

УДК 512.541

В.М. Мисяков

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ КОЛЬЦА ЭНДОМОРФИЗМОВ АБЕЛЕВОЙ ГРУППЫ

Рассматривается некоторый класс редуцированных смешанных абелевых групп, в котором исследование смешанных групп с коммутативным кольцом эндоморфизмов сводится к исследованию групп без кручения с коммутативным кольцом эндоморфизмов.

Ключевые слова: абелева группа, коммутативное кольцо эндоморфизмов.

В монографии [1] поставлена проблема 15: «Свести исследование смешанных групп с нётеровыми справа, полупервичными или коммутативными кольцами эндоморфизмов к исследованию групп без кручения с соответствующими кольцами эндоморфизмов». В этой статье данная задача решается для групп с коммутативным кольцом эндоморфизмов из некоторого класса $\mathcal{K}$. Заметим, что периодические, расщепляемые и некоторый класс смешанных групп, имеющих коммутативное кольцо эндоморфизмов, описаны в [2]. В [3] найдены некоторые необходимые и достаточные условия коммутативности кольца эндоморфизмов произвольной смешанной абелевой группы. Все группы, рассматриваемые здесь, являются абелевыми.

Введем некоторые обозначения: $E(A)$ – кольцо эндоморфизмов группы A ; $T_p(A)$ – p -компонента периодической части группы A ; $\mathbb{Q}$ – группа рациональных чисел; $Z(p^\infty)$ – квазициклическая группа; $\mathbb{Q}_p$ – группа всех рациональных чисел со знаменателем, взаимно простым с p ; J_p – группа целых p -адических чисел; $\mathbb{Q}_p^*$ – кольцо целых p -адических чисел; $Z(m)$ – циклическая группа порядка m ; $\langle a \rangle$ – циклическая группа, порожденная элементом a ; $o(a)$ – порядок элемента a ; $h_p^A(a)$ – высота элемента a в группе A ; Z_m – кольцо вычетов по модулю m ; (m, n) – наибольший общий делитель натуральных чисел m и n ; P – множество всех простых чисел. Все понятия и обозначения, которые не поясняются, являются стандартными, их можно найти, например, в [1, 4 или 5].

Рассмотрим, предварительно, следующий простой факт, который будем использовать в дальнейшем.

Напомним, что матрица (α_{ji}) с элементами из кольца $E(A)$, называется сходящейся по столбцам, если для каждого столбца i сумма $\sum_j \alpha_{ji}$ существует в конечной топологии кольца $E(A)$ [5, гл. XV, §106, §107].

Лемма 1. Пусть группа A разлагается в прямую сумму своих подгрупп, то есть $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$. Кольцо $E(A)$ коммутативно тогда и только тогда, когда кольцо $E(A_i)$ коммутативно и подгруппа A_i является вполне характеристической для любого $i \in I$.

Доказательство. Так как $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$, то кольцо $E(A)$ изоморфно кольцу всех сходящихся по столбцам $I \times I$ -матриц $(\alpha_{ji})_{j,i \in I}$, где $\alpha_{ji} \in \text{Hom}(A_i, A_j)$ [5, гл. XV, §106, теорема 106.1].

Пусть $E(A)$ – коммутативное кольцо, тогда $\text{Hom}(A_i, A_j) = 0$ и $E(A_i)$ – коммутативное кольцо для любых $i, j \in I$. Вполне характеристичность подгруппы $A_i, i \in I$, вытекает из [1, гл. 3, §19, лемма 19.1].

Обратное утверждение следует из условия и [5, гл. XV, § 106, упр. 4 а)].

Для группы G , такой, что $T(G) \neq 0$, будем рассматривать множество $\pi(G) = \{p \in \mathbf{P} \mid T_p(G) \neq 0\}$.

Следующая лемма, доказанная в [6], будет полезна в дальнейшем.

Лемма 2. Пусть A – делимая группа. Кольцо $E(A)$ является коммутативным тогда и только тогда, когда $A = Q$ или $A = \bigoplus_{p \in \pi(A)} Z(p^\infty)$.

В нижеприведённом утверждении даётся описание нередуцированных групп с коммутативным кольцом эндоморфизмов.

Предложение 3. Пусть $G = A \oplus B$ – нередуцированная группа, где A – редуцированная, а B – делимая группы. Кольцо $E(G)$ является коммутативным тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

$$1) B = Q \text{ либо } B = \bigoplus_{p \in \pi(B)} Z(p^\infty);$$

$$2) \text{ если } A \neq 0, \text{ то } A = \bigoplus_{p \in \pi(A)} Z(p^{k_p}), \text{ причём если } A = \bigoplus_{p \in \pi(A)} Z(p^{k_p}) \text{ и}$$

$$B = \bigoplus_{p \in \pi(B)} Z(p^\infty), \text{ то } \pi(A) \cap \pi(B) = \emptyset.$$

Доказательство. Так как G – нередуцированная группа, то она содержит ненулевую делимую часть. Пусть $E(G)$ – коммутативное кольцо. Тогда, как следует из леммы 2, $B = Q$ или $B = \bigoplus_{p \in \pi(B)} Z(p^\infty)$.

Пусть $A \neq 0$. Покажем, что A является периодической группой. Допустим противное, то есть пусть существует элемент $a \in A$, такой, что $o(a) = \infty$. Рассмотрим произвольный элемент $0 \neq b \in B$. Так как $o(a) = \infty$, то $\text{Hom}(\langle a \rangle, \langle b \rangle) \cong \langle b \rangle$ и, следовательно, существует $0 \neq \varphi \in \text{Hom}(\langle a \rangle, \langle b \rangle)$. Пусть $i: \langle a \rangle \rightarrow A$ и $j: \langle b \rangle \rightarrow B$, где i, j – вложения. Так как B – делимая, а значит, инъективная группа, то существует гомоморфизм $\psi: A \rightarrow B$, такой, что $\psi i = j\varphi$. Поскольку $j\varphi \neq 0$, то $\psi \neq 0$. Гомоморфизм ψ легко продолжается до ненулевого эндоморфизма группы G . Следовательно, A – не вполне характеристическая подгруппа, что противоречит утверждению леммы 1. Таким образом, A – периодическая редуцированная группа. По лемме 1 кольцо $E(A)$ коммутативно, тогда $A = \bigoplus_{p \in \pi(A)} Z(p^{k_p})$ [1, гл. 3, § 19, следствие 19.3].

Пусть $A = \bigoplus_{p \in \pi(A)} Z(p^{k_p})$ и $B = \bigoplus_{p \in \pi(B)} Z(p^\infty)$, тогда из [7, теорема 1] следует, что $\pi(A) \cap \pi(B) = \emptyset$.

Обратно, если $A = 0$, то коммутативность кольца $E(G)$ следует из леммы 2.

Пусть $A = \bigoplus_{p \in \pi(A)} Z(p^{k_p})$ и $B = Q$. Поскольку $\text{Hom}(Z(p^{k_p}), Q) = 0$, $\text{Hom}(Q, Z(p^{k_p})) = 0$ и $\text{Hom}(Z(p^{k_p}), Z(q^{k_q})) = 0$ при $p \neq q$, то подгруппы $Z(p^{k_p})$ и Q являются вполне характеристическими в группе G . Так как $E(Q) \cong Q$ [5, гл. XV, § 106, пример 4] и $E(Z(p^{k_p})) \cong Z_{k_p}$ [1, гл. 1, § 3, пример 3.2] – коммутативные кольца, то по лемме 1 следует коммутативность кольца $E(G)$.

Пусть $A = \bigoplus_{p \in \pi(A)} Z(p^{k_p})$ и $B = \bigoplus_{p \in \pi(B)} Z(p^\infty)$, причём $\pi(A) \cap \pi(B) = \emptyset$. Тогда для каждого $p \in \pi(G)$ следует, что либо $T_p(G) = Z(p^{k_p})$, либо $T_p(G) = Z(p^\infty)$. Поскольку в обоих случаях кольцо $E(T_p(G))$ коммутативно и $T_p(G)$ – вполне характеристическая подгруппа в группе G для каждого $p \in \pi(G)$, то по лемме 1 кольцо $E(G)$ коммутативно.

Определение 1. Будем говорить, что смешанная редуцированная группа G удовлетворяет условию конечности, если она не содержит ненулевые элементы, у которых p -высота равна бесконечности для всех $p \in \pi(G)$.

Определение 2. Будем называть смешанную редуцированную группу G с бесконечным числом ненулевых p -компонент psp -группой, если естественное вложение $\bigoplus_{p \in \pi(G)} T_p(G) \rightarrow G$ продолжается до p -чистого вложения $G \rightarrow \prod_{p \in \pi(G)} T_p(G)$.

Таким образом, если G – psp -группа, то, отождествляя группу G с её образом при таком вложении, можно считать, что $\bigoplus_{p \in \pi(G)} T_p(G) \subset G \subseteq \prod_{p \in \pi(G)} T_p(G)$, где G p -чиста в $\prod_{p \in \pi(G)} T_p(G)$ для всех $p \in \pi(G)$. Заметим также, что понятие p -чистоты (чистоты) эквивалентно здесь понятию p -сервантности (сервантности) подгруппы в группе.

Определение 3. Будем говорить, что смешанная редуцированная группа G принадлежит классу K , если выполняются следующие условия:

- 1) $G = T_p(G) \oplus E_p$ для любого $p \in \pi(G)$;
- 2) существует семейство дополнений $\{E_p\}_{p \in P}$ группы G , удовлетворяющее условию: если $B = \bigcap_{p \in \pi(G)} E_p \neq 0$, то существует B -высокая подгруппа A группы G , содержащая $T(G)$, причём для любого простого числа q , такого, что $qB \neq B$, следует, что $qA = A$.

Замечание 1. Пусть G – редуцированная смешанная группа, причём для каждого $p \in \pi(G)$ следует, что $G = T_p(G) \oplus E_p$, $pE_p = E_p$ и $\bigcap_{p \in \pi(G)} E_p = 0$, тогда G

удовлетворяет условию конечности. Действительно, пусть существует элемент $0 \neq g \in G$, такой, что $h_p(g) = \infty$ для любого $p \in \pi(G)$. Так как g – ненулевой элемент, то $g \notin \bigcap_{p \in \pi(G)} E_p$ и, следовательно, найдётся такое $q \in \pi(G)$, что $g \notin E_q$.

Поскольку $G = T_q(G) \oplus E_q$, то $g = a_q + e_q$, где $0 \neq a_q \in T_q(G)$, $e_q \in E_p$ и $g \notin E_q$, причём $h_q(e_q) = \infty$ и $h_q(a_q) = s < \infty$. Тогда имеем $\infty = h_q(g) = \min\{h_q(a_q), h_q(e_q)\} = s$, что приводит к противоречию.

Теорема 4. Пусть $G \in \mathbf{K}$. Кольцо $E(G)$ является коммутативным тогда и только тогда, когда для каждого $p \in \pi(G)$ следует, что $G = T_p(G) \oplus E_p$, $pE_p = E_p$, где $T_p(G) \cong Z(p^{k_p})$, $k_p \in N$, для каждого $p \in \pi(G)$ подгруппа E_p определена однозначно, причём выполняется одно из следующих условий:

1) если $\bigcap_{p \in \pi(G)} E_p = 0$, то группа G является psp -группой;

2) если $\bigcap_{p \in \pi(G)} E_p \neq 0$, то $G = A \oplus (\bigcap_{p \in \pi(G)} E_p)$, где

а) если A – смешанная группа, то A удовлетворяет условиям конечности и является psp -группой;

б) $qA = A$ для любого простого числа q , такого, что $q(\bigcap_{p \in \pi(G)} E_p) \neq \bigcap_{p \in \pi(G)} E_p$;

в) $\bigcap_{p \in \pi(G)} E_p$ – группа без кручения с коммутативным кольцом эндоморфизмов.

Доказательство. Необходимость. Пусть $E(G)$ – коммутативное кольцо, тогда $T(G) \cong \bigoplus_{p \in \pi(G)} Z(p^{k_p})$ ($k_p \in N$) [1, гл. 3, § 19, предложение 19.6]. Таким обра-

зом, $T_p(G) \cong Z(p^{k_p})$ ($k_p \in N$) для каждого $p \in \pi(G)$. Так как $G \in \mathbf{K}$, то $G = T_p(G) \oplus E_p$ для каждого $p \in \pi(G)$ и для некоторой вполне характеристической подгруппы E_p (см. лемму 1). Поскольку E_p , $p \in \pi(G)$, – вполне характеристическая подгруппа в группе G , то для каждого $p \in \pi(G)$ подгруппа E_p определена однозначно. Покажем, что $pE_p = E_p$ для каждого $p \in \pi(G)$. Допустим, что это не так, тогда существует гомоморфизм $E_p/pE_p \rightarrow T_p(G)$, композиция которого с каноническим $E_p \rightarrow E_p/pE_p$ была бы ненулевым гомоморфизмом из E_p в $T_p(G)$. Поскольку ненулевой гомоморфизм из E_p в $T_p(G)$ продолжается до эндоморфизма всей группы G , то получим противоречие с вполне характеристичностью подгруппы E_p . Таким образом, $pE_p = E_p$ для каждого $p \in \pi(G)$. Следова-

тельно, $pB = B$ для всякого $p \in \pi(G)$, где $B = \bigcap_{p \in \pi(G)} E_p$. Причем, если $B \neq 0$, то

B – группа без кручения.

Если $\bigcap_{p \in \pi(G)} E_p = 0$, то группа G удовлетворяет условиям конечности (см. замечание 1) и является psp -группой [1, гл. 3, § 19, теорема 19.4]. Следовательно, условие 1) выполнилось.

Пусть $\bigcap_{p \in \pi(G)} E_p \neq 0$. Так как $G \in \mathbf{K}$, то существует B -высокая подгруппа A группы G , содержащая $T(G)$, причём для любого простого числа q , такого, что $qB \neq B$, следует, что $qA = A$.

Покажем, что $G = A \oplus B$. Предварительно заметим, что если $qB \neq B$, то B – q -чистая подгруппа в G . Действительно, пусть $q^l x = b \in B$, то есть существует $g \in G$, такое, что $q^l g = b$. Так как $g \in G = T_p(G) \oplus E_p$ для всякого $p \in \pi(G)$, то $g = g_p + e_p$ для всякого $p \in \pi(G)$, где $g_p \in T_p(G)$ и $e_p \in E_p$. Тогда $q^l g_p = b - q^l e_p \in T_p(G) \cap E_p = 0$ для каждого $p \in \pi(G)$. Следовательно, $b = q^l e_p$ для каждого $p \in \pi(G)$. Пусть $b = q^l e_p$ и $b = q^l e_s$ для произвольных $p, s \in \pi(G)$. Тогда $q^l (e_p - e_s) = 0$. Так как $qB \neq B$, то $q \notin \pi(G)$ и $e_p - e_s = 0$, то есть $e_p = e_s$ для произвольных $p, s \in \pi(G)$. Поэтому $e_p \in \bigcap_{p \in \pi(G)} E_p = B$ и B – q -чистая подгруппа в G для всякого простого числа q , такого, что $qB \neq B$.

Для доказательства того, что $G = A \oplus B$, достаточно показать [4, гл. II, § 9, лемма 9.9], что из равенства $pg = b + a$ ($g \in G, b \in B, a \in A$) непременно следует $pb' = b$ для некоторого $b' \in B$. Если $pB = B$, то очевидно существует $b' \in B$, такой, что $pb' = b$. Пусть $pB \neq B$. Поскольку $G \in \mathbf{K}$ и A – B -высокая подгруппа в группе G , то из $pB \neq B$ следует, что $pA = A$. Следовательно, найдётся элемент $a' \in A$, такой, что $pa' = a$. Тогда из равенства $pg = b + a$ получим, что $p(g - a') = b$. Так как $pB \neq B$, то B – p -чистая подгруппа в группе G . Таким образом, существует элемент $b' \in B$, такой, что $pb' = b$.

Покажем, что если A – смешанная группа, то A удовлетворяет условиям конечности и является psp -группой. Докажем, что справедливо первое из этих условий. Допустим противное, то есть пусть существует $0 \neq a \in A$, такой, что $h_p(a) = \infty$ для любого $p \in \pi(G)$. Здесь $\pi(G) = \pi(A)$, поскольку B – группа без кручения. Тогда $o(a) = \infty$ и для любого $p \in \pi(G)$ рассмотрим разложение $G = T_p(G) \oplus E_p$, то есть $a = g_p + e_p$, где $g_p \in T_p(G)$ и $e_p \in E_p$. Если $g_p \neq 0$, то $\infty = h_p(a) = \min\{h_p(g_p), h_p(e_p)\} < \infty$, что невозможно. Следовательно, для любого $p \in \pi(G)$ имеем $a = e_p \in \bigcap_{p \in \pi(G)} E_p = B$, то есть $a \in A \cap B = 0$, что противоречит

предположению для элемента a . Таким образом, A удовлетворяет условию конечности. Покажем, что A является psp -группой. Действительно, так как $G = A \oplus B$, то по лемме 1 следует коммутативность кольца $E(A)$. Поскольку A – редуцированная смешанная группа и A удовлетворяет условию конечности, то A является psp -группой [1, гл. 3, § 19, теорема 19.4].

Так как $E(G)$ – коммутативное кольцо и $G = A \oplus B$, то коммутативность кольца $E(B)$ следует из леммы 1.

Достаточность. Пусть для любого $p \in \pi(G)$ следует, что $G = T_p(G) \oplus E_p$, где $T_p(G) \cong Z(p^{k_p})$, $k_p \in \mathbb{N}$, $pE_p = E_p$ и для каждого $p \in \pi(G)$ подгруппа E_p определена однозначно. Если $\bigcap_{p \in \pi(G)} E_p = 0$, то группа G является psp -группой и, как следует из замечания 1, G удовлетворяет условию конечности. Тогда коммутативность кольца $E(G)$ вытекает из [1, гл. 3, § 19, теорема 19.4].

Если $\bigcap_{p \in \pi(G)} E_p \neq 0$, то выполняется условие 2), и пусть $B = \bigcap_{p \in \pi(G)} E_p$. Тогда $G = A \oplus B$. Поскольку для любого $p \in \pi(G)$ следует, что $pE_p = E_p$, то $pB = B$ для любого $p \in \pi(G)$.

Если A – периодическая группа, то $E(G)$ – коммутативное кольцо [1, гл. 3, § 19, следствие 19.5]. Пусть A – смешанная группа. Тогда группа A удовлетворяет условию конечности, является psp -группой и, следовательно, $E(A)$ – коммутативное кольцо [1, гл. 3, § 19, теорема 19.4].

Для коммутативности кольца $E(G)$, согласно лемме 1, достаточно показать, что A и B – вполне характеристические подгруппы в группе G . Допустим, что существуют $b \in B$ и $\alpha \in E(G)$, такие, что $\alpha(b) \notin B$. Тогда $\alpha(b) = a + d$, где $0 \neq a \in A$ и $d \in B$. Пусть $\pi: G \rightarrow A$ – проекция, тогда $\pi\alpha(b) = a \in A$. Поскольку $a \neq 0$ и A – редуцированная группа, то существует простое число p , такое, что $h_p(a) < \infty$. Так как $G \in \mathbf{K}$, то из того, что $pA \neq A$, следует, что $pB = B$, то есть $h_p(b) = \infty$. Таким образом, эндоморфизм $\pi\alpha \in E(G)$ понизил p -высоту элемента b в группе G , что невозможно, то есть B – вполне характеристическая подгруппа в G . Рассмотрим подгруппу A и допустим, что существуют $d \in A$ и $\beta \in E(G)$, такие, что $\beta(d) \notin A$. Тогда $\beta(d) = a + b$, где $a \in A$ и $b \in B$, причём $b \neq 0$. Пусть $\pi: G \rightarrow B$ – проекция, тогда $(\pi\beta)(d) = b$. Поскольку B – редуцированная группа, то найдётся простое число q , такое, что $h_q(b) < \infty$. Так как $G \in \mathbf{K}$, то из $qB \neq B$ следует, что $qA = A$, то есть $h_q(d) = \infty$. Таким образом, эндоморфизм $\pi\beta \in E(G)$ понизил q -высоту элемента d в группе G , что невозможно. Следовательно, A – вполне характеристическая подгруппа в группе G .

Следующее предложение показывает, что класс $\mathbf{K}$, в котором решается поставленная задача, является довольно широким. В частности, он содержит все смешанные редуцированные расщепляемые группы с коммутативным кольцом эндо-

морфизмов [1, гл. 3, § 19, следствие 19.5], все группы с коммутативным кольцом эндоморфизмов, описанные в теореме 19.4 [1].

Предложение 5. Если G – редуцированная смешанная группа с коммутативным кольцом эндоморфизмов, для которой выполняется одно из следующих условий:

- 1) G – расщепляемая группа;
- 2) G удовлетворяет условию конечности,
то $G \in \mathbf{K}$.

Доказательство. Поскольку группа G имеет коммутативное кольцо эндоморфизмов, то, проведя аналогичные рассуждения, что и при доказательстве теоремы 4, имеем $G = T_p(G) \oplus E_p$ для любого $p \in \pi(G)$. Так как E_p – вполне характеристическая подгруппа группы G (см. лемму 1), то для каждого $p \in \pi(G)$ подгруппа E_p определена однозначно и $\text{Hom}(E_p, T_p(G)) = 0$. Тогда $pE_p = E_p$ для каждого $p \in \pi(G)$ (см. доказательство необходимости в теореме 4), и поэтому $q(\bigcap_{p \in \pi(G)} E_p) = \bigcap_{p \in \pi(G)} E_p$ для любого $q \in \pi(G)$. Так как в условии 2) группа G удовлетворяет условию конечности, то $\bigcap_{p \in \pi(G)} E_p = 0$ и, следовательно, $G \in \mathbf{K}$. Рас-

смотрим условие 1). Пусть $G = A \oplus B$ – расщепляемая группа, где $A = T(G)$, B – группа без кручения. Поскольку $\bigcap_{p \in \pi(G)} E_p$ – группа без кручения, то

$\bigcap_{p \in \pi(G)} E_p \subseteq B$. Так как $B \subseteq E_p$ для любого $p \in \pi(G)$, то $B \subseteq \bigcap_{p \in \pi(G)} E_p$ и, следовательно, $B = \bigcap_{p \in \pi(G)} E_p$. Тогда для любого простого числа q , такого, что $qB \neq B$,

следует, что $q \notin \pi(G)$, и поэтому $qA = A$. Группа A – B -высокая подгруппа в группе G как прямое слагаемое этой группы. Поскольку $A = T(G)$, то $G \in \mathbf{K}$.

Следующий простой пример показывает, что класс $\mathbf{K}$ строго содержит классы групп с коммутативным кольцом эндоморфизмов, описанные в предложении 5.

Пример 1. Пусть $G = \prod_{p \in P_1} Z(p) \oplus \prod_{q \in P_2} A_q$, где $P_1, P_2 \subseteq \mathbf{P}$, $|P_1| = |P_2| = \aleph_0$, $P_1 \cap P_2 = \emptyset$; для любого $q \in P_2$ следует, что $A_q = Q_q$ или $A_q = J_q$, тогда $G \in \mathbf{K}$ и кольцо $E(G)$ коммутативно.

Доказательство. Покажем, что группа G принадлежит классу $\mathbf{K}$. Действительно, поскольку $pA_q = A_q$ для любого простого числа $p \neq q$, то для любого $p \in P \setminus P_2$ следует, что $p(\prod_{q \in P_2} A_q) = \prod_{q \in P_2} A_q$. Поскольку $P_1 \cap P_2 = \emptyset$, то для каждого $p \in P_1$ из равенства $G = Z(p) \oplus E_p$ имеем $pE_p = E_p$, то есть E_p – вполне характеристическая подгруппа в группе G и, следовательно, для каждого $p \in \pi(G)$ подгруппа E_p определена однозначно. Заметим также, что

$\bigcap_{p \in P_1} E_p = \prod_{q \in P_2} A_q$ и $q(\prod_{p \in P_1} Z(p)) = \prod_{p \in P_1} Z(p)$ для любого $q \in P_2$. Так как $\prod_{p \in P_1} Z(p)$ является $\prod_{q \in P_2} A_q$ -высокой подгруппой в группе G как прямое слагаемое этой группы и $T(G) \subseteq \prod_{p \in P_1} Z(p)$, то $G \in \mathbf{K}$.

Поскольку $E(A_q)$ – коммутативное кольцо для любого $q \in P_2$ и $pA_q = A_q$ для любого простого числа $p \neq q$, то $\prod_{q \in P_2} E(A_q)$ – коммутативное кольцо.

Группа $\prod_{p \in P_1} Z(p)$ удовлетворяет условию конечности. отождествляя $\bigoplus_{p \in P_1} Z(p)$ и $T(\prod_{p \in P_1} Z(p))$, можно считать, что $\prod_{p \in P_1} Z(p)$ является psp -группой. Таким образом, группа G удовлетворяет условию 2) теоремы 4 и, следовательно, кольцо $E(G)$ коммутативно.

В следующем примере рассмотрим способ построения некоторых групп из класса $\mathbf{K}$ с коммутативным кольцом эндоморфизмов.

Пример 2. Пусть $G = A \oplus B$, где B – редуцированная группа без кручения с коммутативным кольцом эндоморфизмов и группа A удовлетворяет условиям:

- 1) $A \in \mathbf{K}$;
- 2) кольцо $E(A)$ коммутативно;
- 3) $pA = A$ для любого простого числа p , такого, что $pB \neq B$, тогда кольцо $E(G)$ коммутативно и $G \in \mathbf{K}$.

Доказательство. Из условия 3) следует вполне характеристичность подгрупп A и B в группе G , тогда, согласно лемме 1, кольцо $E(G)$ коммутативно. Покажем, что группа G принадлежит классу $\mathbf{K}$. Действительно, поскольку $A \in \mathbf{K}$ и $E(A)$ – коммутативное кольцо, то $A = T_p(A) \oplus E_p$ и $pE_p = E_p$ для всякого $p \in \pi(A)$. Поскольку $T(G) = T(A)$, то $\pi(G) = \pi(A)$. Тогда для каждого $p \in \pi(G)$ имеем $G = T_p(G) \oplus E'_p$, где $E'_p = E_p \oplus B$ – вполне характеристическая подгруппа в группе G . Следовательно, для каждого $p \in \pi(G)$ подгруппа E'_p определена однозначно. Так как $pE_p = E_p$ и $pB = B$ для каждого $p \in \pi(G)$, то $pE'_p = E'_p$ для каждого $p \in \pi(G)$. Поскольку $\bigcap_{p \in \pi(G)} E'_p \neq 0$, подгруппа A в группе G является B -высокой, $T(G) \subseteq A$ и для любого простого числа q , такого, что $qB \neq B$, следует, что $qA = A$, тогда группа $G \in \mathbf{K}$.

Замечание 2. Если смешанная редуцированная группа G имеет коммутативное кольцо эндоморфизмов, то ответ на вопрос: «Принадлежит ли данная группа классу $\mathbf{K}$?» – можно получить, проверив только одно условие в определении 3. Действительно, из коммутативности кольца $E(G)$ для каждого $p \in \pi(G)$ следует равенство $G = T_p(G) \oplus E_p$, из которого для каждого $p \in \pi(G)$ имеем, что

$pE_p = E_p$. Тогда E_p – вполне характеристическая подгруппа в группе G и, следовательно, для каждого $p \in \pi(G)$ подгруппа E_p определена однозначно. Если

$B = \bigcap_{p \in \pi(G)} E_p = 0$, то G удовлетворяет условию конечности и по предложению 5

принадлежит классу K . Если $B = \bigcap_{p \in \pi(G)} E_p \neq 0$, то B – группа без кручения и

$T(G) \cap B = 0$. Тогда нетрудно показать, что всегда существует B -высокая подгруппа A группы G , содержащая $T(G)$. Поэтому для проверки принадлежности группы G классу K остаётся проверить только условие: для любого простого числа q , такого, что $qB \neq B$, должно выполняться равенство $qA = A$.

Таким образом, из замечания 2 следует, что для решения задачи в проблеме 15, относящейся к смешанным группам с коммутативным кольцом эндоморфизмов, остаётся описать смешанные редуцированные группы G с коммутативным кольцом эндоморфизмов, у которых для ненулевой подгруппы без кручения B , определённой в замечании 2), и для любой B -высокой подгруппы A , содержащей $T(G)$, существует простое число p , такое, что $pB \neq B$ и $pA \neq A$, либо доказать, что таких групп G с коммутативным кольцом эндоморфизмов и указанным свойством не существует.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крылов П.А., Михалев А.В., Туганбаев А.А. Связи абелевых групп и их колец эндоморфизмов. Томск: ТГУ, 2002.
2. Szele T., Szendrei J. On Abelian groups with commutative endomorphism ring // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 1951. V. 2. No. 3 – 4. P. 309 – 324.
3. Schultz P. On a paper of Szele and Szendrei on groups with commutative endomorphism rings // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 1973. V. 24. No. 1 – 2. P. 59 – 63.
4. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1974. Т. 1.
5. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1977. Т. 2.
6. Чехлов А.Р. О скобке Ли эндоморфизмов абелевых групп // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2009. № 2(6). С. 78 – 84.
7. Гриншпон С.Я. О равенстве нулю группы гомоморфизмов абелевых групп // Изв. вузов. Математика. 1998. № 9. С. 42 – 46.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

МИСЯКОВ Виктор Михайлович – доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: mvm@mail.tsu.ru

Статья принята в печать 31.05.2010 г.