УДК 512.546

Л.В. Гензе

СВОБОДНЫЕ *n*-ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ГРУППЫ[1]

В статье вводятся понятия свободной и свободной абелевой n-периодических топологических групп тихоновского пространства X и доказывается существование таких групп.

Ключевые слова: *топологическая группа, свободная группа, n-периодическая группа, непрерывный гомоморфизм.*

Понятия свободной топологической группы и свободной абелевой топологической группы произвольного тихоновского пространства X ввел А.А. Марков в [1]. В [2] А.В. Архангельский изложил простое доказательство существования таких групп. В статье [3] были введены понятия и доказано существование свободной и свободной абелевой n-периодических топологических групп произвольных отрезков ординалов. В данной работе такие группы определяются для произвольного тихоновского пространства X и доказывается их существование. При доказательстве используются идеи и рассуждения из работы [2].

Определение. Пусть $n \geq 2$ – некоторое натуральное число. Группу G с единицей e будем называть n-периодической, если $g^n = e$ для каждого $g \in G$.

Несложно видеть, что класс всех n-периодических групп замкнут относительно переходов к подгруппам, переходов к фактор-группам и переходов к декартовым произведениям.

Пусть $n \geq 2$ – некоторое фиксированное натуральное число и X – произвольное множество. *Словом* будем называть формальное выражение вида $x_1^{\varepsilon_1}\ldots x_k^{\varepsilon_k}$, где $x_i \in X$ и $\varepsilon_i \in \{1,\ldots, n-1\}$, $i = 1,\ldots, k$. Пустой набор тоже будем называть словом. Слово будем называть *несократимым*, если в нем не встречается комбинаций вида $(x_1\ldots x_k)^m$, где $x_i \in X$, $i = 1,\ldots, k$ и $m \geq n$. Рассмотрим два несократимых слова z_1 и z_2 и образуем новое слово, в котором сначала идут все элементы первого слова (в их исходном порядке), а затем все элементы второго слова (также в их исходном порядке). В полученном слове произведем сокращения, последовательно вычеркивая комбинации $(x_1\ldots x_k)^n$, пока не получим несократимое слово, которое назовем *произведением* слов z_1 и z_2.

Множество всех несократимых слов (включая пустое слово) с только что введенной операцией умножения образует группу, которую мы обозначим $\mathcal{F}^{[n]}(X)$ и будем называть *свободной n-периодической группой*, порожденной множеством X.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009 – 2013 годы», государственный контракт П937 от 20 августа 2009 г., а также при финансовой поддержке Федерального агентства по науке и инновациям России по контракту № 02.740.11.0238.

Единицей в этой группе является пустое слово, а обратный элемент к $x_1^{\varepsilon_1}\dots x_k^{\varepsilon_k}$ – это $x_k^{n-\varepsilon_k}\dots x_1^{n-\varepsilon_1}$. Очевидно, что $\mathcal{F}^{[n]}(X)$ является n-периодической группой.

Теорема 1. Для любого тихоновского пространства X существует n-периодическая топологическая группа $F^{[n]}(X)$, обладающая следующими свойствами:

1) X гомеоморфно замкнутому подпространству в $F^{[n]}(X)$;

2) алгебраически $F^{[n]}(X)$ является свободной n-периодической группой, порожденной множеством X;

3) если G – n-периодическая топологическая группа и $f : X \to G$ – непрерывное отображение, то f можно продолжить до непрерывного гомоморфизма $\tilde{f} : F^{[n]}(X) \to G$.

Для доказательства этой теоремы нам потребуются две леммы.

Лемма 1 [4]**.** Каждая топологическая группа G топологически изоморфна замкнутой подгруппе некоторой линейно связной топологической группы $\tilde{G}$.

Доказательство. Рассмотрим множество $\tilde{G}$ тех функций f, заданных на полуинтервале $[0,1)$ со значениями в G, для которых существует последовательность $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$, такая, что f постоянна на каждом полуинтервале $[t_i , t_{i+1})$. Относительно операций $fg\,(t) = f(t)\,g(t)$ и $f^{-1}(t) = (f(t))^{-1}$, $t \in [0,1)$, $\tilde{G}$ является группой. Функция, тождественно равная единице группы G, является единицей группы $\tilde{G}$. Топологию на $\tilde{G}$ зададим следующим образом: для $\varepsilon > 0$ и окрестности V единицы группы G рассмотрим множество

$$U(V,\varepsilon) = \left\{ f \in \tilde{G} : \mu\left(\{t \in [0,1) : f(t) \notin V\}\right) < \varepsilon \right\},$$

где μ – мера Лебега на прямой. Семейство всевозможных множеств $U(V,\varepsilon)$ образует базу единицы группы $\tilde{G}$. Постоянные функции образуют замкнутую подгруппу в $\tilde{G}$, топологически изоморфную группе G. Осталось показать, что группа $\tilde{G}$ линейно связна. Пусть $f \in \tilde{G}$, $g \in \tilde{G}$ и $\alpha \in [0,1]$. Положим

$$h_\alpha(t) = \begin{cases} f(t),\ t \in [0,\alpha); \\ g(t),\ t \in [\alpha,1). \end{cases}$$

Ясно, что при любом $\alpha \in [0,1]$ $h_\alpha \in \tilde{G}$, $h_0 = g$, $h_1 = f$ и что отображение $\alpha \mapsto h_\alpha$ из $[0,1]$ в $\tilde{G}$ непрерывно. ■

Замечание. Очевидно, что если G – n-периодическая топологическая группа, то группа $\tilde{G}$, построенная в лемме 1, тоже будет n-периодической и что $\left|\tilde{G}\right| \le \max\left\{|G|, 2^{\aleph_0}\right\}$.

Лемма 2 [4]**.** Пусть X – тихоновское пространство, Y – линейно связное пространство, x_i, $i = 1,\dots, m$, – различные точки пространства X и y_i, $i = 1,\dots, m$, – различные точки пространства Y. Тогда существует такое непрерывное отображение $f : X \to Y$, что $f(x_i) = y_i$, $i = 1,\dots, m$.

Доказательство. Зафиксируем точку $y_0 \in Y$ и рассмотрим непрерывные отображения $\varphi_i : [0,1] \to Y$, для которых $\varphi_i(0) = y_0$, $\varphi_i(1) = y_i$, $i = 1,\dots, m$. Пусть U_i – попарно непересекающиеся окрестности точек x_i, $i = 1,\dots, m$, и $\psi_i : X \to [0,1]$ – такие непрерывные функции, что $\psi_i(x_i) = 1$ и $\psi_i(x) = 0$, если $x \in X \setminus U_i$.

Положим $\chi_i = \varphi_i \circ \psi_i$. Тогда $\chi_i(x_i) = y_i$ и сужения отображений χ_k и χ_l на множество $X \setminus \bigcup_{i=1}^{m} U_i$ равны для любых $k, l = 1,\ldots, m$. Следовательно, отображение $f: X \to Y$, заданное формулой

$$f(x) = \begin{cases} \chi_i(x), \ x \in U_i; \\ y_0, \ x \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{m} U_i, \end{cases}$$

определено корректно, непрерывно на X и $f(x_i) = y_i$, $i = 1,\ldots,m$. ■

Доказательство **теоремы 1.** Пусть $\xi = \{G_s \mid s \in S\}$ – такое семейство n-периодических топологических групп, что:

(а) $|G_s| \le \max\left\{|X|, 2^{\aleph_0}\right\}$;

(б) элементы ξ попарно топологически неизоморфны;

(в) любая n-периодическая топологическая группа H, для которой $|H| \le \max\left\{|X|, 2^{\aleph_0}\right\}$, топологически изоморфна некоторой группе $G_s \in \xi$.

Рассмотрим семейство $\eta_s = \{f_{s,t} \mid f_{s,t} : X \to G_{s,t}\,;\ t \in T_s\}$ всех непрерывных отображений пространства X в группу $G_s \in \xi$ ($G_{s,t}$ – это экземпляр группы G_s для каждого $t \in T_s$). Покажем, что семейство η_s разделяет точки и замкнутые множества пространства X. В самом деле, пусть $F \subset X$ – произвольное непустое замкнутое множество, $x \in X \setminus F$ и $f: X \to [0,1]$ – такое непрерывное отображение, что $f(x) = 0$ и $f(y) = 1$ для каждого $y \in F$. Из замечания после леммы 1 следует, что семейство ξ содержит линейно связную группу G (так как в семействе ξ найдется группа, топологически изоморфная дискретной аддитивной группе $\boldsymbol{Z}_n$ классов вычетов по модулю n, которая, очевидно, является n-периодической). Пусть g_0 и g_1 – два различных элемента этой группы и $\varphi : [0,1] \to G$ – такое непрерывное отображение, что $\varphi(0) = g_0$ и $\varphi(1) = g_1$. Ясно, что композиция $\varphi \circ f$ является непрерывным отображением из X в G (т.е. совпадает с некоторым $f_{s,t}$), что $\varphi \circ f(x) = g_0$ и $\varphi \circ f(y) = g_1$ для каждого $y \in F$.

Итак, семейство η_s разделяет точки и замкнутые множества, а, следовательно, диагональ δ отображений $\{f_{s,t} \mid t \in T_s\,,\ s \in S\}$ является гомеоморфным вложением пространства X в n-периодическую топологическую группу $\prod_{t\in T_s,\, s\in S} G_{s,t}$ ($\delta(x) = \left\{f_{s,t}(x) \mid t \in T_s,\ s \in S\right\} \in \prod_{t\in T_s,\, s\in S} G_{s,t}$).

Пусть $F^{[n]}(X)$ – алгебраическая оболочка множества $\delta(X)$ в $\prod_{t\in T_s,\, s\in S} G_{s,t}$. Наделим $F^{[n]}(X)$ топологией, индуцированной из тихоновского произведения $\prod_{t\in T_s,\, s\in S} G_{s,t}$ топологических групп $G_{s,\,t}$. Тогда $F^{[n]}(X)$ становится топологической группой, причем n-периодической, так как она является подгруппой декартова произведения n-периодических групп. Докажем, что группа $F^{[n]}(X)$ – искомая, для чего надо показать, что она обладает свойствами 1), 2) и 3).

Сначала докажем, что $F^{[n]}(X)$ обладает третьим свойством. Пусть G – произвольная n-периодическая топологическая группа и $f: X \to G$ – непрерывное отображение. Тогда образ $f(X)$ содержится в некоторой подгруппе $H \subset G$, такой, что

$|H| \le \max\{|X|, 2^{\aleph_0}\}$. Поэтому пара (H, f) совпадает с некоторой парой $(G_{s,t}, f_{s,t})$, где $G_{s,t} \in \xi$ и $f_{s,t} \in \eta_s$. Пусть $\pi_{s,t} : \prod_{t\in T_s,\, s\in S} G_{s,t} \to G_{s,t}$ – проекция. Ясно, что $\pi_{s,t}$ – непрерывный гомоморфизм. Его сужение на $F^{[n]}(X)$ и будет искомым продолжением отображения f.

Докажем теперь, что алгебраически $F^{[n]}(X)$ является свободной n-периодической группой, порожденной множеством X. Отображение $\delta : X \to \prod_{t\in T_s,\, s\in S} G_{s,t}$, построенное выше, можно продолжить до алгебраического гомоморфизма $\tilde{\delta} : \mathcal{F}^{[n]}(X) \to \prod_{t\in T_s,\, s\in S} G_{s,t}$ формулой

$$\tilde{\delta}\left(x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \ldots x_k^{\varepsilon_k}\right) = (\delta(x_1))^{\varepsilon_1} (\delta(x_2))^{\varepsilon_2} \ldots (\delta(x_k))^{\varepsilon_k}.$$

Докажем, что этот гомоморфизм является (алгебраическим) изоморфизмом между $\mathcal{F}^{[n]}(X)$ и $F^{[n]}(X) \subset \prod_{t\in T_s,\, s\in S} G_{s,t}$. Ясно, что $\tilde{\delta}\left(\mathcal{F}^{[n]}(X)\right) = F^{[n]}(X)$. Осталось показать, что ядро гомоморфизма состоит из нейтрального элемента группы $\mathcal{F}^{[n]}(X)$, т.е. что для любого непустого слова $x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \ldots x_k^{\varepsilon_k} \in \mathcal{F}^{[n]}(X)$ его образ $\tilde{\delta}\left(x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \ldots x_k^{\varepsilon_k}\right)$ отличен от единицы группы $F^{[n]}(X)$. Рассмотрим на группе $\mathcal{F}^{[n]}(X)$ дискретную топологию. По лемме 1 найдется линейно связная топологическая группа $\tilde{G}$, содержащая замкнутую подгруппу, топологически изоморфную группе $\mathcal{F}^{[n]}(X)$. Пусть $\tilde{x}_1^{\varepsilon_1} \tilde{x}_2^{\varepsilon_2} \ldots \tilde{x}_k^{\varepsilon_k} \ne e$ – элемент этой подгруппы, соответствующий $x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \ldots x_k^{\varepsilon_k}$ (e – единица группы $\tilde{G}$). По лемме 2 найдется такое непрерывное отображение $f : X \to \tilde{G}$, что $f(x_i) = \tilde{x}_i$, $i = 1,\ldots, k$. Можно считать, что $f = f_{s,t}$ при некоторых $s \in S$ и $t \in T_s$. Но отображение δ – это диагональ отображений $f_{s,t}$. Следовательно, $\tilde{e} \ne (\delta(x_1))^{\varepsilon_1} (\delta(x_2))^{\varepsilon_2} \ldots (\delta(x_k))^{\varepsilon_k} = \tilde{\delta}\left(x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \ldots x_k^{\varepsilon_k}\right)$, где $\tilde{e}$ – единица в $F^{[n]}(X)$.

Наконец, убедимся, что X – замкнутое подпространство в $F^{[n]}(X)$. Если X – компакт, то пространство X замкнуто в $F^{[n]}(X)$, так как $F^{[n]}(X)$ – хаусдорфово пространство. Пусть теперь X – произвольное тихоновское пространство и cX – некоторая его компактификация. По уже доказанному свойству 2) можно считать, что $F^{[n]}(X) \subset F^{[n]}(cX)$, значит, $F^{[n]}(cX)$ содержит $F^{[n]}(X)$ в качестве алгебраической подгруппы. Пусть τ_c – топология на $F^{[n]}(X)$, индуцированная из $F^{[n]}(cX)$. Так как cX замкнуто в $F^{[n]}(cX)$ и $X = cX \cap F^{[n]}(X)$, то X замкнуто в $(F^{[n]}(X), \tau_c)$. Обозначим через τ топологию на $F^{[n]}(X)$, наследуемую из $\prod_{t\in T_s,\, s\in S} G_{s,t}$. По доказанному свойству 3) тождественное отображение $\varphi : X \to X \subset (F^{[n]}(X), \tau_c)$ продолжается до непрерывного гомоморфизма (даже изоморфизма) $\tilde{\varphi} : \left(F^{[n]}(X), \tau\right) \to \left(F^{[n]}(X), \tau_c\right)$. Но так как X замкнуто в $(F^{[n]}(X), \tau_c)$, то $\tilde{\varphi}^{-1}(X) = X$ замкнуто в $(F^{[n]}(X), \tau)$. ■

Определение. Группу $F^{[n]}(X)$, существование которой доказано в теореме, будем называть *свободной n-периодической топологической группой пространства X*.

Определим теперь свободные абелевы n-периодические группы тихоновских пространств.

Напомним, что *прямой суммой* семейства абелевых групп $\{A_s\}_{s\in S}$ называется подмножество в декартовом произведении $\prod_{s\in S} A_s$, состоящее из таких элементов $\{a_s\}_{s\in S}$, у которых $a_s \neq 0$ лишь для конечного числа индексов $s \in S$.

Пусть $n \geq 2$ – некоторое фиксированное натуральное число и X – произвольное множество. *Свободной абелевой n-периодической группой*, порожденной множеством X, будем называть прямую сумму семейства групп $\left\{\boldsymbol{Z}_n^x\right\}_{x\in X}$, где $\boldsymbol{Z}_n^x$ изоморфна $\boldsymbol{Z}_n$ (аддитивной группе классов вычетов по модулю n) для каждого $x \in X$. Обозначим эту группу $\mathcal{A}^{[n]}(X)$. Очевидно, что $\mathcal{A}^{[n]}(X)$ является n-периодической группой. Элементы группы $\mathcal{A}^{[n]}(X)$ можно представлять себе так: это формальные конечные линейные комбинации $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k$ элементов множества X с коэффициентами из $\boldsymbol{Z}_n$, причем две такие линейные комбинации равны тогда и только тогда, когда они отличаются, самое большее, порядком слагаемых. Сложение линейных комбинаций проводится формально, путем сложения коэффициентов при одинаковых элементах x_i и приведения их по модулю n.

Теорема 2. Для любого тихоновского пространства X существует абелева n-периодическая топологическая группа $A^{[n]}(X)$, обладающая следующими свойствами:

1) X гомеоморфно замкнутому подпространству в $A^{[n]}(X)$;

2) алгебраически $A^{[n]}(X)$ является свободной абелевой n-периодической группой, порожденной множеством X;

3) если G – абелева n-периодическая топологическая группа и $f : X \to G$ – непрерывное отображение, то f можно продолжить до непрерывного гомоморфизма $\tilde{f} : A^{[n]}(X) \to G$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1.

Определение. Группу $A^{[n]}(X)$, существование которой доказано в теореме, будем называть *свободной абелевой n-периодической топологической группой пространства X*.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Марков А.А.* О свободных топологических группах // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1945. Вып. 9. № 1. С. 3 – 64.
2. *Архангельский А.В.* Топологические пространства и непрерывные отображения. Замечания о топологических группах. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1969. 147 с.
3. *Genze L.V., Gul'ko S.P., and Khmyleva T.E.* Classification of continuous n-valued function spaces and free periodic topological groups for ordinals // Top. Proc. 2011. V. 38. P. 1 – 15. (E-published on June 30, 2010. URL: http://topology.auburn.edu/tp/reprints/v38/)
4. *Хьюитт Э., Росс К.* Абстрактный гармонический анализ. Т. 1. М.: Наука, 1975. 656 с.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

ГЕНЗЕ Леонид Владимирович – старший преподаватель кафедры теории функций Томского государственного университета. E-mail: genze@math.tsu.ru

Статья принята в печать 21.06.2010 г.