и* $\alpha A_0 \not\subset \bigoplus_{i \neq k} A_i$ *при* $k = \overline{1,n}$. *Тогда* $t(A_i) > t(A_0)$ ($i = \overline{1,n}$).

Доказательство. Пусть $\pi_i \colon A \to A_i$ – канонические проекции ($i = \overline{1,n}$). По условию, $\pi_i \alpha A_0 \neq 0$, откуда $t(A_0) \leq t(A_i)$. Допустим, что $t(A_m) = t(A_0)$ для некоторого m, $1 \leq m \leq n$. Возьмем $a \in A_0$ так, чтобы $\pi_m \alpha a \neq 0$. Так как $t(A_m) = t(A_0)$, то для некоторого $n \in \mathbf{N}$ $\chi(\pi_m \alpha a) \leq \chi(na)$. В этой ситуации существует гомоморфизм $\beta \in Hom(A_m, A)$, такой, что $\beta\pi_m\alpha a = na$. Так как A_m – прямое слагаемое группы G, то можно считать, что $\beta \in E(G)$, а значит, равенство $\beta\pi_m\alpha a = na$ влечет, ввиду квазинеобратимости эндоморфизма α, $a = 0$ в противоречие с выбором элемента a.

В дальнейшем будут рассматриваться квазинеобратимые эндоморфизмы вполне разложимых и сепарабельных групп без кручения. Напомним, что группа называется вполне разложимой, если она является прямой суммой групп ранга 1. Группа называется сепарабельной, если каждое конечное множество ее элементов содержится в некотором ее вполне разложимом прямом слагаемом. В случае групп без кручения, эти классы определяются и изучаются в [4, § 85 – 87]. Для данных классов групп без кручения оказывалось возможным описать квазинеобратимые эндоморфизмы в терминах их действия на прямых слагаемых ранга 1, а также получить содержательные результаты о фактор-кольцах по идеалу квазинеобратимых эндоморфизмов. В дальнейших рассуждениях потребуется следующая простая лемма.

Лемма 1. *Пусть G – однородно разложимая группа без кручения, $G=\bigoplus_{i\in I}A_i$ – ее разложение в прямую сумму однородных групп. Пусть $0\neq a=\sum_{i\in I}a_i\in G$ и $0\neq b=\sum_{i\in I}b_i\in G$, $a_i, b_i\in A_i$ $(i\in I)$, где почти все a_i и b_i равны нулю. Тогда если $\alpha(a)=b$ для некоторого $\alpha\in E(G)$, то для каждого индекса $i\in I$ найдется индекс $j\in I$, такой, что $t(a_j)\leq t(b_i)$.*

Доказательство. Имеем $\alpha(a)=b$. Пусть $i\in I$ и $b_i\neq 0$ (если $b_i=0$, то, ввиду того, что $t(0)\geq\tau$ для любого типа τ, в качестве требуемого j можно взять любой индекс из I). Обозначая π_i проекцию G на A_i $(i\in I)$, получаем $0\neq b_i=\pi_i\alpha(\sum_{j\in I}a_j)=\sum_{j\in I}\pi_i\alpha a_j$. Следовательно, для некоторого $j_0\in I$ $\pi_i\alpha a_{j_0}\neq 0$, откуда получаем $t(a_{j_0})\leq t(\pi_i\alpha a_{j_0})=t(b_i)$.

Теорема 2. *Пусть G – вполне разложимая группа без кручения, $G=\bigoplus_{i\in I}A_i$ – ее разложение в прямую сумму групп ранга 1 и π_i: $G\to A_i$ $(i\in I)$– естественные проекции. Эндоморфизм $\alpha\in E(G)$ квазинеобратим тогда и только тогда, когда для любых индексов $i,j\in I$ $\pi_i\alpha A_j=0$, если $t(A_i)=t(A_j)$.*

Доказательство. *Необходимость*. Пусть α – квазинеобратимый эндоморфизм и $\pi_i\alpha A_j\neq 0$. Последнее неравенство сразу влечет $t(A_i)\geq t(A_j)$. Допустим, что $t(A_i)=t(A_j)$. Возьмем $a\in A_j$ так, чтобы $\pi_i\alpha a\neq 0$. Так как $\chi(a)\leq\chi(\pi_i\alpha a)$, а $t(a)=t(\pi_i\alpha a)$, то найдется $n\in\mathbf{N}$, такое, что $\chi(na)=\chi(\pi_i\alpha a)$. Следовательно, существует гомоморфизм ψ: $A_i\to A_j$, $\psi\pi_i\alpha a=na$. Так как A_i – прямое слагаемое группы G, то можно считать, что $\psi\in E(G)$. Получили противоречие с квазинеобратимостью эндоморфизма α. Тем самым необходимость доказана.

Достаточность. Пусть эндоморфизм α таков, что для любых не обязательно различных индексов $i,j\in I$ $\pi_i\alpha A_j=0$ или $t(A_i)>t(A_j)$. Предположим противное: для некоторых $g\in G$, $\beta\in E(G)$ и $n\in\mathbf{N}$ выполнено равенство $\beta\alpha g=ng$, причем $g\neq 0$. Используя разложение $G=\bigoplus_{i\in I}A_i$, представим элемент g в виде $g=a_1+\ldots+a_n$ $(n\geq 1)$, где $0\neq a_k\in A_k$, $k=\overline{1,n}$, и все A_k входят в данное разложение группы G. Без потери общности можно считать, что $\alpha a_k\neq 0$ ($k=\overline{1,n}$). Действительно, если, например, $\alpha a_1=0$, то вместо элемента g можно рассмотреть элемент $g'=a_2+\ldots+a_n$, на котором эндоморфизм α также будет квазиобратим. Это следует из того, что $\alpha g'=\alpha g$, откуда $\beta\alpha g'=ng$ и, проектируя последнее равенство на сумму групп $A_2,\ldots,A_n$, получаем $\theta\beta\alpha g'=\theta ng=n\theta g=ng'$, где θ обозначает соответствующую проекцию. Зафиксируем входящие в разложение $G=\bigoplus_{i\in I}A_i$ группы $B_1,\ldots,$

B_m ($m \geq 1$), для которых $\alpha a_k = b_{k1}+\ldots+b_{km}$ ($k=\overline{1,n}$), и проекция на группу B_j как минимум одного из αa_k отлична от нуля ($j=\overline{1,m}$). Докажем, что группы $A_1,\ldots, A_n$ и $B_1,\ldots, B_m$ обладают следующими свойствами:

(1) для любого $k=\overline{1,n}$ найдутся $j_1, j_2=\overline{1,m}$, такие, что $t(B_{j_1})\leq t(A_k)$ и проекция αA_k на B_{j_2} отлична от нуля;

(2) для любого $j=\overline{1,m}$ найдется $k=\overline{1,n}$, такой, что проекция αA_k на B_j отлична от нуля;

Как было отмечено при выборе групп $B_1,\ldots, B_m$, проекция на группу B_j как минимум одного из αa_k отлична от нуля. То есть свойство (2) справедливо. Так как $\alpha a_k \neq 0$, то и некоторый b_{kl_0} отличен от нуля. Следовательно, проекция αA_k на B_{l_0} отлична от нуля. Чтобы завершить доказательство свойства (1), обозначим $b_l = b_{1l}+\ldots+b_{kl}$ ($l=\overline{1,m}$). Тогда $\alpha g = b_1+\ldots+b_m$. Так как существует эндоморфизм группы G, переводящий αg в ng, то по предыдущей лемме для каждого $k=\overline{1,n}$ существует индекс $l(k)=\overline{1,m}$, такой, что $t(b_{l(k)})\leq t(na_k)$, откуда $t(B_{l(k)})\leq t(A_k)$. Таким образом, свойства (1) и (2) доказаны.

Построим ориентированный граф V, вершинами которого являются группы $A_1,\ldots, A_n$ и $B_1,\ldots, B_m$. Соединим вершину A_k с B_j, если проекция αA_k на B_j отлична от нуля. Соединим вершину B_j с A_k, если $t(B_j)\leq t(A_k)$. С учетом (1) и (2) построенный граф, очевидно, обладает следующими свойствами:

(1) в каждую вершину A_k входит и выходит по меньшей мере по одному ребру;

(2) в каждую вершину B_j входит по меньшей мере одно ребро;

Докажем, что построенный граф обладает циклом, содержащим одну из вершин A_k ($k=\overline{1,n}$). То есть существует последовательность вершин $A_{k_1}, B_{j_1}, A_{k_2}, B_{j_2},\ldots, A_{k_{s-1}}, B_{k_{s-1}}, A_{k_s}$, такая, что в каждую следующую вершину входит ребро, выходящее из предыдущей, $s\geq 2$ и $A_{k_1}=A_{k_s}$.

Перейдем к новому графу V_1. Для этого отбросим те вершины B_j графа V, из которых не выходит ни одного ребра. Так как $n\geq 1$, то в силу свойства (1) хотя бы одна из вершин B_j ни будет отброшена. Понятно, что получившийся граф может не обладать свойством (1), хотя свойство (2) по-прежнему сохраняется. Отбросим теперь те вершины A_k, из которых не выходит ни одного ребра. Так как хотя бы одна из вершин B_j осталась, то в силу свойства (2) останется хотя бы одна из вершин A_k. Нетрудно видеть, что полученный таким образом граф V_1 обладает свойствами (1) и (2). Повторяя эту процедуру для графа V_1, получим граф V_2, также обладающий свойствами (1) и (2) и содержащий хотя бы по одной из вершин A_k и B_j. Так как число вершин графа V конечно, то, применив эту процедуру некоторое число раз, получим граф V_t, обладающий свойствами (1) и (2) и содержащий хотя бы по одной из вершин A_k и B_j, на который описанная процедура не действует, то есть из каждой его вершины B_j выходит по меньшей мере одно ребро.

Пусть A_{k_1} – вершина графа V_t. По свойству (1) она соединена ребром с некоторой вершиной B_{j_1}. Допустим, что уже построена последовательность A_{k_1}, B_{j_1}, $A_{k_2}, B_{j_2},\ldots, A_{k_{r-1}}, B_{k_{r-1}}$, такая, что в каждую следующую вершину входит ребро, выходящее из предыдущей. По построению графа V_t, вершина $B_{k_{r-1}}$ соединяется ребром с некоторой вершиной A_{k_r}. Если вершина A_{k_r} входит в построенную последовательность, то, очевидно, цикл найден. В противном случае, в силу того, что она соединена ребром с некоторой вершиной B_{k_r}, получаем последовательность $A_{k_1}, B_{j_1}, A_{k_2}, B_{j_2}, \ldots, A_{k_{r-1}}, B_{k_{r-1}}, A_{k_r}, B_{k_r}$. Так как число вершин графа V_t конечно, то последовательность не может бесконечно удлиняться, а значит, в графе V_t существует цикл. По построению графа V_t, он является подграфом графа V и, следовательно, граф V также обладает циклом.

Итак, пусть $A_{k_1}, B_{j_1}, A_{k_2}, B_{j_2}, \ldots, A_{k_{s-1}}, B_{k_{s-1}}, A_{k_s}$ – цикл графа V. Из построения следует, что если существует ребро графа V, соединяющее вершины C_1 и C_2, то $t(C_1) \le t(C_2)$. Так как $A_{k_1} = A_{k_s}$, то $t(A_{k_1}) = t(B_{j_1})$. Но из построения графа V следует, что проекция αA_{k_1} на B_{j_1} отлична от нуля. Получили противоречие с условием.

Замечание. Из теоремы 2 непосредственно следует, что только лишь нулевой эндоморфизм группы ранга 1 является квазинеобратимым.

Следствие 3. *Эндоморфизм* α *сепарабельной группы* G *квазинеобратим тогда и только тогда, когда для любых двух ее прямых слагаемых* A, B *ранга 1 неравенство* $\pi\alpha A \neq 0$ (π: $G \to B$ *– произвольная проекция*) *влечет* $t(A) < t(B)$.

Доказательство. Необходимость доказывается повторением доказательства необходимости предыдущей теоремы. Докажем достаточность. Пусть для некоторых $g \in G$, $\beta \in E(G)$ и $n \in \boldsymbol{N}$ выполнено равенство $\beta\alpha g = ng$. Вложим элементы g и αg в некоторое вполне разложимое прямое слагаемое C группы G. Пусть π: $G \to C$ – проекция. Положим $\alpha' = \pi\alpha\pi \in E(C)$. Пусть $C = A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_n$ – разложение группы C в прямую сумму групп ранга 1, π: $C \to A_i$ – проекции ($i = \overline{1,n}$). Для любых индексов $i, j = \overline{1,n}$ имеем: $\pi_i\alpha' A_j = (\pi_i\pi)\alpha(\pi A_j) = \pi_i\alpha A_j$, что по условию доказываемого следствия означает, что α' удовлетворяет условию предыдущей теоремы для группы C. Следовательно, α' – квазинеобратимый эндоморфизм группы C. Для эндоморфизма $\beta' = \pi\beta\pi \in E(C)$ имеем: $\beta'\alpha' g = \pi\beta\pi\pi\alpha\pi g = \pi\beta\pi\alpha g = \pi\beta\alpha g = \pi n g = ng$. Следовательно, $g = 0$.

Полученное описание позволяет доказать, что все квазинеобратимые эндоморфизмы сепарабельной группы образуют идеал.

Следствие 4. *Множество* $Q(G)$ *всех квазинеобратимых эндоморфизмов сепарабельной группы* G *является идеалом кольца* $E(G)$.

Доказательство. Ввиду свойства 2 достаточно проверить что $\alpha + \beta \in Q(G)$ для любых $\alpha, \beta \in Q(G)$. Воспользуемся предыдущим следствием. Пусть A, B – прямые слагаемые ранга 1 группы G, π: $G \to B$ – проекция и $\pi(\alpha + \beta)A \neq 0$. Так как $\pi(\alpha + \beta)A \subset \pi\alpha A + \pi\beta A$, то или $\pi\alpha A \neq 0$ или $\pi\beta A \neq 0$, откуда $t(A) < t(B)$. Следовательно, $\alpha + \beta \in Q(G)$.

В связи с тем, что $Q(G)$ является идеалом кольца эндоморфизмов сепарабельной группы, представляет интерес вопрос о структуре фактор-кольца $E(G) / Q(G)$. Пусть $\Omega(G)$ обозначает множество типов прямых слагаемых ранга 1 группы G. Пусть G – вполне разложимая группа, $G = \bigoplus_{t \in \Omega(G)} G_t$ – её каноническое разложение, то есть G_t – однородная вполне разложимая группа типа t ($t \in \Omega(G)$), называемая также однородной компонентой группы G. Обратимся к следующим известным обозначениям ([4, § 85]). Для произвольного типа t через $G(t)$ обозначается подгруппа, состоящая из всех элементов группы G, типы которых больше либо равны t, а через $G^*(t)$ – подгруппа, порожденная множеством всех элементов группы G, типы которых строго больше t. Подгруппы $G(t)$ и $G^*(t)$ будут вполне инвариантными. Для вполне разложимой группы G и типа $t \in \Omega(G)$ справедлив изоморфизм $G_t \cong G(t)/G^*(t)$. Исходя из этого, для сепарабельной группы G обозначим $G_t = G(t)/G^*(t)$. Нужно заметить, что хотя последняя группа является сепарабельной ([4, § 85, свойство е)], она может быть неизоморфна ни одной из подгрупп группы G. Прежде чем переходить к рассмотрению фактор-кольца по идеалу $Q(G)$, дадим еще одно описание идеала $Q(G)$ с использованием подгрупп $G(t)$ и $G^*(t)$. Обозначим $Q_t(G) = \left\{\alpha \in E(G) \mid \alpha G(t) \subset G^*(t)\right\}$. Из вполне инвариантности подгрупп $G(t)$ и $G^*(t)$ следует, что $Q_t(G)$ – идеал в $E(G)$.

Предложение 5. *Для сепарабельной группы без кручения G справедливо равенство* $Q(G) = \bigcap\limits_{t \in \Omega(G)} Q_t(G)$.

Доказательство. Возьмем $\alpha \in Q(G)$, предположим, что $\alpha \notin \bigcap\limits_{t \in \Omega(G)} Q_t(G)$, то есть $\alpha g \notin G^*(t)$ для некоторого элемента $g \in G(t)$ и некоторого типа $t \in \Omega(G)$. Из этих предположений следует, что $g \neq 0$. Вложим элементы g и αg во вполне разложимые прямые слагаемые A и B группы G. Пусть $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$ и $B = B_1 \oplus \ldots \oplus B_m$ – их разложения в прямую сумму групп ранга 1. Полагая, что проекции g (αg) на каждое из A_i (B_j) отличны от нуля, получаем $t(A_i) \geq t(g)$ и $t(B_j) \geq t(\alpha g)$. Так как $g, \alpha g \notin G^*(t)$, то из этого следует, что найдутся i_0 и j_0, для которых $t(A_{i_0}) = t(g) = t = t(\alpha g) = t(B_{j_0})$. Это позволяет утверждать, что существует гомоморфизм $\psi : B_{i_0} \to A$, такой, что $\psi \pi_{i_0} \alpha g = kg$ для некоторого $k \in \boldsymbol{N}$, где $\pi_{i_0} : G \to B_{i_0}$ – проекция. Из квазинеобратимости α заключаем, что $g = 0$, что противоречит выбору элемента g. Тем самым доказано, что $Q(G) \subset \bigcap\limits_{t \in \Omega(G)} Q_t(G)$.

Докажем обратное включение. Пусть $\alpha \in \bigcap\limits_{t \in \Omega(G)} Q_t(G)$. Пусть A и B – прямые слагаемые ранга 1 группы G, для которых $\pi\alpha A \neq 0$ (π: $G \to B$ – проекция). Предположим, что $t(A) = t(B) = t$. Докажем, что в этой ситуации $B \cap G^*(t) = 0$. Предположим противное: некоторый элемент $a \in B$ представим в виде суммы элементов $g_1+\ldots+g_n$, типы которых строго больше t. Вкладывая элементы $g_1,\ldots,g_n$ во вполне разложимое прямое слагаемое C группы G, для фиксированного разложения $C = C_1 \oplus \ldots \oplus C_s$ группы C в прямую сумму групп ранга 1 получим $t(C_i) > t$ (полагаем, что проекция на каждое из слагаемых C_i хотя бы одного из элементов $g_1,\ldots,g_n$ отлична от нуля). С другой стороны, $a \in C$ и подгруппа C чиста в G, откуда получается, что $B = \langle a \rangle_* \subset C$. Далее, ввиду того, что B – прямое слагаемое группы G, группа B будет прямым слагаемым группы C ([3, § 8, свойство б)]). Дополнительное к B слагаемое группы C будет вполне разложимо как прямое слагаемое вполне разложимой группы ([4, теорема 86.7]). Получили, что группа C обладает неизоморфными разложениями в прямую сумму групп ранга 1, что невозможно ([4, предложенние 86.1]). Таким образом, $B \subset G(t)$, но $B \cap G^*(t) = 0$. Следовательно, $\pi\alpha \notin \bigcap_{t\in\Omega(G)} Q_t(G)$, а это противоречит тому, что $\bigcap_{t\in\Omega(G)} Q_t(G)$ – идеал в $E(G)$.

Вернемся к рассмотрению фактор-кольца кольца эндоморфизмов по идеалу $Q(G)$. Пусть, как и выше, G_t обозначает однородную компоненту вполне разложимой группы G. Так как $G = \bigoplus_{t\in\Omega(G)} G_t$, то можно считать, что $\prod_{t\in\Omega(G)} E(G_t) \subset E(G)$.

Теорема 6. *Пусть G – вполне разложимая группа без кручения. Тогда $E(G)/Q(G) \cong \prod_{t\in\Omega(G)} E(G_t)$ и, кроме того, аддитивная группа кольца $E(G)$ является прямой суммой аддитивных групп кольца $\prod_{t\in\Omega(G)} E(G_t)$ и идеала $Q(G)$.*

Доказательство. Докажем сначала, что $E(G)/Q(G) \cong \prod_{t\in\Omega(G)} E(G_t)$. Построим эпиморфизм $\Psi : E(G) \to \prod_{t\in\Omega(G)} E(G_t)$. Для $X \subset \Omega(G)$ обозначим π_X проекцию группы G на $\bigoplus_{t\in X} G_t$; если $X = \{\tau\}$, то полагаем $\pi_X = \pi_\tau$. Положим $\Psi(\varphi) = (\ldots, \pi_t\varphi\pi_t, \ldots) \in \prod_{t\in\Omega(G)} E(G_t)$ для каждого $\varphi \in E(G)$. Очевидно, что $\Psi(\varphi \pm \psi) = \Psi(\varphi) \pm \Psi(\psi)$ и $\Psi(1) = 1$. Чтобы доказать $\Psi(\varphi\psi) = \Psi(\varphi)\Psi(\psi)$, нужно, очевидно, проверить, что $\pi_t\varphi\psi\pi_t = \pi_t\varphi\pi_t\pi_t\psi\pi_t$ для произвольного $t \in \Omega(G)$. Заметим, что $\pi_t\varphi = \pi_t\varphi\pi_{\{s|s\le t\}}$ и $\psi\pi_t = \pi_{\{s|s\ge t\}}\psi\pi_t$. Докажем эти равенства. Пусть $g \in G_s$. Тогда, ввиду однородности групп G_t, из того, что $\pi_t\varphi g \ne 0$, следует, что $s \le t$, а значит, $\pi_t\varphi g = \pi_t\varphi\pi_{\{s|s\le t\}} g$. Пусть далее $\psi\pi_t g = \pi_{t_1}\psi g + \ldots \pi_{t_m}\psi g$, где все слагаемые $\pi_{t_i}\psi g$ отличны от нуля. Так как $\pi_{t_1}\psi g \ne 0$ влечет $t_i \ge s$, то $\psi\pi_t g = \pi_{\{s|s\ge t\}}\psi\pi_t g$. Очевидно также, что $\pi_{\{s|s\le t\}}\pi_{\{s|s\ge t\}} = \pi_t$. Учитывая все эти обстоятельства, получаем: $\pi_t\varphi\psi\pi_t = \pi_t\varphi\pi_{\{s|s\le t\}}\pi_{\{s|s\ge t\}}\psi\pi_t = \pi_t\varphi\pi_t\psi\pi_t = \pi_t\varphi\pi_t\pi_t\psi\pi_t$, что и требовалось. Таким образом, Ψ – кольцевой гомоморфизм. Так как $\Psi(\varphi) = \varphi$, если $\varphi \in \prod_{t\in\Omega(G)} E(G_t)$, то Ψ – идемпотентный эпиморфизм.

Покажем, что $\mathrm{Ker}\Psi = Q(G)$. Для этого зафиксируем разложение $G = \bigoplus_{i\in I} A_i$ в прямую сумму групп ранга 1, при котором $G_t = \bigoplus_{t(A_i)=t} A_i$. Воспользуемся предыдущим предложением. Пусть $\alpha \in Q(G)$. Если допустить, что $\pi_t\alpha\pi_t \ne 0$ для некоторого $t \in \Omega(G)$, то для некоторых A_{i_1}, A_{i_2} $\pi_{i_2}\alpha A_{i_1} \ne 0$ ($\pi_{i_2} : G \to A_{i_2}$ – проекция), причем $t(A_{i_1}) = t(A_{i_2}) = t$, а это, согласно предыдущему предложению, противоречит тому, что $\alpha \in Q(G)$. Таким образом, $Q(G) \subset \operatorname{Ker}\Psi$. Обратно, пусть $\alpha \in \operatorname{Ker}\Psi$ и $\pi_{i_2}\alpha A_{i_1} \neq 0$. Из равенства $t(A_{i_1}) = t(A_{i_2}) = t$ очевидно следует, что $\pi_t\alpha\pi_t \neq 0$, что невозможно. Значит, $t(A_{i_1}) < t(A_{i_2})$ и, по предыдущему предложению, $\alpha \in Q(G)$. Равенство $\operatorname{Ker}\Psi = Q(G)$ доказано. Получаем изоморфизм $E(G)/Q(G) \cong \prod_{t\in\Omega(G)} E(G_t)$.

Утверждаемое прямое разложение аддитивной группы кольца $E(G)$ теперь легко получается из доказанного изоморфизма и из сделанного в ходе доказательства замечания об идемпотентности гомоморфизма Ψ.

Доказанное предложение не обобщается на тот случай, когда G – сепарабельная группа. Однако справедлив менее сильный факт:

Следствие 7. *Пусть G – сепарабельная группа. Тогда факторкольцо $E(G) / Q(G)$ изоморфно подкольцу прямого произведения $\prod_{t\in\Omega(G)} E(G_t)$, где $G_t = G(t) / G^*(t)$ для каждого типа t.*

Доказательство. Кольцевой гомоморфизм $\Psi : E(G) \to \prod_{t\in\Omega(G)} E(G_t)$ строится естественным образом. Положим $\Psi(\alpha) = (\ldots, \alpha_t, \ldots) \in \prod_{t\in\Omega(G)} E(G_t)$, где α_t определяется равенствами $\alpha_t(\overline{g}) = \overline{\alpha g}$, $\overline{g} \in G_t$. В силу вполне инвариантности подгруппы $G^*(t)$, отображения α_t будут корректно определенными эндоморфизмами групп G_t. Остается доказать, что $\operatorname{Ker}\Psi = Q(G)$. Очевидно, что $\alpha \in \operatorname{Ker}\Psi$ тогда и только тогда, когда $\alpha G_t \subset G^*(t)$ для каждого $t \in \Omega(G)$, что, ввиду предложения 5, равносильно тому что $\alpha \in Q(G)$.

Рассмотрим теперь условия нильпотентности идеала $Q(G)$. Пусть $P(R)$ обозначает первичный, $N(R)$ – ниль-радикал и $L(R)$ – локально нильпотентный радикал Левицкого кольца R. Определения и свойства обозначенных радикалов можно найти, например, в [7]. Говорят, что частично упорядоченное множество удовлетворяет условию m-максимальности для натурального числа m, если каждая строго возрастающая цепь его элементов состоит из не более чем m элементов.

Предложение 8. *Следующие условия на сепарабельную группу G равносильны:*

1) $P(E(G))^m = 0$; 3) $N(E(G))^m = 0$;

2) $L(E(G))^m = 0$; 4) $Q(G)^m = 0$;

5) $\Omega(G)$ удовлетворяет условию m-максимальности;

Доказательство. Эквивалентность условий 3) и 5) показана в [1, следствие 23.11]. Также известно [1, лемма 23.10], что каждая цепочка $t_1 < \ldots < t_n$ типов из $\Omega(G)$ дает нильпотентный степени n идеал кольца $E(G)$. Поэтому 1) $\Rightarrow$ 5). Хорошо известно, что $P(E(G)) \subset L(E(G)) \subset N(E(G))$. Очевидно также, что $N(E(G)) \subset N(G)$, а в силу свойства 7 квазинеобратимых эндоморфизмов $N(G) \subset Q(G)$. Учитывая получившуюся цепочку включений, получаем 4) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 1). Остается, таким образом, доказать, что 5) $\Rightarrow$ 4). Пусть выполняется условие 5). Предположим противное: найдутся эндоморфизмы

$\alpha_1,\ldots,\alpha_m,\alpha_{m+1} \in Q(G)$, произведение которых отлично от нуля. Выберем какое-нибудь прямое слагаемое A_{m+1} ранга 1 группы G, для которого $\alpha_1\ldots\alpha_m\alpha_{m+1}A_{m+1} \neq 0$. Тогда и $\alpha_{m+1}A_{m+1} \neq 0$. Вложим $\alpha_{m+1}A_{m+1}$ во вполне разложимое прямое слагаемое $B_{m+1} = A_{m+1}^1 \oplus \ldots \oplus A_{m+1}^{k_{m+1}}$ группы G. Это возможно ввиду того, что ранг группы $\alpha_{m+1}A_{m+1}$ равен 1 и, следовательно, эта группа будет содержаться во всяком прямом слагаемом группы G, содержащем любой ее ненулевой элемент. Так как $\alpha_1\ldots\alpha_m\alpha_{m+1}A_{m+1} \neq 0$ и $\alpha_{m+1}A_{m+1} \subset B_{m+1}$, то $\alpha_1\ldots\alpha_m A_{m+1}^{i_{m+1}} \neq 0$ для некоторого $i_{m+1} = \overline{1, k_{m+1}}$. Положим $A_m = A_{m+1}^{i_{m+1}}$. Так как проекция на A_m подгруппы $\alpha_{m+1}A_{m+1}$ отлична от нуля и $\alpha_{m+1} \in Q(G)$, то, согласно следствию 3, $t(A_{m+1}) < t(A_m)$. Получили, что $\alpha_1\ldots\alpha_m A_m \neq 0$. Повторяя только что описанную процедуру, найдем прямое слагаемое A_{m-1} ранга 1 группы G, такое, что $\alpha_1\ldots\alpha_{m-1}A_{m-1} \neq 0$ и $t(A_m) < t(A_{m-1})$. Продолжая этот процесс дальше, в итоге найдем $m + 1$ прямое слагаемое $A_{m+1}, A_m, \ldots, A_1$ ранга 1 группы G, для которых $t(A_{m+1}) < t(A_m) < \ldots < t(A_1)$. Последнее противоречит условию m-максимальности для множества $\Omega(G)$.

Нужно отметить, что $Q(G)$ наибольший идеал, который можно использовать в условии 4) предыдущего результата. Справедливо более сильное утверждение: если I – идеал кольца $E(G)$ (G – сепарабельная группа без кручения) и $I \not\subset Q(G)$, то в I найдется не нильпотентный эндоморфизм. Действительно, пусть $\alpha \in I \setminus Q(G)$. Тогда, в силу следствия 3, у группы G существуют прямые слагаемые A и B ранга 1, для которых $\pi_B\alpha A \neq 0$ и $t(A) = t(B)$ (π_A, π_B – проекции группы G на подгруппы A и B соответственно). Пусть β: $B \to A$ – какой-либо ненулевой гомоморфизм. В этой ситуации $\gamma = \beta\pi_B\alpha\pi_A$ – ненулевой эндоморфизм группы A, который, так как A и B – прямые слагаемые, можно считать эндоморфизмом группы G, принадлежащим идеалу I. Эндоморфизм γ как эндоморфизм рациональной группы является умножением на некоторое рациональное число и поэтому не будет нильпотентным.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Крылов П.А.*, *Михалев А.В.*, *Туганбаев А.А.* Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов. М.: Факториал Пресс, 2006. 512 с.
2. *Мисяков В.М.* Некоторые вопросы теории абелевых групп // Тез. докл. Всерос. конф. по математике и механике. Томск: Том. гос. ун-т, 2008. 55 с.
3. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. Т. 1. М.: Мир, 1974. 336 с.
4. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. Т. 2. М.: Мир, 1977. 415 с.
5. *Добрусин Ю.Б.* О продолжениях частичных эндоморфизмов абелевых групп без кручения // Абелевы группы и модули. Томск, 1986. С. 36 – 53.
6. *Крылов П.А.* Радикал Джекобсонона кольца эндоморфизмов абелевой группы // Алгебра и логика. 2004. Т. 43. № 1. С. 60 – 76.
7. *Gardner B.J*, *Wiegandt R.* Radical Theory of rings. N.Y.: Marcel Dekker, Inc., 2004. 387 p.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

БУДАНОВ Александр Викторович – аспирант кафедры алгебры механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: alexandbud@mail.ru

Статья принята в печать 10.06.2010 г.