ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2010 Математика и механика № 3(11)

УДК 512.541+512.553

**А.Р. Чехлов**

# НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ Е-РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП[1]

Приведены различные примеры Е-нильпотентных и Е-разрешимых абелевых групп.

**Ключевые слова:** *кольцо эндоморфизмов, полугрупповое кольцо, коммутаторно инвариантная подгруппа, Е-нильпотентная группа, Е-энгелева группа.*

Все группы в статье предполагаются абелевыми, кольца – ассоциативными. Пусть $A$ – группа. Тогда $E(A)$ обозначает кольцо ее эндоморфизмов. $\mathbf{N}$ – множество всех натуральных чисел, $\mathbf{Z}$ – аддитивная группа (или кольцо) целых чисел. $Z(R)$ – центр кольца $R$. Подгруппа $G$ группы $A$ называется *чистой* (или *сервантной*), если $G \cap nA = nG$ для каждого $n \in \mathbf{N}$; *инвариантной*, если $fG \subseteq G$ для каждого автоморфизма $f$ группы $A$.

Напомним, что если $R$ – кольцо и $a,b \in R$, то элемент $[a,b] = ab - ba$ называется *коммутатором* элементов $a$ и $b$. Если $a_1,\ldots,a_n \in R$, то положим по индукции $[a_1,\ldots,a_n] = [[a_1,\ldots,a_{n-1}],a_n]$.

Подгруппу $H$ группы $A$ назовем *коммутаторно инвариантной* (обозначение $H \le \mathrm{ki}\, A$), если $[\varphi,\psi]H \subseteq H$ для всех $\varphi,\psi \in E(A)$. Коммутаторно инвариантные подгруппы изучались в [1 – 4].

Группу $A$ назовем Е-*нильпотентной класса* $n$, если $[\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1}] = 0$, эквивалентно $[\alpha_1,\ldots,\alpha_n] \in Z(E(A))$, для любых $\alpha_i \in E(A)$, $i = 1,\ldots,n+1$, и $[\beta_1,\ldots,\beta_n] \neq 0$ для некоторых $\beta_j \in E(A)$, $j = 1,\ldots,n$.

Группу назовем Е-*энгелевой*, класса $\le n$, если $[\alpha,\underbrace{\beta,\ldots,\beta}_{n}] = 0$ для любых ее эндоморфизмов $\alpha,\beta$.

Напомним, что кольцо называется *нормальным*, если все его идемпотенты центральны.

**Предложение 1** [4, предложение 1.2]**.** *В* Е-*энгелевой группе $A$ все ее прямые слагаемые вполне инвариантны. В частности, кольцо $E(A)$ нормальное.*

Группы с нормальным кольцом эндоморфизмов изучались в [4].

Свойства аддитивной группы $R^+$ кольца $R$ приписываются самому кольцу. Так, кольцо $R$ называется *редуцированным*, если редуцирована группа $R^+$.

Для удобства ссылок приведем следующий результат.

**Теорема 2** (теорема Корнера [5, теорема 110.1]). Всякое счетное редуцированное кольцо без кручения с единицей изоморфно кольцу эндоморфизмов некоторой счетной редуцированной группы без кручения.

Как хорошо известно, коммутатор $[x,y]$ является билинейной знакопеременной функцией от $x,y$; справедливы тождества Якоби $[[x,y],z] + [[y,z],x] + [[z,x],y] = 0$ и $[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$, а также

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 – 2013 годы. Государственный контракт П 937 от 20 августа 2009 г.

**1.** $[a,b,c,d] + [b,a,d,c] + [c,d,a,b] + [d,c,b,a] = 0$.

Ряд других свойств приведены в [1 – 4]. Отметим еще

**2.** $[x_1,\dots,x_{n-1},x_n] = [[x_1,\dots,x_{n-2}]x_{n-1},x_n] - [x_{n-1}[x_1,\dots,x_{n-2}],x_n]$; **3.** $[x_1,\dots,-x_i,\dots,x_n] = -[x_1,\dots,x_i,\dots,x_n]$;

**4.** $[[a,b],[c,d]] = [a,b,c,d] + [b,a,d,c]$.

В частности, $[[c,d],[a,b]] = [c,d,a,b] + [d,c,b,a]$. Из последних двух равенств получается свойство 1. Кроме того, из 4 следует, что у Е-нильпотентной группы класса $\leq 3$ перестановочны любые два коммутатора ее эндоморфизмов.

**5.** $[[a,b,c,d]] = [[a,b]c,d] - [c[a,b],d]$.

В 6 предполагается, что $x_i$ – любые элементы кольца $R$.

**6.** Для кольца $R$ с единицей следующие условия эквивалентны:

а) $[x_1,\dots,x_{n-1}] \in Z(R)$;

б) $[x_1,\dots,x_{n-2},x_{n-1},x_n] = [x_n,x_{n-1},[x_1,\dots,x_{n-2}]]$;

в) $[[x_1,\dots,x_{n-2}]x_{n-1},x_n] = [x_{n-1}[x_1,\dots,x_{n-2}],x_n]$;

г) $[[x_1,\dots,x_{n-1}]x_n,x_{n+1}] = [x_1,\dots,x_{n-1}][x_n,x_{n+1}]$.

***Доказательство.*** а) $\Rightarrow$ б). Обозначим $a = [x_1,\dots,x_{n-2}]$, тогда в силу тождества Якоби

$$[a,x_{n-1},x_n] + [x_{n-1},x_n,a] + [x_n,a,x_{n-1}] = 0.$$

Здесь $[a,x_{n-1},x_n] = 0$ и $[x_n,a,x_{n-1}] = -[a,x_n,x_{n-1}] = 0$. Значит, $[x_{n-1},x_n,a] = 0$, т.е. выполнено б). Эквивалентность а) и в) вытекает из свойства 2 коммутаторов.

а) $\Rightarrow$ г). Если $a = [x_1,\dots,x_{n-1}]$, то $[ax_n,x_{n+1}] = ax_nx_{n+1} - x_{n+1}ax_n = a[x_n,x_{n+1}]$.

При $x_n = 1$ в г) получаем $[x_1,\dots,x_{n-1},x_{n+1}] = 0$, т.е. г) $\Rightarrow$ а).

б) $\Rightarrow$ а). Обозначим $a = [x_1,\dots,x_{n-2}]$. Из $[a,x_{n-1},x_n] = [x_n,x_{n-1},a]$ после сокращения получаем

$$x_{n-1}x_na + ax_nx_{n-1} - x_{n-1}ax_n - x_nax_{n-1} = 0 \text{ или } [x_{n-1},[x_n,a]] = 0,$$

что в силу произвольности элементов влечет а).

Из п. г) свойства 6 следует, что кольцо $R$ с единицей удовлетворяет тождествам $[x_1,x_2][x_3,x_4] = 0$ и $[x_1,x_2,x_3] = 0$ тогда и только тогда, когда $c[a,b] \in Z(R)$ для любых $a,b,c \in R$.

**7.** Если кольцо $R$ с единицей удовлетворяет тождеству $[x_1,x_2,x_3] = 0$, то $[a,b][c,d] = [a,d][b,c] = [a,c][d,b]$ для любых $a,b,c,d \in R$. В частности, если $b$ перестановочен с $a$ или $c$, то $[a,c][b,d] = 0$. Поэтому если кольцо $R$ не содержит ненулевых нильпотентных элементов, то оно коммутативно.

***Доказательство.*** Действительно из 6, п. г) имеем $[a,b][c,d] = [[a,b]c,d] = [a[b,c] + [ac,b],d] = [[b,c]a,d] = [b,c][a,d]$. Оставшиеся утверждения доказываются аналогично.

**8.** Пусть $R$ – кольцо и $[a,b] \in Z(R)$ для некоторых $a,b \in R$. Тогда множество $N_{a,b} = \{c \in R \mid c[a,b] \in Z(R)\}$ является подкольцом в $R$, содержащим $Z(R)$. Кроме того, если $x,y \in N_{a,b}$, то $R[x,y]R \subseteq N_{a,b}$.

***Доказательство.*** Пусть $c,d \in N_{a,b}$. Допустим, что $cd[a,b] \notin Z(R)$. Тогда $[cd[a,b],x] \neq 0$ для некоторого $x \in R$. Так как $[a,b] \in Z(R)$, то $[cd[a,b],x] = [a,b][cd,x]$. Имеем

$$xcd[a,b] = x(d[a,b])c = ([a,b]c)xd = cxd[a,b].$$

Откуда $$[cd,x][a,b] = (cdx - cxd)[a,b] = c[d,x][a,b].$$

Но $[a,b][d,x] = [[a,b]d,x] = 0$ в силу условия $[a,b]d \in Z(R)$. Противоречие. Аналогично показывается, что $[x,s] \in N_{a,b}$ для любых $s \in R$ и $x \in N_{a,b}$, т.е. $N_{a,b}$ является идеалом **Z**-алгебры Ли, ассоциированной с $R$. Пусть теперь $x,y \in N_{a,b}$.

Если $r,s \in R$, то

$$[x,y]s = (xy - yx)s = x(ys) - (ys)x - y(xs - sx) = [x,ys] - y[x,s], \text{ т.е. } [x,y]R \subseteq N_{a,b}.$$

Откуда следует, что

$$r[x,y]s = [x,y]sr + r[x,y]s - [x,y]sr = [x,y]sr + [r,[x,y]s] \in [x,y]R + [R,N_{a,b}] \subseteq N_{a,b}.$$

Е-*центром* группы $A$ назовем следующую ее подгруппу:

$$Z(A) = \{a \in A \mid [\varphi,\psi]a = 0 \text{ для всех } \varphi,\psi \in E(A)\}.$$

Подгруппу $A' = \langle[\varphi,\psi]A \mid \varphi,\psi \in E(A)\rangle$ назовем Е-*коммутантом* группы $A$. Ясно, что коммутативность $E(A)$ эквивалентна любому из равенств $Z(A) = A$, $A' = 0$. Если $a \in A$, то через $[\varphi,\psi]a$ обозначим *коммутатор* элемента $a$.

Очевидно, что если $H \leq \mathrm{ki}\, A$ и $H \cap A' = 0$, то $H \subseteq Z(A)$. Поэтому если $H$ – минимальная ki-подгруппа, то $H \subseteq A'$ или $H \subseteq Z(A)$. В частности, если $A$ порождается минимальными ki-подгруппами, то $A = A' + Z(A)$.

Определим по индукции $A^{(0)} = A$, $A^{(1)} = A', \ldots, A^{(n+1)} = (A^{(n)})'$ и $A^{(\alpha)} = \bigcap_{\rho<\alpha} A^{(\rho)}$ при предельном ординале $\alpha$.

Группу $A$ назовем Е-*разрешимой*, если $A^{(n)} = 0$ для некоторого $n \in \mathbf{N}$. Такое наименьшее $n$ назовем *классом* Е-разрешимости группы $A$. Прямые слагаемые Е-разрешимой группы являются Е-разрешимыми группами.

Различные свойства и описание Е-центров и Е-коммутантов групп из ряда классов получены в [1 – 4].

**Пример 1**. Пусть $X = \{a,b\}$ – полугруппа левых нулей, т.е. $xy = x$ для всех $x,y \in X$. Присоединим к $X$ единицу 1 и нуль 0, $S = X \cup \{0,1\}$ и рассмотрим на $S$ целочисленное полугрупповое кольцо $K$. Элементами $K$ служат всевозможные конечные суммы вида $\alpha = n\cdot 1 + m\cdot a + s\cdot b + u\cdot 0$, где $n,m,s,u \in \mathbf{Z}$. Если $\beta = k\cdot 1 + l\cdot a + r\cdot b + v\cdot 0$, то $[\alpha,\beta] = (mr - ls)(a - b)$. Поэтому $[\alpha,\beta] \neq 0$ при $mr \neq ls$. Если $[\gamma,\delta] = t(a - b)$, то $[\gamma,\delta][\alpha,\beta] = t(mr - ls)(a - b)^2 = 0$. По теореме Корнера (теорема 2) существует группа без кручения $A$, кольцо эндоморфизмов которой изоморфно $K$, $A$ является Е-разрешимой группой класса 2. Далее, $[\alpha,\underbrace{\beta,\ldots,\beta}_{n}] = (mr - ls)(r + l)(a - b) \neq 0$ при $r \neq -l$, $mr \neq ls$, поэтому $A$ не является Е-энгелевой.

Е-центр группы без кручения – чистая подгруппа, а Е-коммутант может не быть чистой подгруппой.

**Пример 2**. Пусть $n > 1$ – натуральное число и $K$ – кольцо всех матриц вида

$$\alpha = \begin{pmatrix} a & nb & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \text{ где } a,b,c,d \in \mathbf{Z}.$$

Если $\beta = \begin{pmatrix} x & ny & z \\ 0 & x & t \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$, то $\alpha\beta - \beta\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & n(bt - yd) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in Z(K)$. По теореме Корнера существует группа без кручения, кольцо эндоморфизмов которой изоморфно $K$; эта группа Е-нильпотентна класса 2, коммутант которой не является чистой подгруппой.

Легко привести примеры, когда подгруппы и факторгруппы Е-нильпотентной группы не являются Е-нильпотентными. Так, пусть $A = B \oplus C$, где $B$ и $C$ – вполне инвариантные подгруппы с коммутативными кольцами эндоморфизмов группы без кручения $A$ и $pB \neq B$, $pC \neq C$. Кольцо $E(A)$ также коммутативно, поэтому $A$ – Е-нильпотентная группа. Однако для любых $0 \neq b \in B$ и $0 \neq c \in C$ подгруппа $\langle b\rangle \oplus \langle c\rangle$ и фактор-группа $A/pA \cong (B/pB)\oplus(C/pC)$, как это следует из предложения 1, не являются Е-нильпотентными.

**Пример 3**. Пусть $K = T_2(\mathbf{Z})$ – кольцо целочисленных треугольных матриц порядка 2. Коммутатор любых двух матриц из $K$ имеет вид $a = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & u \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ для некоторого $u \in \mathbf{Z}$. Поэтому произведение любых двух коммутаторов есть 0 кольца $K$. Согласно теореме Корнера, существуют группы $A$ с кольцом эндоморфизмов $K$, эти группы будут Е-разрешимыми группами класса 2. Если $b = \begin{pmatrix} x & y \\ \mathbf{0} & z \end{pmatrix} \in K$, где $x \neq z$, то $ab - ba = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & u(z-x) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$. Откуда $[a, \underbrace{b, \ldots, b}_{n}] \neq 0$ для любого $n$, т.е. $A$ не будут Е-энгелевыми.

Отметим, что для каждого $n$ существуют Е-разрешимые группы класса $n$, не являющиеся Е-нильпотентными.

**Пример 4**. Пусть $\mathbf{Z}[i] = \{m + ki \mid m,k \in \mathbf{Z}\}$ – кольцо целых гауссовых чисел. Рассмотрим кольцо $(\mathbf{Z}[i])[x,\bar{\ }]$, состоящее из многочленов от $x$ с коэффициентами из $\mathbf{Z}[i]$, для которых выполняется равенство $xa = \bar{a}x$, где $\bar{a}$ – комплексное число из $\mathbf{Z}[i]$, сопряженное к $a$. Пусть теперь $K_n = (\mathbf{Z}[i])[x,\bar{\ }]/(x^n)$, где $(x^n)$ – идеал, порожденный $x^n$. Тогда $[f,g] = fg–gf \in xK_n$ для любых $f,g \in K_n$. Поэтому $[f_{2n-1}, f_{2n}]\ldots$ $\ldots [f_1,f_2] = 0$ для всех $f_i \in K_n$ при $i = 1,\ldots,2n$. Аддитивная группа кольца $K_n$ является счетной редуцированной группой без кручения. Как и в примере 2 в качестве $A$ можно взять группу, кольцо эндоморфизмов которой изоморфно $K_n$. Поскольку, например, $[x, \underbrace{i, \ldots, i}_{n}] = (-2i)^n x \neq 0$, то $A$ не является Е-энгелевой. Если рассмотреть подкольцо в $K_n$, состоящее из многочленов $f(x) = a_0x^m + \ldots + a_m$ со свободным коэффициентом $a_m \in \mathbf{Z}$, то группа с соответствующим кольцом эндоморфизмов будет Е-нильпотентной.

Пусть $R$ – кольцо со свойством $[x,y,y] = 0$ для любых $x,y \in R$. Тогда $0 = [x,y+z,y+z] = [x,y,z] + [x,z,y]$. Согласно тождеству Якоби, $[x,z,y] = [x,y,z] + [y,z,x]$. Откуда $2[x,y,z] + [y,z,x] = 0$. Из $0 = [y,z+x,z+x] = [y,z,x]+[y,x,z]$ получаем $[y,z,x] =$ $= – [y,x,z] = [x,y,z]$. Поэтому $3[x,y,z] = 0$. Аналогичным образом, используя свойство 1 и уже доказанное равенство $3[x,y,z] = 0$, можно показать, что $[x,y,z,t] = 0$ для любых $x,y,z,t \in R$.

Как и для абелевых групп, можно определить Е-разрешимые, Е-нильпотентные и Е-энгелевы модули. Из вышеприведенных рассуждений следует, что всякий Е-энгелев модуль $M$ класса $\leq 2$ является Е-нильпотентным класса $\leq 3$, а если для каждого $m \in M$ из $3m = 0$ следует $m = 0$, то и Е-нильпотентным класса $\leq 2$. Если же $M$ – абелева группа и $M$ имеет ненулевую 3-компоненту, то $M = B\oplus C$, где $B$ – неразложимая 3-группа и $E(B)$ – коммутативное кольцо. Из предложения 1 следует, что $C$ не имеет элементов порядка 3. Поэтому в силу вышесказанного всякая Е-энгелева группа класса $\leq 2$ является Е-нильпотентной класса $\leq 2$.

Если $H \leq \mathrm{ki}\, A$ и $R = E(A)$, то положим $Z_R(A/H) = \{\bar{a} \in A/H \mid [\alpha,\beta]\bar{a} = 0$ для всех $\alpha,\beta \in R\}$. Ясно, что если $A' \subseteq B \leq A$, то $B \leq \mathrm{ki}\, A$.

Если $H \subseteq A$, то через $N_R(H) = \{a \in A \mid [\alpha,\beta]a \in H$ для всех $\alpha,\beta \in R\}$ обозначим Е-*нормализатор* подмножества $H$ в группе $A$. Индекс $R$ иногда будем опускать.

Инвариантность подгруппы $H$ влечет инвариантность $N(H)$. Ясно, что $H = N(H)$ для $H \le A$ в точности тогда, когда $H \le \mathrm{ki}\, A$ и $A/H$ – коммутаторно точная фактор-группа, т.е. для любого $0 \ne \bar{a} = a + H \in A/H$ найдутся $\varphi, \psi \in E(A)$ со свойством $[\varphi,\psi]\,\bar{a} \ne 0$ (факт, отмеченный в [1]). Отсюда несложно вывести, что для прямого слагаемого $H$ выполняется равенство $H = N(H)$ тогда и только тогда, когда $H$ вполне инвариантно и $Z(C) = 0$ для каждого (эквивалентно – для некоторого в силу их изоморфизма) дополнительного прямого слагаемого $C$.

Ряд $A_i \subseteq A_{i+1} \subseteq \ldots \subseteq A_{i+n} \subseteq \ldots$ подгрупп $A_i$ $(i \in I)$ группы $A$ назовем E-*центральным*, если $A_i \le \mathrm{ki}\, A$ и $A_{i+1}/A_i \subseteq Z_R(A/A_i)$ (эквивалентно, $A_{i+1} \subseteq N_R(A_i)$) для всех $i \in I$. Если же $A_i \le \mathrm{ki}\, A$ для всех $i \in I$, то ряд назовем E-*нормальным*.

Если $A$ – группа, $R = E(A)$, то положим по индукции $Z_0(A) = 0$, $Z_1(A) = Z(A)$, …, $Z_i(A)/Z_{i-1}(A) = Z_R(A/Z_{i-1}(A))$ и $Z_\alpha(A) = \bigcup_{\rho<\alpha} Z_\rho(A)$ при предельном ординале $\alpha$.

Обозначим для краткости $Z_\alpha = Z_\alpha(A)$. Ряд $0 \subseteq Z_1 \subseteq \ldots \subseteq Z_\alpha \subseteq \ldots$ назовем *верхним* E-*центральным* рядом группы $A$. Подгруппы $Z_\alpha$ назовем E-*гиперцентрами* группы $A$. Все E-гиперцентры являются вполне инвариантными подгруппами. В группе без кручения все E-гиперцентры являются чистыми подгруппами, поэтому все факторы верхнего E-центрального ряда также группы без кручения.

Если $H \subseteq A$, то подгруппу $\langle [\varphi,\psi]h \mid h \in H,\ \varphi,\psi \in E(A)\rangle$ назовем E-*коммутантом* подмножества $H$ в $A$ и обозначим через $[H,A]$. Если $H \le \mathrm{ki}\, A$, то $[H,A] \le \mathrm{ki}\, A$, а если $H \le \mathrm{fi}\, A$, то $[H,A] \le \mathrm{fi}\, A$. Всегда $[B+C,A] = [B,A] + [C,A]$ для $B,C \le A$. Обозначим

$$[H,A]_1 = H + [H,A] \text{ и } [H,A]_{n+1} = [H,A]_n + [[H,A]_n, A] \text{ при } n \ge 1.$$

Тогда $\bar{H} = \bigcup_{n=1}^{\infty} [H,A]_n$ – наименьшая ki-подгруппа, содержащая $H$. Действительно, $\bar{H} \le \mathrm{ki}\, A$ и всякая ki-подгруппа, содержащая $H$, содержит и $\bar{H}$. Инвариантность $H$ влечет инвариантность $\bar{H}$. Заметим, что если $H \subseteq A'$, то $\bar{H} \subseteq A'$.

Положим по индукции $L_1(A) = A$, $L_{i+1}(A) = [L_i(A),A]$ и $L_\alpha(A) = \bigcap_{\rho<\alpha} L_\rho(A)$, если $\alpha$ – предельное порядковое число. Отметим, что $L_n(A) = A^{(n-1)}$ для $n \in \mathbf{N}$ и $L_\alpha(A) \le \mathrm{fi}\, A$ для каждого ординала $\alpha$.

Заметим, что

$$L_{n+1}(A) = \langle [\alpha_{2n-1},\alpha_{2n}]\ldots[\alpha_1,\alpha_2]a \mid a \in A,\ \alpha_i \in E(A),\ i = 1,\ldots,2n\rangle,$$

а
$$Z_n(A) = \{a \in A \mid [\alpha_{2n-1},\alpha_{2n}]\ldots[\alpha_1,\alpha_2]a = 0,\ \alpha_i \in E(A),\ i = 1,\ldots,2n\}.$$

E-разрешимые группы класса $n$ являются подклассом класса $\mathrm{BL}_n$-групп – групп $A$ со свойством $[\varphi,\psi]^n = 0$ для всех $\varphi,\psi \in E(A)$. Группы из класса $\mathrm{BL}_2$ изучались в [2 – 4].

Если $0 = A_0 \subseteq A_1 \subseteq \ldots \subseteq A_{n-1} \subseteq A_n = A$ – E-центральный ряд, то получаем включения $A_i \subseteq Z_i$ и $L_i \subseteq A_{n-i+1}$, где $L_i = L_i(A)$. Ряд $L_1(A) \supseteq L_2(A) \supseteq \ldots$ назовем *нижним* E-*центральным* рядом группы $A$. Из вышеприведенных включений следует, что в E-разрешимой группе верхний и нижний E-центральные ряды обрываются, причем их длины равны классу E-разрешимости группы. В частности, в E-разрешимой группе все ее E-центральные ряды обрываются, минимальная длина таких рядов совпадает с классом E-разрешимости группы.

Хотя верхний и нижний E-центральные ряды E-разрешимой группы имеют одинаковую длину, они сами не обязаны совпадать. Так, в вышеприведенном примере E-разрешимой группы $A = B \oplus C \oplus D$ верхний E-центральный ряд имеет вид $0 \subset C \oplus D \subset A$, а нижний $0 \subset \mathrm{Hom}(B,C)B \subset A$.

**I.** Пусть $R$ – такое кольцо, что соотношение $2a = 0$ влечет за собой $a = 0$, $U$ –

коммутативное подкольцо в $R$, являющееся идеалом $\mathbf{Z}$-алгебры Ли, ассоциированной с $R$. Тогда если $x \in U$, $s \in R$ то $([x,s]t)^3 = 0$ и $(t[x,s])^3 = 0$ для любого $t \in R$.

***Доказательство.*** Имеем $y = [x,s] \in U$. Поэтому $[x,s]^2 = xs(xs - sx) - s(xs - sx)x = (xs - sx)xs - (xs - sx)sx$. Откуда $2[x,s]^2 = x^2s^2 - xs^2x - xs^2x + s^2x^2 = x(xs^2 - s^2x) - (xs^2 - s^2x)x = 0$, так как $x$ перестановочен с $xs^2 - s^2x$. Значит, $y^2 = [x,s]^2 = 0$. Аналогично $[y,t]^2 = 0$. Далее $[y,t]^2 = (yt - ty)(yt - ty) = (yt)^2 - yt^2y + (ty)^2$. Поэтому $(yt)^3 = 0$ и $(ty)^3 = 0$.

Будем говорить, что кольцо $R$ удовлетворяет условию (∗), если для любого $0 \neq \alpha \in R$ найдется такой $\beta \in R$, что $\alpha\beta$ или $\beta\alpha$ не является нильпотентным элементом.

**II.** Пусть $A$ – E-нильпотентная группа класса $\leq 3$. Тогда если кольцо $E(A)$ удовлетворяет условию (∗), то оно является коммутативным.

***Доказательство.*** Согласно предложению 1, прямые слагаемые группы $A$ вполне инвариантны. Поэтому если $A$ имеет ненулевую 2-компоненту, то $A = B \oplus C$, где $B$ – неразложимая 2-группа, а 2-компонента группы $C$ нулевая. Следовательно, можно предполагать, что 2-компонента группы $A$ является нулевой, т.е. кольцо $E(A)$ удовлетворяет условию (∗). Согласно замечанию после свойства 4, коммутаторы эндоморфизмов группы $A$ перестановочны, поэтому они порождают коммутативное подкольцо в $E(A)$. Из I следует, что если $x \in U$, $s \in E(A)$ то $[x,s] = 0$, т.е. $A$ – E-нильпотентная группа класса $\leq 2$. Если $[\alpha,\beta] \neq 0$ для некоторых $\alpha,\beta \in E(A)$, то $[\alpha,\beta] \in Z(E(A))$. Поэтому ввиду свойства 7 $([\alpha,\beta]\gamma)^2 = 0$ для любого $\gamma \in E(A)$, что противоречит условию на $E(A)$. Это доказывает утверждение.

**Пример 5**. Пусть $M$ – множество всех натуральных чисел, не делящихся на квадраты. Каждому $m \in M$ сопоставим циклическую группу $\langle a_m \rangle$ порядка 2 и обозначим через $B$ прямое произведение всех $\langle a_m \rangle$, т.е. $B$ состоит из функций $f$: $M \to \bigcup_{m \in M} \langle a_m \rangle$ с условием $f(m) \in \langle a_m \rangle$ и конечным *носителем* $\{m \in M \mid f(m) \neq e\}$, где $e$ – единица соответствующей группы.

Каждому простому числу $p$ сопоставим эндоморфизм $\varphi_p$ группы $B$, задаваемый на порождающих следующим образом:

$$a_m^{\varphi_p} = \begin{cases} a_{m/p} & \text{при } p \mid m \\ a_m & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Очевидно, что $\varphi_p^2 = \varphi_p$ и $\varphi_p\varphi_q = \varphi_q\varphi_p$, так что полугруппа $\Phi$, порожденная всеми $\varphi_p$, коммутативна. Пусть $G$ – полугруппа, состоящая из элементов $\{\varphi a \mid \varphi \in \Phi, a \in B\}$ с умножением $\varphi a \cdot \varphi b = \varphi\psi a^{\psi} b$. Под носителем элемента $g = \varphi a \in G$ будем понимать носитель элемента $a$ в $B$. Пусть, далее, $K$ – целочисленное полугрупповое кольцо, заданное на $G$, т.е. элементами $K$ служат всевозможные конечные суммы вида $x = n_1g_1 + \ldots + n_kg_k$, где $n_i \in \mathbf{Z}$, $g_i \in G$. Некоммутативность полугруппы $G$ влечет некоммутативность кольца $K$. Всякий коммутатор элементов из $K$ имеет вид $[x,y] = s_1[\ ]_1 + \ldots + s_m[\ ]_m$, где $s_i \in \mathbf{Z}$, $[\ ]_i = [g_{l_i}, g_{t_i}]$ для некоторых $g_{l_i}, g_{t_i} \in G$. Заметим, что $[g_1,g_2]g[g_1,g_2] = 0$ для любых $g,g_1,g_2 \in G$. Действительно, если $g = fc$, $g_1 = \varphi a$, $g_2 = \psi b$, то $[\varphi a,\psi b] = \varphi\psi a^{\psi} b - \varphi\psi b^{\varphi} a$. Откуда

$$[g_1,g_2]g[g_1,g_2] = (\varphi\psi a^{\psi} b - \varphi\psi b^{\varphi} a)(fc)(\varphi\psi a^{\psi} b - \varphi\psi b^{\varphi} a) =$$

$$= (\varphi\psi a^{\psi} b - \varphi\psi b^{\varphi} a)(f\varphi\psi c^{\varphi\psi} a^{\psi} b - f\varphi\psi c^{\varphi\psi} b^{\varphi} a) =$$

$$= f\varphi\psi a^{f\varphi\psi} b^{f\varphi\psi} c^{\varphi\psi} a^{\psi} b - f\varphi\psi a^{f\varphi\psi} b^{f\varphi\psi} c^{\varphi\psi} a^{\psi} b - f\varphi\psi a^{f\varphi\psi} b^{f\varphi\psi} c^{\varphi\psi} a b^{\varphi} + f\varphi\psi a^{f\varphi\psi} b^{f\varphi\psi} c^{\varphi\psi} a b^{\varphi} = 0.$$

Значит, $[x,y]^{m+1} = (s_1[\ ]_1 + \ldots + s_m[\ ]_m)^{m+1} = 0$.

Пусть теперь $u = [\ ]_1\ldots[\ ]_k \neq 0$ и $N \subset M$ – такое конечное подмножество, что носитель каждого элемента $g \in G$, входящего в произведение $u$, содержится в $N$. Если $p,q$ – такие простые числа, что $p,q \nmid m$ для каждого $m \in N$, $[\varphi_p c,\varphi_q d] \neq 0$, и носители элементов $c,d$ содержатся в $M \setminus N$, то $u[\varphi_p c,\varphi_q d] \neq 0$.

Пусть теперь $a = a_p$, $\psi = \varphi_p$, а $b^\varphi = b$, $b^\psi = b$. Тогда $a^\psi = e$ и

$$0 \neq [\varphi a, \underbrace{\psi b, \ldots, \psi b}_{n}] = \begin{cases} \varphi\psi a - \varphi\psi e \text{ при } n = 2m, \\ \varphi\psi b - \varphi\psi ba \text{ при } n = 2m+1. \end{cases}$$

Если $A$ – группа, кольцо эндоморфизмов которой изоморфно $K$, то $A \in \mathrm{BL}$, но не является ни E-разрешимой, ни E-энгелевой. Отметим, что в [6 – 9] автор изучал проективно инвариантные подгруппы. Близкие вопросы исследовались в [10 – 46].

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Чехлов А.Р.* О свойствах центрально и коммутаторно инвариантных подгрупп абелевых групп // Вестник Томского госуниверситета. Математика и механика. 2009. № 2(6). С. 85 – 99.
2. *Чехлов А.Р.* О скобке Ли эндоморфизмов абелевых групп // Вестник Томского госуниверситета. Математика и механика. 2009. № 2(6). С. 78 – 84.
3. *Чехлов А.Р.* Об абелевых группах с нормальным кольцом эндоморфизмов // Алгебра и логика. 2009. Т. 48. № 4. С. 520 – 539.
4. *Чехлов А.Р.* E-нильпотентные и E-разрешимые абелевы группы класса 2 // Вестник Томского госуниверситета. Математика и механика. 2010. № 1(9). С. 59 – 71.
5. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1974. Т. 1; 1977. Т. 2.
6. *Чехлов А.Р.* Свойства подгрупп абелевых групп, инвариантных относительно проекций // Вестник Томского госуниверситета. Математика и механика. 2008. № 1(2). С. 76 – 82.
7. *Чехлов А.Р.* О проективно инвариантных подгруппах абелевых групп // Вестник Томского госуниверситета. Математика и механика. 2009. № 1(5). С. 31 – 36.
8. *Чехлов А.Р.* О подгруппах абелевых групп, инвариантных относительно проекций // Фундамент. и прикл. матем. 2008. Т. 14. № 6. С. 211 – 218.
9. *Чехлов А.Р.* Сепарабельные и векторные группы, проективно инвариантные подгруппы которых вполне инвариантны // Сиб. матем. журн. 2009. Т.50. № 4. С. 942 – 953.
10. *Чехлов А.Р.* Пересечение прямых слагаемых абелевых $p$-групп // Абелевы группы и модули. Томск, 1981. С. 240 – 244.
11. *Чехлов А.Р.* О некоторых классах абелевых групп // Абелевы группы и модули. Томск, 1984. С. 137 – 152.
12. *Чехлов А.Р.* Об абелевых группах без кручения, близких к квазисервантно инъективным // Абелевы группы и модули. Томск, 1985. С. 117 – 127.
13. *Чехлов А.Р.* О некоторых классах абелевых групп без кручения, близких к квазисервантно инъективным // Изв. вузов. Матем. 1985. № 8. С. 82 – 83.
14. *Чехлов А.Р.* Абелевы CS-группы без кручения // Абелевы группы и модули. Томск, 1988. С. 131 – 147.
15. *Чехлов А.Р.* О квазисервантно инъективных абелевых группах без кручения // Изв. вузов. Матем. 1988. № 6. С. 80 – 83.
16. *Чехлов А.Р.* О квазисервантно инъективных абелевых группах без кручения // Абелевы группы и модули. Томск, 1989. С. 139 – 153.
17. *Чехлов А.Р.* Квазисервантно инъективные абелевы группы без кручения // Матем. заметки. 1989. Т. 46. № 3. С. 93 – 99.
18. *Чехлов А.Р.* Связные квазисервантно инъективные абелевы группы // Изв. вузов. Матем. 1989. № 10. С. 84 – 87.
19. *Чехлов А.Р.* Об абелевых CS-группах без кручения // Изв. вузов. Матем. 1990. № 3. С. 84 – 87.
20. *Чехлов А.Р.* О прямых произведениях и прямых суммах абелевых QCPI-групп без кручения // Изв. вузов. Матем. 1990. № 4. С. 58 – 67.

21. *Чехлов А.Р.* Об абелевых разложимых QCPI-группах без кручения *p*-ранга $\geq 2^{\aleph_0}$ // Абелевы группы и модули. Томск, 1990. С. 125 – 130.
22. *Чехлов А.Р.* Абелевы группы без кручения конечного *p*-ранга с дополняемыми замкнутыми сервантными подгруппами // Абелевы группы и модули. Томск, 1991. С. 157 – 178.
23. *Чехлов А.Р.* Об абелевых QCS-группах без кручения // Абелевы группы и модули. Томск, 1994. С. 240 – 245.
24. *Беккер И.Х.*, *Крылов П.А.*, *Чехлов А.Р.* Абелевы группы без кручения, близкие к алгебраически компактным // Абелевы группы и модули. Томск, 1994. С. 3 – 52.
25. *Чехлов А.Р.* Квазисервантно инъективные группы без кручения конечного *p*-ранга // Изб. докл. Межд. конф. «Всесиб. чтения по матем. и механ.» Томск, 1998. С. 240 – 245.
26. *Чехлов А.Р.* О вполне транзитивных системах групп без кручения // Исслед. по матем. анализу и алгебре. Томск, 1998. С. 240 – 245.
27. *Чехлов А.Р.* О вполне транзитивных системах групп без кручения, 2 // Исслед. по матем. анализу и алгебре. Томск, 2000. С. 181 – 190.
28. *Чехлов А.Р.* Квазисервантно инъективные группы без кручения с неразложимыми сервантными подгруппами // Матем. заметки. 2000. Т. 68. № 4. С. 587 – 592.
29. *Чехлов А.Р.* Пересечения прямых слагаемых абелевых групп // Абелевы группы и модули. Томск, 2000. С. 117 – 118.
30. *Чехлов А.Р.* О разложимых вполне транзитивных группах без кручения // Сиб. матем. журн. 2001**.** Т**.** 42. № 3. С. 714 – 719.
31. *Чехлов А.Р.* Об одном классе эндотранзитивных групп // Матем. заметки. 2001**.** Т. 69. № 6. С. 944 – 949.
32. *Чехлов А.Р.* Вполне транзитивные группы конечного *p*-ранга // Алгебра и логика. 2001. Т. 40. № 6. С. 698 – 715.
33. *Крылов ПА.*, *Чехлов А.Р.* Абелевы группы без кручения с большим числом эндоморфизмов // Труды Института математики и механики. 2001. Т. 7. № 2. С. 194 – 207.
34. *Чехлов А.Р.* О квазиполных смешанных группах // Фундамент. и прикл. матем. 2002. Т. 8. № 4. С. 1215 – 1224.
35. *Chekhlov A.R.* On Mixed cs-Groups // Acta Appl. Math. 2005. V. 85. P. 75 – 85.
36. *Чехлов А.Р.* О слабо квазисервантно инъективных группах // Матем. заметки. 2007. Т. 81. № 3. С. 434 – 447.
37. *Chekhlov A.R.*, *Krylov P.A.* On L. Fuchs` problems 17 and 43 // J. of Math. Sci. 2007. V. 143. No 5. P. 3517 – 3602.
38. *Чехлов А.Р.* Упражнения по основам теории групп. Томск, 2004.
39. *Крылов П.А.*, *Туганбаев А.А.*, *Чехлов А.Р.* Задачи по теории колец, модулей и полей. М.: Факториал Пресс, 2007.
40. *Крылов П.А.*, *Туганбаев А.А.*, *Чехлов А.Р.* Упражнения по группам, кольцам и полям. Томск, 2008.
41. *Чехлов А.Р.* О скобке Ли эндоморфизмов абелевых групп // Вестник Томского госуниверситета. Математика и механика. 2009. № 2(6). С. 78 – 84.
42. *Чехлов А.Р.* О свойствах центрально и коммутаторно инвариантных подгрупп абелевых групп // Вестник Томского госуниверситета. Математика и механика. 2009. № 2(6). С. 85 – 99.
43. *Чехлов А.Р.* Об абелевых группах, все подгруппы которых являются идеалами // Вестник Томского госуниверситета. Математика и механика. 2009. № 3(7). С. 64 – 67.
44. *Чехлов А.Р.* О нильгруппах *p*-ранга 1 // Вестник Томского госуниверситета. Математика и механика. 2010. № 1(9). С. 53 – 58.
45. *Chekhlov A.R* On Projective Invariant Subgroups of Abelian Groups // Journal of Math. Sci. 2010. V. 164. No 1. P. 143 – 147.
46. *Чехлов А.Р.* О коммутаторно инвариантных подгруппах абелевых групп // Сиб. матем. журн. 2010. Т. 51. № 5. С. 1163 – 1174.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

**ЧЕХЛОВ Андрей Ростиславович** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры Томского государственного университета. E-mail: cheklov@math.tsu.ru

Статья принята в печать 25.05.2010 г.