ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2010 Математика и механика № 3(11)

УДК 512.553+512.541

Е.А. Тимошенко

РАДИКАЛЫ, ПОРОЖДАЕМЫЕ ИЛИ КОПОРОЖДАЕМЫЕ БИМОДУЛЯМИ[1,2]

Получены критерии, которые позволяют определять, можно ли представить радикал категории модулей как порождённый или копорождённый классом бимодулей. Для произвольного модуля описаны бимодули, в определённом смысле служащие «аппроксимацией» этого модуля.

Ключевые слова: *модуль*, *бимодуль*, *радикал*, *гомоморфизм.*

В статье [1] изучались связи между двумя близкими по свойствам классами идемпотентных радикалов, задаваемых при помощи функтора Hom. Прежде чем дать нужные определения, приведём основные обозначения и договорённости.

Все группы предполагаем абелевыми, кольца – ассоциативными с единицей, модули – унитарными (по умолчанию правыми). Через $\otimes_S$ и $\otimes$ будем обозначать соответственно тензорное произведение над S и над кольцом целых чисел; через Hom_S и Hom обозначаем группу модульных гомоморфизмов правых S-модулей и группу аддитивных гомоморфизмов.

Напомним некоторые факты теории радикалов [2, 3]. Скажем, что в категории правых S-модулей mod-S задан *идемпотентный радикал* ρ, если всякому правому S-модулю A сопоставлен его подмодуль $\rho(A)$ и при этом справедливы следующие условия:

- для всякого S-гомоморфизма $\varphi\colon A \to B$ выполнено $\varphi(\rho(A)) \subset \rho(B)$;
- $\rho(\rho(A)) = \rho(A)$ для любого S-модуля A;
- $\rho(A/\rho(A)) = 0$ для любого S-модуля A.

Пусть ρ – идемпотентный радикал (далее слово «идемпотентный» часто будет опускаться). Назовём ρ-*радикальным* класс всех модулей A_S, таких, что $\rho(A) = A$. Двойственным образом равенство $\rho(A) = 0$ задаёт ρ-*полупростой* класс. Заметим, что ρ однозначно определён как своим полупростым, так и своим радикальным классом (будем обозначать эти классы P_ρ и R_ρ соответственно).

Всякий радикальный класс является замкнутым относительно гомоморфных образов, прямых сумм и расширений; всякий полупростой класс – относительно подмодулей, прямых произведений и расширений. Радикалы можно упорядочить (частично), полагая $\rho \le \sigma$ тогда и только тогда, когда $\rho(A) \subset \sigma(A)$ для любого A_S. При этом большему радикалу σ соответствует больший радикальный и меньший полупростой класс.

Напомним теперь основные понятия из работы [1]. Зафиксируем модуль V_S. Для всякого A_S пересечение всех подмодулей B из A, таких, что $\mathrm{Hom}_S(V, A/B) = 0$, мы обозначим через $\mathrm{H}_V(A)$ и назовём $\mathrm{E}(V)$-*радикалом* модуля A. Полученный

[1] Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009 – 2013 годы». Государственный контракт П937 от 20 августа 2009 г.
[2] Работа частично профинансирована Федеральным агентством по науке и инновациям России по контракту № 02.740.11.0238.

функтор H_V есть радикал категории mod-S. Его полупростой класс $\Lambda(V)$ содержит модуль A_S тогда и только тогда, когда $\mathrm{Hom}_S(V, A) = 0$.

Пусть R – ещё одно кольцо, и пусть e: $S \to R$ – некоторый гомоморфизм колец. В такой ситуации правый R-модуль A можно рассматривать как притягивающий правый S-модуль, полагая $as = ae(s)$ для $a \in A$ и $s \in S$. Для бимодуля ${}_S(R/e(S))_S$ введём обозначение R_0. Через Λ обозначим класс всех правых модулей C_R, таких, что $\mathrm{Hom}_S(R, C) = \mathrm{Hom}_R(R, C)$. Пересечение всех подмодулей $B_R \subset A_R$, таких, что выполнено $A/B \in \Lambda$, назовём Е-*радикалом* модуля A и обозначим через $\mathrm{H}(A)$. Это понятие служит обобщением Е-радикала, который был введён в статье [4].

Включение $A_R \in \Lambda$ выполнено тогда и только тогда, когда $\mathrm{Hom}_S(R_0, A) = 0$ [5]; следовательно, Е-радикал есть сужение $\mathrm{E}(R_0)$-радикала, действующего в mod-S, на категорию mod-R [1]. Поэтому естественно с самого начала считать Е-радикал действующим в mod-S, отождествив его с $\mathrm{E}(R_0)$-радикалом. В [1] отмечалось, что для любых кольца S и бимодуля ${}_SF_S$ можно выбрать кольцо R и гомоморфизм e так, чтобы $R/e(S) \cong {}_SF_S$. При этом можно добиться, чтобы произвольный правый модуль A_S получался как притягивающий из некоторого R-модуля; тогда H_F и H представляют собой фактически один и тот же радикал.

С этой позиции Е-радикал есть частный случай $\mathrm{E}(V)$-радикала. Естественно поставить и обратный вопрос: каждый ли радикал H_V категории mod-S возможно представить в виде Е-радикала (а точнее, в виде H_F, где ${}_SF_S$ является бимодулем)? Статья посвящена задачам, возникающим в связи с этим вопросом. Основными результатами являются теоремы 3 и 5, которые устанавливают эквивалентность ряда условий, налагаемых на кольцо S. Главными из этих условий можно назвать следующие:

- для всяких V_S, A_S и $X = \mathrm{Hom}_S(V, A)$ из $\mathrm{Hom}(S, X) = 0$ следует $X = 0$;
- для всякого $V_S \neq 0$ выполнено $\mathrm{Hom}(S, \mathrm{End}\, V_S) \neq 0$;
- всякий идемпотентный радикал категории mod-S порождается некоторым классом S-S-бимодулей;
- всякий идемпотентный радикал категории mod-S копорождается некоторым классом S-S-бимодулей.

1. Радикалы, порождаемые бимодулями

Рассмотрим естественное обобщение $\mathrm{E}(V)$-радикала. Пусть Γ есть непустой класс правых S-модулей. Через H_Γ мы обозначим наименьший из идемпотентных радикалов ρ, обладающих свойством $\Gamma \subset R_\rho$ (такой радикал всегда существует). Нетрудно видеть, что H_Γ-полупростой класс совпадает с классом $\Lambda(\Gamma)$ модулей A, для которых выполнено $\mathrm{Hom}_S(V, A) = 0$ при всех $V \in \Gamma$. Мы будем говорить, что идемпотентный радикал H_Γ *порождается* классом Γ. С этой точки зрения будет логично называть $\mathrm{E}(V)$-радикалы *однопорождёнными* радикалами.

Очевидно, что всякий радикал ρ можно представить в виде H_Γ (достаточно взять $\Gamma = R_\rho$). Иными словами, всякий радикал порождается подходящим классом модулей. Заметим, что более широкому классу модулей Γ соответствует больший радикал H_Γ.

Сначала получим ответ на вопрос, поставленный в конце введения: при каких условиях заданный однопорождённый радикал будет однопорождён подходящим S-S-бимодулем? Отметим, что в работах [6, 7] получен исчерпывающий ответ на аналогичный вопрос о радикалах, «однопорождённых» при помощи функтора $\otimes$.

Ниже мы увидим, что «наиболее подходящим» является бимодуль ${}_SF_S = S \otimes V$ (S-S-бимодульная структура на F задаётся естественным образом).

Лемма 1. Пусть V – правый S-модуль, а B – некоторый S-S-бимодуль. Тогда из равенства $\mathrm{Hom}_S(S \otimes V, B) = 0$ следует $\mathrm{Hom}_S(V, B) = 0$.

Доказательство. В соответствии с условием леммы имеем

$$\mathrm{Hom}(S, \mathrm{Hom}_S(V, B)) \cong \mathrm{Hom}_S(S \otimes V, B) = 0.$$

Но B – S-S-бимодуль; поэтому группа $\mathrm{Hom}_S(V, B)$ является левым модулем над кольцом S и, значит, гомоморфным образом суммы копий аддитивной группы данного кольца. Это возможно лишь в случае $\mathrm{Hom}_S(V, B) = 0$. Лемма доказана. ■

Теорема 2. Пусть V_S – модуль. Следующие условия эквивалентны:

1) Существует S-S-бимодуль U, такой, что $\mathrm{H}_U = \mathrm{H}_V$.

2) $\mathrm{H}_{S\otimes V} = \mathrm{H}_V$.

3) $\mathrm{H}_{S\otimes V}(V) = V$.

4) Радикал H_V порождается некоторым классом S-S-бимодулей.

5) Для любого A_S и $X = \mathrm{Hom}_S(V, A)$ из $\mathrm{Hom}(S, X) = 0$ следует $X = 0$.

Доказательство. Импликации $2) \Rightarrow 1) \Rightarrow 4)$ очевидны.

$3) \Rightarrow 2)$. Из равенства $\mathrm{H}_{S\otimes V}(V) = V$ сразу получаем $\mathrm{H}_{S\otimes V} \geq \mathrm{H}_V$. Пусть теперь выполнено $A \in \Lambda(V)$, тогда

$$\mathrm{Hom}_S(S \otimes V, A) \cong \mathrm{Hom}(S, \mathrm{Hom}_S(V, A)) = \mathrm{Hom}(S, 0) = 0,$$

т.е. $A \in \Lambda(S \otimes V)$. Из $\Lambda(V) \subset \Lambda(S \otimes V)$ следует $\mathrm{H}_{S\otimes V} \leq \mathrm{H}_V$, что и требовалось.

$5) \Rightarrow 2)$. Из эквивалентности равенств $\mathrm{Hom}(S, X) = 0$ и $X = 0$ и сопряжённости функторов $\otimes$ и Hom мы заключаем, что условие $\mathrm{Hom}_S(S \otimes V, A) = 0$ равносильно условию $\mathrm{Hom}_S(V, A) = 0$. Таким образом, полупростые классы радикалов $\mathrm{H}_{S\otimes V}$ и H_V совпадают; следовательно, совпадают и сами радикалы.

$2) \Rightarrow 5)$. Достаточно провести в обратном порядке рассуждения, приведённые в доказательстве импликации $5) \Rightarrow 2)$.

$4) \Rightarrow 3)$. Пусть $\mathrm{H}_V = \mathrm{H}_\Delta$, где Δ есть некоторый класс S-S-бимодулей. Тогда для всякого модуля $B \in \Delta$ выполнено неравенство $\mathrm{H}_B \leq \mathrm{H}_V$, т.е. $\mathrm{H}_V(B) = B$. Введём обозначение $C = \mathrm{H}_{S\otimes V}(B)$. Из определения идемпотентного радикала получаем, что подмодуль C вполне инвариантен в B_S и, в частности, является подбимодулем в ${}_SB_S$. Имеем равенство $\mathrm{H}_{S\otimes V}(B/C) = 0$; применяя теперь лемму 1 к S-S-бимодулю B/C, находим $\mathrm{H}_V(B/C) = 0$.

С другой стороны, из замкнутости радикальных классов относительно гомоморфных образов следует $\mathrm{H}_V(B/C) = B/C$. Получаем $C = B$ и $\mathrm{H}_{S\otimes V}(B) = B$. Таким образом, $\mathrm{H}_\Delta \leq \mathrm{H}_{S\otimes V}$, т.е. $\mathrm{H}_V \leq \mathrm{H}_{S\otimes V}$. Из последнего неравенства непосредственно следует $\mathrm{H}_{S\otimes V}(V) = V$. ■

Через $\mathrm{End}\, V_S$ будем обозначать кольцо эндоморфизмов модуля V_S.

Теорема 3. Пусть S – кольцо. Следующие условия эквивалентны:

1) Для всякого V_S существует S-S-бимодуль U, такой, что $\mathrm{H}_U = \mathrm{H}_V$.

2) Для всякого V_S выполнено $\mathrm{H}_{S\otimes V} = \mathrm{H}_V$.

3) Для всякого V_S выполнено $\mathrm{H}_{S\otimes V}(V) = V$.

4) Для всякого V_S радикал H_V порождён некоторым классом S-S-бимодулей.

5) Для всяких V_S, A_S и $X = \mathrm{Hom}_S(V, A)$ из $\mathrm{Hom}(S, X) = 0$ следует $X = 0$.

6) Всякий идемпотентный радикал категории mod-S порождается некоторым классом S-S-бимодулей.

7) Для всякого $V_S \neq 0$ выполнено $\mathrm{Hom}(S, \mathrm{End}\, V_S) \neq 0$.

Доказательство. Эквивалентность первых пяти условий немедленно следует из теоремы 2; импликация 6) $\Rightarrow$ 4) очевидна.

2) $\Rightarrow$ 6). Зафиксируем произвольный радикал H_Γ категории mod-S (здесь Γ есть некоторый класс правых S-модулей). Через Δ обозначим класс, состоящий из всех бимодулей $S\otimes V$, где $V \in \Gamma$. Тогда H_Γ (H_Δ) – наименьший из всех радикалов ρ, для которых неравенство $\mathrm{H}_V \le \rho$ (соответственно $\mathrm{H}_{S\otimes V} \le \rho$) выполнено для любого модуля $V \in \Gamma$. Для всякого V_S имеем $\mathrm{H}_{S\otimes V} = \mathrm{H}_V$; отсюда $\mathrm{H}_\Delta = \mathrm{H}_\Gamma$.

5) $\Rightarrow$ 7). Положим $A_S = V_S \ne 0$, тогда $X = \mathrm{End}\, V_S \ne 0$. Отсюда уже немедленно получаем неравенство $\mathrm{Hom}(S, X) \ne 0$.

7) $\Rightarrow$ 3). Пусть $W = V/\mathrm{H}_{S\otimes V}(V)$, тогда имеем $\mathrm{H}_{S\otimes V}(W) = 0$. Модуль $S\otimes W$ есть гомоморфный образ модуля $S\otimes V$, поэтому из $\mathrm{Hom}_S(S\otimes V, W) = 0$ следует

$$0 = \mathrm{Hom}_S(S\otimes W, W) \cong \mathrm{Hom}(S, \mathrm{Hom}_S(W, W)) = \mathrm{Hom}(S, \mathrm{End}\, W_S),$$

что возможно лишь при $W = 0$. Следовательно, $\mathrm{H}_{S\otimes V}(V) = V$. ■

Всякое кольцо, удовлетворяющее эквивалентным условиям теоремы 3, будем называть *правым* br-*кольцом* (от слов «бимодуль» и «радикал»).

2. Радикалы, копорождаемые бимодулями

Естественно будет поставить вопросы, двойственные по отношению к ранее рассмотренным (см. теоремы 2 и 3). Пусть Γ – некоторый непустой класс правых S-модулей. Через K_Γ обозначим наибольший из всех радикалов ρ, для которых справедливо $\Gamma \subset P_\rho$. Тогда K_Γ-радикальный класс совпадёт с классом $\Phi(\Gamma)$ всех модулей V, таких, что $\mathrm{Hom}_S(V, A) = 0$ для всякого $A \in \Gamma$. Мы будем говорить, что радикал K_Γ *копорождается* классом Γ. Если класс Γ состоит из единственного модуля A, то пишем просто K_A и $\Phi(A)$.

Произвольный радикал ρ можно представить в виде K_Γ (для этого достаточно положить $\Gamma = P_\rho$), т.е. всякий радикал копорождён подходящим классом модулей. При этом более широкому классу Γ соответствует меньший радикал K_Γ.

Пусть A – правый S-модуль. Через βA обозначим прямое произведение всех фактормодулей $B_C = (S\otimes C)/\mathrm{K}_A(S\otimes C)$, где C – это произвольный подмодуль из A. Модуль $S\otimes C$ обладает S-S-бимодульной структурой; тогда, как уже отмечалось в доказательстве теоремы 2, подмодуль $\mathrm{K}_A(S\otimes C)$ является подбимодулем. Итак, всякому модулю A мы определённым образом сопоставили S-S-бимодуль βA.

Теорема 4. Пусть A_S – модуль. Следующие условия эквивалентны:

1) Существует S-S-бимодуль B, такой, что $\mathrm{K}_B = \mathrm{K}_A$.

2) $\mathrm{K}_{\beta A} = \mathrm{K}_A$.

3) Для всякого ненулевого подмодуля C из A выполнено $\mathrm{Hom}_S(S\otimes C, A) \ne 0$.

4) Радикал K_A копорождается некоторым классом S-S-бимодулей.

5) Для любого V_S и $X = \mathrm{Hom}_S(V, A)$ из $\mathrm{Hom}(S, X) = 0$ следует $X = 0$.

Доказательство. Импликации 2) $\Rightarrow$ 1) $\Rightarrow$ 4) очевидны.

4) $\Rightarrow$ 5). Пусть $\mathrm{K}_A = \mathrm{K}_\Delta$, где Δ есть некоторый класс S-S-бимодулей. Допустим, что выполнено $\mathrm{Hom}(S, X) = 0$. Из сопряжённости функторов $\otimes$ и Hom получаем равенство $\mathrm{Hom}_S(S\otimes V, A) = 0$. Далее, из условия $\Phi(A) = \Phi(\Delta)$ сразу находим, что $\mathrm{Hom}_S(S\otimes V, B) = 0$ для всех $B \in \Delta$. Учитывая лемму 1, можем заключить, что для всех $B \in \Delta$ выполнено равенство $\mathrm{Hom}_S(V, B) = 0$. Это приводит нас к включению $V \in \Phi(\Delta) = \Phi(A)$, т.е. $X = \mathrm{Hom}_S(V, A) = 0$.

$5)\Rightarrow 3)$. Для ненулевого подмодуля C из A имеем $X = \mathrm{Hom}_S(C, A) \neq 0$. Отсюда

$$\mathrm{Hom}_S(S\otimes C, A) \cong \mathrm{Hom}(S, \mathrm{Hom}_S(C, A)) = \mathrm{Hom}(S, X) \neq 0.$$

$3)\Rightarrow 2)$. Для произвольного подмодуля C из A бимодуль B_C будет содержаться в K_A-полупростом классе, а следовательно, бимодуль βA также входит в этот класс. Из равенства $\mathrm{K}_A(\beta A) = 0$ следует $\mathrm{K}_A \leq \mathrm{K}_{\beta A}$.

Пусть $V \notin \Phi(A)$, т.е. имеется ненулевой S-гомоморфизм $\varphi\colon V \to A$. Обозначим образ этого гомоморфизма через C. Из неравенства $\mathrm{Hom}_S(S\otimes C, A) \neq 0$ получаем, что $\mathrm{K}_A(S\otimes C) \neq S\otimes C$; следовательно, $B_C \neq 0$. Пусть $s\otimes c + \mathrm{K}_A(S\otimes C)$ – ненулевой элемент из B_C. Нетрудно убедиться, что отображение, действующее по правилу $v \to s\otimes\varphi(v) + \mathrm{K}_A(S\otimes C)$, задаёт ненулевой S-модульный гомоморфизм из V в B_C. Тогда имеем $\mathrm{Hom}_S(V, \beta A) \neq 0$, отсюда $V \notin \Phi(\beta A)$. Итак, мы доказали включение $\Phi(\beta A) \subset \Phi(A)$, эквивалентное неравенству $\mathrm{K}_A \geq \mathrm{K}_{\beta A}$. ■

Замечание. Теорема была бы справедлива и в том случае, если бы через βA мы обозначили не прямое произведение бимодулей B_C, а их прямую сумму.

Некоторая двойственность, связывающая теоремы 2 и 4, ведёт к интересному результату. Оказывается, что теорема 3 и двойственная ей теорема 5 описывают один и тот же класс колец: в самом деле, условия 5) этих теорем совпадают.

Теорема 5. Пусть S – кольцо. Следующие условия эквивалентны:

1) Для всякого A_S существует S-S-бимодуль B, такой, что $\mathrm{K}_B = \mathrm{K}_A$.

2) Для всякого A_S выполнено $\mathrm{K}_{\beta A} = \mathrm{K}_A$.

3) Для всяких ненулевых $C_S \subset A_S$ выполнено $\mathrm{Hom}_S(S\otimes C, A) \neq 0$.

4) Для всякого A_S радикал K_A копорождён некоторым классом S-S-бимодулей.

5) Для всяких V_S, A_S и $X = \mathrm{Hom}_S(V, A)$ из $\mathrm{Hom}(S, X) = 0$ следует $X = 0$.

6) Всякий идемпотентный радикал категории mod-S копорождён некоторым классом S-S-бимодулей.

Доказательство. Эквивалентность первых пяти условий немедленно следует из теоремы 4; импликация $6)\Rightarrow 4)$ очевидна.

$2)\Rightarrow 6)$. Зафиксируем произвольный радикал K_Γ категории mod-S (здесь Γ есть некоторый класс правых S-модулей). Далее, символом Δ мы обозначим класс всех бимодулей βA, где $A \in \Gamma$. Тогда K_Γ (K_Δ) – наибольший из всех радикалов ρ, таких, что $\mathrm{K}_A \geq \rho$ (соответственно $\mathrm{K}_{\beta A} \geq \rho$) при всех $A \in \Gamma$. Так как для любого A имеем $\mathrm{K}_{\beta A} = \mathrm{K}_A$, приходим к равенству $\mathrm{K}_\Delta = \mathrm{K}_\Gamma$. ■

Добавим к эквивалентным условиям теорем 3 и 5 ещё одно.

Теорема 6. Пусть S – кольцо. Следующие условия эквивалентны:

1) S – правое br-кольцо.

2) Если радикал категории mod-S порождается классом S-S-бимодулей, то он копорождается некоторым классом S-S-бимодулей.

Доказательство. Импликация $1)\Rightarrow 2)$ сразу следует из теорем 3 и 5.

$2)\Rightarrow 1)$. Пусть S не является правым br-кольцом. Тогда существует ненулевой модуль V_S, опровергающий условие 7) из теоремы 3. Для него будет справедливо равенство $\mathrm{Hom}_S(S\otimes V, V) = 0$, так что для радикала $\rho = \mathrm{H}_{S\otimes V}$, который порождён бимодулем, выполнено $V \in P_\rho$. Имеем равенство $\rho = \mathrm{K}_\Delta$, где Δ есть некоторый класс S-S-бимодулей.

Из $\Delta \subset P_\rho$ следует, что $\mathrm{Hom}_S(S\otimes V, B) = 0$ для всех $B \in \Delta$. Применяя теперь лемму 1, мы получаем $\mathrm{Hom}_S(V, B) = 0$ для всех $B \in \Delta$. Поэтому $\mathrm{K}_\Delta(V) = V$, а это противоречит условию $V \in P_\rho$. Теорема доказана. ■

Следует ли из условия «если радикал категории mod-S копорождается классом S-S-бимодулей, то он порождается некоторым классом S-S-бимодулей», что S – правое br-кольцо, пока остаётся неясным. Неизвестно также, можно ли заменить бимодуль βA, используемый в теоремах 4 и 5, бимодулем более простого вида.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тимошенко Е.А.* Т-радикалы и Е-радикалы в категории модулей // Сиб. матем. журн. 2004. Т. 45. № 1. С. 201 – 210.
2. *Кашу А.И.* Радикалы и кручения в модулях. Кишинёв: Штиинца, 1983.
3. *Мишина А.П.*, *Скорняков Л.А.* Абелевы группы и модули. М.: Наука, 1969.
4. *Pierce R.S.* E-modules // Abelian Group Theory. Providence: Amer. Math. Soc., 1989. P. 221 – 240. (Contemp. Math., Vol. 87).
5. *Крылов П.А.*, *Приходовский М.А.* Обобщённые Т-модули и Е-модули // Универсальная алгебра и её приложения. Волгоград: Перемена, 2000. С. 153 – 169.
6. *Тимошенко Е.А.* Т-радикалы, порождаемые бимодулями // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2009. № 8(74). С. 88 – 93.
7. *Тимошенко Е.А.* О порождаемости Т-радикалов бимодулями // Вестник Томского госуниверситета. Математика и механика. 2010. № 2(10). С. 16 – 19.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

ТИМОШЕНКО Егор Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры общей математики механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: tea471@mail.tsu.ru

Статья принята в печать 16.06.2010 г.