

УДК 517. 521

Е.Г. Лазарева, О.С. Осипов

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ АНАЛОГИ РЯДОВ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ¹

Исследуются интегральные аналоги условно сходящихся рядов в банаховых пространствах. Показано, что область значений интегрального аналога ряда есть аффинное подпространство. Его можно найти способом, описанным в теореме Штейница об области сумм рядов в конечномерных пространствах.

Ключевые слова: интегральный аналог ряда, перестановка ряда, область сумм ряда, перестановка интеграла, область значений интеграла.

Рассмотрим сходящийся ряд $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ в банаховом пространстве E над полем $\mathbf{R}$.

Интегральным аналогом этого ряда назовём несобственный интеграл Бохнера

$$\int_0^{+\infty} x(t)dt = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \int_0^{\tau} x(t)dt, \text{ где } x(t) = x_i \text{ при } t \in [i-1, i), i \in \mathbf{N}. \text{ Заметим, что собст-}$$

венный интеграл Бохнера $\int_0^{+\infty} x(t)dt$ существует тогда и только тогда, когда сущест-

вует $\int_0^{+\infty} \|x(t)\| dt = \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|$, однако несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} x(t)dt$ определен и

его значение совпадает с суммой ряда $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$. Пусть члены ряда переставлены

биекцией $\pi: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$. Тогда интегральный аналог можно переставить соответствующим образом:

$$\int_0^{+\infty} x(\delta(t))dt = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \int_0^{\tau} x(\delta(t))dt, \text{ где } \delta: [0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty), \delta([i-1, i)) =$$

$$= [\pi(i)-1, \pi(i)). \text{ В общем случае под перестановкой интеграла } \int_0^{+\infty} x(t)dt \text{ пони-}$$

$$\text{маем } \int_0^{+\infty} x(\delta(t))dt, \text{ где } \delta: [0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty) \text{ – биекция, сохраняющая меру Лебега,}$$

то есть **перестановка** (см. [1]). Аналогично области сумм ряда (см. [2]) определим **область значений несобственного интеграла**, как множество всех таких элементов $y \in E$, что найдётся перестановка $\delta: [0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$, для которой не-

собственный интеграл $\int_0^{+\infty} x(\delta(t))dt$ сходится к y .

¹ Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России». Госконтракт П937 от 20 августа 2009 года.

В работе [1] рассмотрен ряд Корнилова (см. [3]) $\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i$, $\varphi_i \in L_p(0;1)$, область сумм которого состоит из двух точек $L_p(0,1)$, а именно, из функций, тождественно равных 0 и 1 на интервале $(0;1)$. В [1] показано, что интегральный аналог этого ряда $\int_0^{+\infty} \varphi(t)dt$ имеет область значений, состоящую из всех постоянных функций в $L_p(0,1)$. Цель нашей работы – доказать, что интегральный аналог любого условно сходящегося ряда в банаховом пространстве E имеет в качестве области значений аффинное подпространство в пространстве E . А именно, докажем следующую теорему.

Теорема. Пусть дан условно сходящийся ряд $\sum_{i=1}^{\infty} x_i = s_0$ в банаховом пространстве E . Тогда для его интегрального аналога $\int_0^{+\infty} x(t)dt$ выполнено:

$$\text{OC} \left(\int_0^{+\infty} x(t)dt \right) = s_0 + \left\{ x \in E : \forall f \in E^* \sum_{i=1}^{\infty} |f(x_i)| < +\infty \Rightarrow f(x) = 0 \right\}.$$

Отметим, что множество $s_0 + \left\{ x \in E : \forall f \in E^* \sum_{i=1}^{\infty} |f(x_i)| < +\infty \Rightarrow f(x) = 0 \right\}$ есть,

согласно теореме Штейница, область сумм ряда $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$, если пространство E ко-

нечномерно (см. [2]). В случае бесконечномерного пространства E область сумм ряда лишь содержится в этом множестве, но она может быть незамкнутой, ограниченной и даже состоять из конечного числа элементов [3]. Наличие в бесконечномерном пространстве рядов, область сумм которых не подчиняется теореме Штейница (например, состоит из конечного числа точек), можно объяснить существованием несжимаемых систем (см. [4]). А именно, в любом бесконечномерном банаховом пространстве для всякого $M > 0$ найдется система векторов

$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, такая, что $\max_{1 \leq j \leq n} \left\| \sum_{i=1}^j x_{\pi(i)} \right\| \geq M \cdot \max_{1 \leq j \leq n} \|x_j\| + \left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|$ для любой перестановки $\pi: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$. Такие системы называются M -несжимаемыми.

Приведём пример 3-несжимаемой системы в пространстве c_0 с нулевой суммой. Система состоит из 6 векторов:

$$x_1 = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, \dots)$$

$$x_2 = (1, -1, 1, -1, -1, -1, -1, 1, 1, -1, 0, 0, \dots)$$

$$x_3 = (1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, -1, -1, -1, 0, 0, \dots)$$

$$x_4 = (-1, 1, -1, -1, 1, -1, -1, 1, -1, 1, 0, 0, \dots)$$

$$x_5 = (-1, -1, 1, -1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, 0, 0, \dots)$$

$$x_6 = (-1, -1, -1, 1, -1, -1, 1, -1, 1, 1, 0, 0, \dots)$$

Число ненулевых координат в каждом векторе этой системы равно $\frac{1}{2}C_6^3 = 10$, то есть число -1 поставлено на любые 3 из 6 мест по вертикали, а потом убраны столбцы, которые получаются из встретившихся раньше умножением на -1 .

Следующая лемма показывает, что при переходе к интегральному аналогу ряда любую систему векторов можно сжать.

Лемма 1. Пусть дана система векторов $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ в пространстве E . Пусть $x_k = 0 \ \forall k > n$, $\int_0^{+\infty} x(t)dt$ – интегральный аналог ряда $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$

найдется перестановка $\delta: [0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$, такая, что $\sup_{0 < \tau < n} \left\| \int_0^{\tau} x(\delta(t))dt \right\| < \left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\| + \varepsilon$, причем $\delta([0; n]) = [0; n]$, $\delta|_{[n; +\infty)}(t) = t$, то есть перестановка δ отлична от тождественной только на множестве $[0; n]$.

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть $\max_{1 \leq j \leq n} \left\| \sum_{i=1}^j x_i \right\| = M \max_{1 \leq i \leq n} \|x_i\|$. Найдем $N \in \mathbb{N}$ такое, что $\frac{M+1}{N} \max_{1 \leq i \leq n} \|x_i\| < \varepsilon$. Строим искомую перестановку δ . Каждый полуинтервал $[i-1, i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) делим на N равных промежутков $[i-1+(k-1)/N, i-1+k/N)$, $k = 1, 2, \dots, N$.

На первом шаге составляем подряд первые промежутки из каждого полуинтервала:

$$\delta([((i-1)/N; i/N)) = [i-1, i-1+1/N), i = 1, 2, \dots, n.$$

Вторым шагом составляем подряд вторые промежутки из каждого полуинтервала:

$$\delta([n/N+(i-1)/N; n/N+i/N)) = [i-1+1/N, i-1+2/N), i = 1, 2, \dots, n.$$

Соответственно на K -м шаге $\delta([((K-1)n/N+(i-1)/N; (K-1)n/N+i/N)) = [i-1+(K-1)/N, i-1+K/N)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Сделав N шагов, мы закончим построение функции δ на полуинтервале $[0; n]$. Осталось положить $\delta|_{[n; +\infty)}(t) = t$ и построение нужной перестановки δ закончено.

Оценим $\sup_{0 < \tau < n} \left\| \int_0^{\tau} x(\delta(t))dt \right\|$. Заметим, что при $K = 1, 2, \dots, N$

$$\left\| \int_{\frac{(K-1)n}{N}}^{\frac{Kn}{N}} x(\delta(t))dt \right\| = \left\| \sum_{i=1}^n \int_{i-1+(K-1)/N}^{i-1+K/N} x(t)dt \right\| = \left\| \sum_{i=1}^n \frac{1}{N} x_i \right\| = \frac{1}{N} \left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|.$$

Пусть $\tau \in [\frac{Kn}{N} + j/N; \frac{Kn}{N} + (j+1)/N)$ при некоторых K, j . Имеем

$$\left\| \int_0^{\tau} x(\delta(t))dt \right\| \leq \left\| \int_0^{\frac{Kn}{N}} x(\delta(t))dt \right\| + \left\| \int_{\frac{Kn}{N}}^{\tau} x(\delta(t))dt \right\| \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{K}{N} \left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\| + \left\| \sum_{i=1}^j \int_{i-1+K/N}^{i-1+(K+1)/N} x(t) dt \right\| + \left\| \int_{j/N+Kn/N}^{\tau} x(\delta(t)) dt \right\| \leq \\ &\leq \left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\| + \left\| \sum_{i=1}^j \frac{1}{N} x_i \right\| + \|x_{j+1}\|/N. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\sup_{0 < \tau < n} \left\| \int_0^{\tau} x(\delta(t)) dt \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\| + \frac{1}{N} \left(\max_{1 \leq j \leq n} \left\| \sum_{i=1}^j x_i \right\| + \max_{1 \leq i \leq n} \|x_i\| \right) = \left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\| + \frac{M+1}{N} \max_{1 \leq i \leq n} \|x_i\| < \left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\| + \varepsilon,$$

что и требовалось. ■

Замечание. Ниже нам понадобится *обобщенный вариант леммы 1*:

Пусть дана система $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ векторов в пространстве E , $\{a_i, i = 0, 1, 2, \dots, n\}$ – возрастающая система вещественных чисел, $x(t) = x_i$ при $t \in [a_{i-1}, a_i)$, $x(t) = 0$ при остальных t , $\alpha_i = a_i - a_{i-1}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется

перестановка δ , такая, что $\sup_{a_0 < \tau < a_n} \left\| \int_{a_0}^{\tau} x(\delta(t)) dt \right\| < \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right\| + \varepsilon$, причем δ отлична от

тождественной только на множестве $[a_0; a_n)$.

Доказательство проводится аналогично лемме 1, а именно, нужно разделить каждый полуинтервал $[a_{i-1}, a_i)$ на N равных промежутков, где $\frac{M+1}{N} \max_{1 \leq i \leq n} \|\alpha_i x_i\| < \varepsilon$,

число M получено из равенства $\max_{1 \leq j \leq n} \left\| \sum_{i=1}^j \alpha_i x_i \right\| = M \max_{1 \leq i \leq n} \|\alpha_i x_i\|$.

Для работы с интегралом нам понадобится

Лемма 2. Пусть функция $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ интегрируема по Лебегу на $[0; +\infty)$.

Тогда для любой перестановки $\delta: [0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$ интеграл Лебега $\int_0^{+\infty} f(\delta(t)) dt$

существует и выполнено равенство: $\int_0^{+\infty} f(t) dt = \int_0^{+\infty} f(\delta(t)) dt$.

Доказательство. Используем определение интеграла Лебега. Множество простых функций на $[0; +\infty)$ обозначим через $\mathcal{P}([0, +\infty))$, σ -алгебру измеримых по Лебегу множеств в $[0; +\infty)$ – через $\mathcal{L}[0, +\infty)$. Пусть последовательность Коши

$\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ такова, что $\varphi_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(t)$ почти всюду. А именно, $\varphi_n = \sum_{i=1}^{k_n} a_{i,n} \chi_{A_{i,n}}$,

$a_{i,n} \in \mathbf{R}$, $A_{i,n} \in \mathcal{L}[0, +\infty)$, $A_{i,n} \cap A_{j,n} = \emptyset$ при $i \neq j$,

$$\chi_{A_{i,n}}(t) = \begin{cases} 1, & t \in A_{i,n}, \\ 0, & t \notin A_{i,n}. \end{cases}$$

Тогда по определению

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{k_n} a_{i,n} \mu A_{i,n}.$$

Докажем, что последовательность простых функций $\{\varphi_n \circ \pi\}_{n=1}^{\infty}$ является последовательностью Коши в пространстве $\mathcal{P}([0, +\infty))$ и сходится к функции $f \circ \pi$ почти всюду. Заметим, что $\chi_A \circ \pi = \chi_{\pi^{-1}A}$ для любого $A \in \mathcal{L}[0, +\infty)$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем $N \in \mathbb{N}$ так, что

$$\forall p, q > N: \|\varphi_p - \varphi_q\|_{\mathcal{P}} = \int_0^{+\infty} |\varphi_p(t) - \varphi_q(t)| dt < \varepsilon.$$

Тогда для любых $p, q > N$:

$$\begin{aligned} \|\varphi_p - \varphi_q\|_{\mathcal{P}} &= \left\| \sum_{i=1}^{k_p} a_{i,p} \chi_{A_{i,p}} - \sum_{j=1}^{k_q} a_{j,q} \chi_{A_{j,q}} \right\|_{\mathcal{P}} = \left\| \begin{matrix} B_{i,j} = A_{i,p} \cap A_{j,q} \\ b_{i,j} = a_{i,p} - a_{j,q} \end{matrix} \right\|_{\mathcal{P}} = \left\| \sum_{i=1}^{n_p} \sum_{j=1}^{n_q} b_{i,j} \chi_{B_{i,j}} \right\|_{\mathcal{P}} = \\ &= \sum_{i=1}^{n_p} \sum_{j=1}^{n_q} |b_{i,j}| \mu B_{i,j} = \left\| \sum_{i=1}^{n_p} \sum_{j=1}^{n_q} b_{i,j} \chi_{\pi^{-1}B_{i,j}} \right\|_{\mathcal{P}} = \\ &= \left\| \begin{matrix} \pi^{-1}B_{i,j} = \\ = \pi^{-1}A_{i,p} \cap \pi^{-1}A_{j,q} \end{matrix} \right\|_{\mathcal{P}} = \left\| \sum_{i=1}^{k_p} a_{i,p} \chi_{\pi^{-1}A_{i,p}} - \sum_{j=1}^{k_q} a_{j,q} \chi_{\pi^{-1}A_{j,q}} \right\|_{\mathcal{P}} = \\ &= \left\| \sum_{i=1}^{k_p} a_{i,p} \chi_{A_{i,p}} \circ \pi - \sum_{j=1}^{k_q} a_{j,q} \chi_{A_{j,q}} \circ \pi \right\|_{\mathcal{P}} = \|\varphi_p \circ \pi - \varphi_q \circ \pi\|_{\mathcal{P}}, \end{aligned}$$

Следовательно, $\|\varphi_p \circ \pi - \varphi_q \circ \pi\|_{\mathcal{P}} < \varepsilon$.

Пусть множество $M \in \mathcal{L}[0, +\infty)$ таково, что $\mu M = 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t) = f(t)$ для любых $t \in [0, +\infty) \setminus M$. Тогда $\mu(\pi^{-1}M) = 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(\pi(t)) = f(\pi(t))$ для любых $t \in [0, +\infty) \setminus \pi^{-1}M$.

Осталось заметить, что

$$\int_0^{+\infty} f(\pi(t)) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \varphi_n \circ \pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{k_n} a_{i,n} \mu(\pi^{-1}A_{i,n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{k_n} a_{i,n} \mu A_{i,n} = \int_0^{+\infty} f(t) dt.$$

Лемма доказана.

Нам понадобится следующая лемма (см. [2]).

Лемма 3. Пусть дан условно сходящийся ряд $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ в банаховом пространстве E .

Пусть $y \in E$, $\overline{Q}(\{x_i\}_{i=1}^{\infty}) = \overline{\left\{ \sum_{i=1}^N \lambda_i x_i : 0 \leq \lambda_i \leq 1, N = 1, 2, \dots \right\}}$ (замыкание множества

конечных сумм элементов ряда $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ с весами от 0 до 1),

$$\Gamma_0(\{x_i\}_{i=1}^{\infty}) = \left\{ x \in E : \forall f \in E^* \sum_{i=1}^{\infty} |f(x_i)| < +\infty \Rightarrow f(x) = 0 \right\} \text{ (аннулятор множеств)}$$

ва функционалов сходимости ряда $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$).

Тогда для каждого элемента $x \in y + \bar{Q}(\{x_i\}_{i=1}^{\infty})$ множество $x + \Gamma_0(\{x_i\}_{i=1}^{\infty})$ содержится в $y + \bar{Q}(\{x_i\}_{i=1}^{\infty})$.

Доказательство теоремы.

1. Покажем, что $OC(\int_0^{+\infty} x(t)dt) \supset s_0 + \Gamma_0(\{x_i\}_{i=1}^{\infty})$. Для простоты записи обозначим $\Gamma_0 = \Gamma_0(\{x_i\}_{i=1}^{\infty})$. Пусть $s \in s_0 + \Gamma_0$.

Построим сначала перестановку $\sigma: [0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$ и возрастающую последовательность положительных чисел $(\tau_k) \rightarrow \infty$ так, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{\tau_k} x(\sigma(t))dt = s$. Зафиксируем числовую последовательность $(\varepsilon_k) \rightarrow 0$, $\varepsilon_k > 0$. Так как $s_0 \in \bar{Q}(\{x_i\}_{i=1}^{\infty})$, то по лемме 3 имеем: $s \in s_0 + \Gamma_0 \subset \bar{Q}(\{x_i\}_{i=1}^{\infty})$, то есть найдутся $\lambda_i^1 \in [0; 1]$, для которых выполнено условие $\left\| s - \sum_{i=1}^{N_1} \lambda_i^1 x_i \right\| < \varepsilon_1$. Положим $\tau_1 = \sum_{i=1}^{N_1} \lambda_i^1 + (1 - \lambda_1^1)$. Перестановку σ на $[0; \tau_1)$ зададим так: для каждого $i \in \{1, 2, \dots, N_1\}$, такого, что $\lambda_i^1 > 0$, возьмем промежуток $[i - 1, \lambda_i^1 + (i - 1))$, затем составим эти промежутки подряд в порядке следования индекса i и добавим в конце промежутков $[1 - \lambda_1^1; 1)$, если $\lambda_1^1 \neq 1$. Мы не будем указывать точную формулу для перестановки σ , отметим только еще раз, что объединение вышеназванных промежутков есть $\sigma([0; \tau_1))$ и это множество содержит полностью промежуток $[0; 1)$. Получаем

$$\left\| \int_0^{\tau_1} x(\sigma(t))dt - s \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{N_1} \lambda_i^1 x_i + (1 - \lambda_1^1)x_1 - s \right\| < \|x_1\| + \varepsilon_1.$$

Обозначим $\int_0^{\tau_1} x(\sigma(t))dt = s_1$. Отметим, что

$$s_0 \in s_1 + \bar{Q}(\{x_i\}_{i=N_1+1}^{\infty} \cup \{(1 - \lambda_i^1)x_i, i = 2, 3, \dots, N_1\}),$$

множество $\Gamma_0(\{x_i\}_{i=N_1+1}^{\infty} \cup \{(1 - \lambda_i^1)x_i, i = 2, 3, \dots, N_1\})$ совпадает с $\Gamma_0(\{x_i\}_{i=1}^{\infty})$, так как изменилось только конечное число членов ряда. Тогда по лемме 3 $s \in s_0 + \Gamma_0 \subset s_1 + \bar{Q}(\{x_i\}_{i=N_1+1}^{\infty} \cup \{(1 - \lambda_i^1)x_i, i = 2, 3, \dots, N_1\})$, то есть найдутся

$\lambda_i^2 \in [0; 1]$, для которых выполнено условие $\left\| s - s_1 - \sum_{i=2}^{N_2} \lambda_i^2 x_i \right\| < \varepsilon_2$. При этом оче-

видно, что $\lambda_i^2 \leq 1 - \lambda_i^1$, $i = 2, 3, \dots, N_1$ и можно считать, что $N_2 \geq N_1$. Положим

$\tau_2 = \tau_1 + \sum_{i=2}^{N_2} \lambda_i^2 + (1 - \lambda_2^1 - \lambda_2^2)$. Перестановку σ на $[\tau_1; \tau_2)$ зададим так: для каждого

$i \in \{2, 3, \dots, N_1\}$, такого, что $\lambda_i^2 > 0$, возьмем промежуток $[\lambda_i^1 + (i - 1), \lambda_i^1 + \lambda_i^2 + (i - 1))$,

а при $i \in \{N_1+1, \dots, N_2\}$ – промежутков $[i-1, \lambda_i^2 + (i-1))$, составим эти промежутки подряд в порядке следования индекса i , а в конце добавим промежутков $[2-\lambda_2^1 - \lambda_2^2, 2)$, если он не пуст. В результате определено множество $\sigma([0; \tau_2))$, которое содержит полностью промежуток $[0, 2)$, причем

$$\left\| \int_0^{\tau_2} x(\sigma(t))dt - s \right\| = \left\| s_1 + \sum_{i=2}^{N_2} \lambda_i^2 x_i + (1 - \lambda_2^1 - \lambda_2^2)x_2 - s \right\| < \|x_2\| + \varepsilon_2.$$

Построение τ_3 аналогично построению τ_2 . Обозначим $\int_0^{\tau_2} x(\sigma(t))dt = s_2$. Имеем

$$s_0 \in s_2 + \bar{Q}(\{x_i\}_{i=N_2+1}^\infty \cup \{(1 - \lambda_i^2 - \lambda_i^1)x_i, i=3, \dots, N_1\} \cup \{(1 - \lambda_i^2)x_i, i=N_1+1, \dots, N_2\}),$$

следовательно, по лемме 3

$$s \in s_0 + \Gamma_0 \subset s_2 + \bar{Q}(\{x_i\}_{i=N_2+1}^\infty \cup \{(1 - \lambda_i^2 - \lambda_i^1)x_i, i=3, \dots, N_1\} \cup \{(1 - \lambda_i^2)x_i, i=N_1+1, \dots, N_2\}).$$

Находим $\lambda_i^3 \in [0; 1]$, такие, что $\left\| s - s_2 - \sum_{i=3}^{N_3} \lambda_i^3 x_i \right\| < \varepsilon_3$. Положим

$$\tau_3 = \tau_2 + \sum_{i=3}^{N_3} \lambda_i^3 + (1 - \lambda_3^1 - \lambda_3^2 - \lambda_3^3).$$

Перестановку σ на $[\tau_2, \tau_3)$ зададим так: для каждого $i \in \{3, \dots, N_1\}$, такого, что $\lambda_i^3 > 0$, возьмем промежуток $[\lambda_i^2 + \lambda_i^1 + (i-1), \lambda_i^3 + \lambda_i^2 + \lambda_i^1 + (i-1))$, при $i \in \{N_1+1, \dots, N_2\}$ – промежуток $[\lambda_i^2 + (i-1), \lambda_i^3 + \lambda_i^2 + (i-1))$, а при $i \in \{N_2+1, \dots, N_3\}$ – промежуток $[i-1, \lambda_i^3 + (i-1))$. Составим эти промежутки подряд в порядке следования индекса i , а в конце добавим промежуток $[3 - \lambda_3^1 - \lambda_3^2 - \lambda_3^3, 3)$, если он не пуст. В результате определено множество $\sigma([0, \tau_3))$, которое содержит полностью промежуток $[0, 3)$, причем

$$\left\| \int_0^{\tau_3} x(\sigma(t))dt - s \right\| < \|x_3\| + \varepsilon_3.$$

Построение дальнейших членов последовательности (τ_k) и перестановки σ на промежутках $[\tau_{k-1}, \tau_k)$ аналогично, при этом всякий раз $\sigma([0, \tau_k))$ содержит $[0, k)$ и

$$\left\| \int_0^{\tau_k} x(\sigma(t))dt - s \right\| < \|x_k\| + \varepsilon_k.$$

Теперь «исправим» перестановку σ отдельно на каждом промежутке $[\tau_{k-1}, \tau_k)$, построив перестановку $\delta: [0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$ такую, что $\int_0^{+\infty} x(\sigma \circ \delta(t))dt = s$. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ рассмотрим систему элементов $\{\alpha_j^k x_j, j \in J_k\}$,

$$\{\lambda_i^{k+1} x_i, i = k+1, \dots, N_{k+1}\} \cup \{(1 - \lambda_k^1 - \lambda_k^2 - \dots - \lambda_k^k)x_k\} = \{\alpha_j^k x_j, j \in J_k\},$$

которая состоит из элементов, добавленных к значению $s_k = \int_0^{\tau_k} x(\sigma(t))dt$ для полу-

чения $s_{k+1} = \int_0^{\tau_{k+1}} x(\sigma(t))dt$. Заметим, что $\sum_{j \in J_k} \alpha_j^k x_j = \int_0^{\tau_{k+1}} x(\sigma(t))dt - \int_0^{\tau_k} x(\sigma(t))dt \rightarrow 0$

при $k \rightarrow \infty$, где α_j^k – длина промежутка, на котором зафиксирован соответствующий элемент x_j . К системе $\{x_j\}, j \in J_k$, применим обобщенный вариант леммы 1 и получим перестановку δ_k , отличную от тождественной на $[\tau_k; \tau_{k+1})$ и такую, что

$$\sup_{\tau_k < \tau < \tau_{k+1}} \left\| \int_{\tau_k}^{\tau} x(\sigma(\delta_k(t)))dt \right\| < \left\| \sum_{j \in J_k} \alpha_j^k x_j \right\| + \varepsilon_k. \quad \text{Перестановку } \delta \text{ построим так:}$$

$\delta(t) = \delta_k(t)$ при $t \in [\tau_k; \tau_{k+1})$, $\delta(t) = t$ при $t \in [0; \tau_1)$. Имеем

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^{\tau} x(\sigma(\delta(t)))dt - s \right\| &\leq \left\| \int_0^{\tau_k} x(\sigma(\delta(t)))dt - s \right\| + \left\| \int_{\tau_k}^{\tau} x(\sigma(\delta_k(t)))dt \right\| = \\ &= \left\| \int_0^{\tau_k} x(\sigma(t))dt - s \right\| + \left\| \int_{\tau_k}^{\tau} x(\sigma(\delta_k(t)))dt \right\| < \|x_k\| + \varepsilon_k + \left\| \sum_{j \in J_k} \alpha_j^k x_j \right\| + \varepsilon_k \rightarrow 0 \text{ при } \tau \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

$$2. \text{ Покажем, что } \text{OC} \left(\int_0^{+\infty} x(t)dt \right) \subset s_0 + \Gamma_0(\{x_i\}_{i=1}^{\infty}).$$

Заметим, что $\int_0^{+\infty} x(t)dt = s_0$. Допустим сначала, что $\Gamma_0(\{x_i\}_{i=1}^{\infty}) = E$, то есть не

существует функционалов сходимости: для каждого $f \in E^*$ ряд $\sum_{i=1}^{\infty} |f(x_i)|$ расходится. Тогда $s_0 + \Gamma_0(\{x_i\}_{i=1}^{\infty}) = s_0 + E = E$ и по доказанному в п.1 теоремы

$$\text{OC} \left(\int_0^{+\infty} x(t)dt \right) \supset s_0 + \Gamma_0(\{x_i\}_{i=1}^{\infty}) = E. \text{ Таким образом,}$$

$$\text{OC} \left(\int_0^{+\infty} x(t)dt \right) = E = s_0 + \Gamma_0(\{x_i\}_{i=1}^{\infty}),$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь случай, когда функционалы сходимости существуют. Зафиксируем такое $f \in E^*$, что $\sum_{i=1}^{\infty} |f(x_i)| < +\infty$. Заметим, что для функции

$f \circ x: [0; +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ существует собственный интеграл Лебега $\int_0^{+\infty} f(x(t))dt$, по-

скольку

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} |f(x(t))| dt &= \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \int_0^{\tau} |f(x(t))| dt = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \left(\sum_{i=1}^{[\tau]} |f(x_i)| + \int_{[\tau]}^{\tau} |f(x_{[\tau]})| dt \right) = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \left(\sum_{i=1}^{[\tau]} |f(x_i)| + (\tau - [\tau]) |f(x_{[\tau]})| \right) \leq \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{[\tau]+1} |f(x_i)| = \sum_{i=1}^{\infty} |f(x_i)| < +\infty. \end{aligned}$$

Согласно лемме 2, для любой перестановки $\delta: [0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$ существует интеграл $\int_0^{+\infty} f(\delta(t)) dt = \int_0^{+\infty} f(t) dt$. Зафиксируем $y \in \text{OC} \left(\int_0^{+\infty} x(t) dt \right)$, $y = \int_0^{+\infty} x(\delta(t)) dt$.

Заметим, что для всех $\gamma > 0$ $f \left(\int_0^{\gamma} x(t) dt \right) = \int_0^{\gamma} f(x(t)) dt$ (см. [5, теорема III.6.20]).

Имеем

$$\begin{aligned} f(y) &= f \left(\int_0^{+\infty} x(\delta(t)) dt \right) = f \left(\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \int_0^{\gamma} x(\delta(t)) dt \right) = \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} f \left(\int_0^{\gamma} x(\delta(t)) dt \right) = \\ &= \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \int_0^{\gamma} f(x(\delta(t))) dt = \int_0^{+\infty} f(x(\delta(t))) dt = \int_0^{+\infty} f(x(t)) dt = \\ &= \int_0^{+\infty} f(x(t)) dt = \int_0^{+\infty} f(x(t)) dt = \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \int_0^{\gamma} f(x(t)) dt = \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} f \left(\int_0^{\gamma} x(t) dt \right) = \\ &= f \left(\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \int_0^{\gamma} x(t) dt \right) = f \left(\int_0^{+\infty} x(t) dt \right) = f(s_0). \end{aligned}$$

Тогда $f(s_0 - y) = 0$ и $y \in s_0 + \Gamma_0(\{x_i\}_{i=1}^{\infty})$. Доказательство теоремы завершено.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Осипов О.С.* Об интегральном аналоге ряда с двухточечной областью сумм // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50. № 6. С. 1348 – 1355.
2. *Kadets M.I., Kadets V.M.* Series in Banach Spaces. Conditional and Unconditional Convergence. Birkhauser Verlag, 1997. 153 p.
3. *Корнилов П.А.* О множестве сумм условно сходящегося функционального ряда // Матем. сборник. 1988. Т. 137. №1. С. 114 – 127
4. *Подстригич А.Г.* Несжимаемые системы в B -пространствах // Материалы XXXIV Международн. науч. студенческой конф. «Студент и научно-технический прогресс». Математика. Новосибирск, 1995. С. 68.
5. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория. М.: ИЛ, 1962. 895 с.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

ЛАЗАРЕВА Елена Геннадьевна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры общей математики Томского государственного университета. E-mail: lazareva@math.tsu.ru

ОСИПОВ Олег Сергеевич – кандидат физико-математических наук, программист ООО «Сольвейг Мультимедиа». E-mail: osipov-os@math.tsu.ru