

МАТЕМАТИКА

УДК 517.54

А.Н. Малютина, М.А. Елизарова

ОЦЕНКИ ИСКАЖЕНИЯ МОДУЛЕЙ ДЛЯ ОТОБРАЖЕНИЙ
С S -УСРЕДНЕННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ¹

В настоящей работе исследуются геометрические свойства отображений с s -усредненной характеристикой. Для таких отображений доказаны теоремы об оценке искажения модуля семейства кривых и модуля образа семейства кривых. Полученные результаты дают возможность установить эквивалентность геометрического и аналитического определений отображений с s -усредненной характеристикой и позволяют расширить математический аппарат при их исследовании.

Ключевые слова: отображения с s -усредненной характеристикой, модуль семейства кривых, оценка искажения модуля.

Метод модулей является мощным средством для изучения различных свойств пространственных отображений. Метод опирается на неравенства, описывающие поведение модуля семейства кривых, когда семейство преобразуется данным отображением, а также на некоторые оценки для модулей. Основные результаты в этом направлении описаны в работах Väisälä [1], Шабата [2], Сычева [3] при изучении пространственных гомеоморфных отображений; Martio, Ricman, Väisälä [4], Решетняка [5], а также Полецкого [6] при изучении пространственных негомеоморфных отображений; Стругова [7], Кругликова [8], Малютиной [9] при изучении отображений с искажением, ограниченным в среднем и при изучении отображений с s -суммируемой характеристикой.

Цель данной работы – показать, что метод модулей можно распространить на класс отображений с s -усредненной характеристикой.

Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$ и отображение $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ – открытое, непрерывное, изолированное, $f \in \tilde{W}_{n,loc}^1(D)$. Можно считать, что якобиан отображения $J(x, f)$ сохраняет знак почти всюду в D (для определенности возьмем $J(x, f) > 0$).

Известно (см. напр. [3, 9]), что для отображения $f \in \tilde{W}_{n,loc}^1(D)$, определены следующие величины:

$$K_I(x, f) = \frac{J(x, f)}{l^n(f, x)}, \quad (1)$$

$K_I(x, f)$ – внутренняя дилатация отображения f , $l(x, f) = \min_{|h|=1} |f'(x)h|$;

¹ Работа (частично) профинансирована Федеральным агентством по науке и инновациям России по контракту № 02.740.11.0238 и по контракту П937 по ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 – 2013 годы.

$$K_O(x, f) = \frac{L^n(x, f)}{J(x, f)}, \quad (2)$$

$K_O(x, f)$ – внешняя дилатация отображения f , $L(x, f) = \max_{|h|=1} |f'(x)h|$;

а также выполнены неравенства

$$K(x, f) \leq \min(K_I(x, f), K_O(x, f)) \leq K^{\frac{n}{2}}(x, f) \leq \max(K_I(x, f), K_O(x, f)) \leq K^{n-1}(x, f), \quad (3)$$

где
$$\lambda(x, f) = n^{\frac{-n}{2}} \frac{|\nabla f(x)|^n}{|J(x, f)|}, \quad K(x, f) = \frac{|f'(x)|}{l(x, f)}. \quad (4)$$

Пусть $A \subset D$ – открытое множество. Для $x \in A$ обозначим через $N(y, f, A)$, как и в [11], число точек из $A \cap f^{-1}(y)$ и положим, что $N(f, A) = \sup_{y \in \mathbf{R}^n} N(y, f, A)$ по всем $y \in \mathbf{R}^n$. Ясно, что $N(f, A) \geq 1$.

Пусть $A \subset \mathbf{R}^n$ – некоторое множество. Под кривой $\gamma \in A$, как и в [6], мы будем понимать непрерывное отображение, непостоянное на любом отрезке, а также множество $\gamma = \{x \in \mathbf{R}^1 : x = \gamma(t), t \in [0, 1]\}$.

Пусть $f : A \rightarrow \mathbf{R}^m$ – непрерывное отображение и $\gamma \in A$ – кривая. Тогда $f \circ \gamma \in \mathbf{R}^m$, согласно [1], – тоже кривая. Если $f \circ \gamma$ локально спрямляемая кривая и если $\rho : f \circ \gamma \rightarrow \mathbf{R}^1$ – неотрицательная борелевская функция, тогда определен линейный интеграл от функции ρ по кривой $f \circ \gamma$.

Пусть $\Gamma \subset A$ – произвольное семейство кривых и $f : A \rightarrow \mathbf{R}^n$ – непрерывное отображение. Образом семейства Γ при отображении f называется совокупность $f(\Gamma)$ всех кривых $f \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^n$, где $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^n$ – произвольная кривая семейства Γ . Обозначим через ds элемент длины на кривой γ .

Определение 1. Пусть $\Gamma \subset \mathbf{R}^n$ – некоторое семейство кривых. Функция $\rho : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^1$ называется допустимой метрикой для Γ ($\rho \wedge \Gamma$), если она неотрицательна, измерима по Борелю и $\int_{\gamma} \rho ds_x \geq 1$ для $\forall \gamma \in \Gamma$, где $ds_x = ds/(1+|x|^2)$.

Для произвольного l , $0 < l < \infty$, определим модуль порядка l семейства Γ как

$$M_l(\Gamma) = \inf_{\rho \wedge \Gamma} \int_{\mathbf{R}^n} \rho^l(x) d\sigma_x$$

или просто $M(\Gamma)$, где $d\sigma_x = dx/(1+|x|^2)^n$.

Теорема 1. Пусть $D, D' \subset \mathbf{R}^n$ – области, $f : D \rightarrow D'$ – отображение с $K_{O,S}^*$ -усредненной характеристикой [11], $s > 1$. Пусть $A \subset D$ – борелевское множество такое, что $N(f, A) < \infty$. Тогда существует ограниченная, неотрицательная, аддитивная, абсолютно непрерывная функция $\Phi_{O,S}^*$ борелевских множеств в D , такая, что для любого семейства кривых $\Gamma \subset A$ выполнено неравенство

$$M_n^s(\Gamma) \leq N^{s-1}(f, A) \cdot \Phi_{O,S}^*(A) \cdot M_{ns/(s-1)}^{s-1}(f\Gamma).$$

Доказательство. Предположим, что $\rho^* \wedge f\Gamma$. Определим функцию $\rho: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ следующим образом:

$$\rho(x) = \begin{cases} \rho^*(f(x))L(x, f) \cdot \frac{1+|x|^2}{(1+|y|^2)^{(s-1)/s}}, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Покажем, что $\rho \wedge \Gamma$.

Функция $\rho(x)$ измерима по Борелю как композиция измеримых борелевских функций.

Пусть Γ_0 – семейство всех спрямляемых кривых $\gamma \in \Gamma$, таких, что f абсолютно непрерывно на γ . Тогда, если γ^0 – параметризация γ посредством ее длины дуги, то $f \circ \gamma^0$ абсолютно непрерывно и $M(\Gamma_0) = M(\Gamma)$ [6].

Так как

$$\int_{\gamma} \rho(x) ds_x = \int_{\gamma} \rho^*(f(x)) \cdot L(x, f) \frac{ds}{(1+|y|^2)^{(s-1)/s}},$$

то по следствию из теоремы 5.3 [1] имеем, что

$$\int_{\gamma} \rho(x) ds_x \geq \int_{f \circ \gamma} \rho^*(y) (1+|y|^2)^{1/s} \frac{ds}{1+|y|^2} = \int_{f \circ \gamma} \rho^*(y) ds_y \geq 1. \quad (5)$$

Из того, что $\rho^* \wedge f\Gamma$ и выполнено (5), следует, что $\rho \wedge \Gamma_0$ для $\forall \gamma \in \Gamma_0$.

Оценим теперь сверху модуль порядка n семейства Γ .

Так как $J(x, f) \neq 0$ почти всюду в D , тогда

$$\begin{aligned} M_n(\Gamma_0) &= M_n(\Gamma) \leq \int_{\mathbb{R}^n} \rho^n(x) d\sigma_x = \\ &= \int_A [\rho^*(f(x))]^n |J(x, f)|^{\frac{s-1}{s}} \frac{(1+|x|^2)^n}{(1+|y|^2)^{n(s-1)/s}} \cdot \frac{L^n(x, f)}{|J(x, f)|^{(s-1)/s}} d\sigma_x. \end{aligned}$$

Применяя неравенство Гельдера с показателями $p = s/(s-1)$ и $q = 1/s$, получаем

$$M_n(\Gamma) \leq \left(\underbrace{\int_A \rho^*(f(x))^{\frac{ns}{s-1}} \frac{|J(x, f)| dx}{(1+|y|^2)^n}}_{I_1} \right)^{\frac{s-1}{s}} \left(\underbrace{\int_A \left(\frac{L^n(x, f)}{|J(x, f)|} \right)^s |J(x, f)| d\sigma_x}_{I_2} \right)^{\frac{1}{s}}. \quad (6)$$

Для того чтобы оценить первый интеграл из правой части неравенства (6), используем теорему о замене переменных [10]. Тогда

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} [\rho^*(y)]^{\frac{ns}{s-1}} N(y, f, A \cap D) \frac{dy}{(1+|y|^2)^n} \leq \\ &\leq N(f, A) \int_{\mathbb{R}^n} [\rho^*(y)]^{\frac{ns}{s-1}} d\sigma_y \leq N(f, A) \cdot M_{ns/(s-1)}(f\Gamma). \end{aligned} \quad (7)$$

Оценим второй интеграл из правой части неравенства (6). В силу (2) имеем

$$I_2 = \int_A \left(\frac{L^n(x, f)}{|J(x, f)|} \right)^s |J(x, f)| d\sigma_x = \int_A K_O^s(x, f) |J(x, f)| d\sigma_x \leq K_{O,S}^*{}^s. \quad (8)$$

Объединяя оценки (6) – (8), видим, что

$$M_n(\Gamma) \leq N^{(s-1)/s}(f, A) \cdot \Phi_{O,S}^{*1/s}(A) \cdot M_{ns/(s-1)}^{(s-1)/s}(f\Gamma), \quad (9)$$

где

$$\Phi_{O,S}^*(A) = \int_A K_O^s(x, f) |J(x, f)| d\sigma_x.$$

Окончательно получаем неравенство

$$M_n^s(\Gamma) \leq N^{s-1}(f, A) \cdot \Phi_{O,S}^*(A) \cdot M_{ns/(s-1)}^{s-1}(f\Gamma),$$

которое и доказывает нашу теорему.

Определение 2. Пусть X, Y – два произвольных топологических пространства, $f: X \rightarrow Y$ – непрерывное отображение. Точка $a \in X$ называется точкой ветвления отображения f , если f не является топологическим ни в какой окрестности точки a . Совокупность точек ветвления обозначим B_f [4].

Пусть $\Gamma \subset D$ – семейство кривых, $f: D \rightarrow D'$ – открытое, непрерывное, изолированное отображение, $G \subseteq D$ – нормальная область. Образ семейства кривых при отображении f обозначим $\Gamma^* = f\Gamma$. Можем считать [1], что все кривые $\gamma^* \in \Gamma^*$ спрямляемы. Поэтому на γ^* в качестве параметра можно выбрать длину ее дуги s^* . Пусть $\gamma^* = f(\gamma(t))$. Функция $s^*(t)$ строго монотонна и непрерывна. Следовательно, существует $t(s^*)$ – обратная функция, тоже монотонная и непрерывная. Поэтому на γ^* можно ввести параметр s^* . Далее будем считать, что все кривые из Γ и Γ^* параметризованы таким образом.

Пусть f – отображение с $K_{I,S}^*$ -усредненной характеристикой, $f \in \tilde{W}_{n,loc}^1(D)$. Говорят, что $G \subseteq D$ – нормальная область, если $f(\partial G) = \partial f(G)$. Пусть $x \in G$, $f(G) = G^*$, $y \in f(G) \setminus f(B_f \cap G)$, $f^{-1}(y) = \{x_j\}$. Тогда, согласно [6], существуют $V_j = G(x_j, f, r)$ – окрестности точек x_j , такие, что $f|_{V_j}$ – гомеоморфизм. Поэтому можно рассматривать отображения $h_i: B^n(y, r) \rightarrow G$, причем $f \circ h_i$ – тождественное отображение. Если $h_i \in W_{n,loc}^1(B^n(y, r))$ и f – отображение с $K_{I,S}^*$ -усредненной характеристикой, то h_i – квазиконформное в среднем отображение в $B^n(y, r)$, где $B^n(y, r)$ шар с центром в точке y и радиусом r .

Теорема 2. Пусть $D \subset \mathbf{R}^n$ – ограниченная область, $D' \subset \mathbf{R}^n$ – область. Пусть $f: D \rightarrow D'$ – отображение с $K_{I,S}^*$ -усредненной характеристикой, $s > (n-1)^{-1}$. Пусть $G \subset D$ – борелевское множество, такое, что $N(f, G) < \infty$. Тогда существует ограниченная, неотрицательная, аддитивная, абсолютно непрерывная функция $\Phi_{I,S}^*$ борелевских множеств в D , такая, что для любого семейства кривых $\Gamma \subset G$ выполнено неравенство

$$M_n^s(\Gamma) \geq c^{-ns}(D, R) \cdot \Phi_{I,S}^{*-1}(G) \cdot M_{ns/(s+1)}^{s+1}(f\Gamma),$$

где $c(D, R)$ – константа, зависящая от области D .

Доказательство. Пусть $\Gamma \subset D$ – семейство кривых, $G \subseteq D$ открытое множество, такое, что $\gamma \in G$ для $\forall \gamma \in \Gamma$. Пусть $\rho \wedge \Gamma$. Можно считать, что $\int_D \rho^n(x) d\sigma_x < \infty$.

Согласно [6], если $y \in f(G) \setminus f(B_f)$ и $f^{-1}(y) = \{x_j\}$, то существуют V_j – окрестности точек $x_j \in G$, такие, что отображения $f_j = f|_{V_j}$ – гомеоморфны. Отображения $h_j = f_j^{-1}$ дифференцируемы почти всюду и $\|h_j\|_y = l^{-1}(x_j, f)$, где $\|h_j\|_y = \sup_{|\omega| \leq 1} h_j(y)\omega$.

Множество E точек $y \in f(G) \setminus f(B_f)$, в которых хотя бы одно из h_j не дифференцируемо, содержится в борелевском множестве E_0 , мера Лебега которого $m_n(E_0) = 0$ [12].

Возьмем теперь шар $B(0, R)$ с центром в точке $x = 0$ и радиусом $0 < R < \infty$, такой, что $\overline{D} \subset B(0, R)$. Обозначим через $d(B) < \infty$ диаметр шара $B(0, R)$. Тогда для $\forall x \in \overline{D}$ выполнено $|x| \leq d(B)$. Следовательно, величина $(1 + |x|^2)^{(n-\alpha)/\alpha} \leq (d^2(B) + 1)^{(n-\alpha)/\alpha} = c(D, R)$ ограничена и имеет место следующая оценка:

$$1/(1 + |x|^2)^{(n-\alpha)/\alpha} \geq 1/c(D, R), \quad (10)$$

где α такое, что $(n - \alpha)/\alpha \geq 0$.

Функцию $\rho^*(y)$ на множестве $f(G)$ наведем следующим образом:

$$\rho^*(y) = \begin{cases} c(D, R) \max_j \frac{\rho(x_j)}{l(x_j, f)} \cdot N^{1/\alpha}(y, f) \cdot \left(\frac{1 + |y|^2}{1 + |x|^2} \right)^{n/\alpha}, & y \in f(G) \setminus f(B_f); \\ \infty, & y \in E_0 \cup f(B_f); \\ 0, & y \notin f(G). \end{cases}$$

Функция ρ^* измерима по Борелю. Покажем, что ρ^* является допустимой для семейства кривых Γ_* .

Пусть $\gamma \in \Gamma$ и E – максимальный элемент на $[0; l]$, где $l = s(\gamma^*)$ и кривая $\gamma = \gamma|_E \subset G$. Пусть $\Gamma = \{\gamma\}$ и $\Gamma_* = f(\Gamma)$. По лемме 1 [9] кривые γ абсолютно непрерывны для почти всех кривых γ^* .

Получим теперь для функции ρ^* оценку снизу. Имеем

$$\begin{aligned} \int_{\gamma^*} \rho^*(y) ds_y^* &= \int_{\gamma^*} \max_j \frac{\rho(x_j)}{l(x_j, f)} c(D, R) N^{1/\alpha}(y, f) \left(\frac{1 + |y|^2}{1 + |x|^2} \right)^{n/\alpha} \frac{ds^*}{1 + |y|^2} \geq \\ &\geq c(D, R) \int_{\gamma^*} \max_j \frac{\rho(x_j)}{l(x_j, f)} \left(\frac{1 + |y|^2}{1 + |x|^2} \right)^{(n-\alpha)/\alpha} \frac{ds^*}{1 + |x|^2}. \end{aligned}$$

Так как область D ограничена, то в силу (10) получаем, что

$$\int_{\gamma^*} \rho^*(y) ds_y^* \geq \int_{\gamma^*} \max_j \frac{\rho(x_j)}{l(x_j, f)} (1 + |y|^2)^{(n-\alpha)/\alpha} \frac{ds^*}{1 + |x|^2}.$$

Учитывая, что величина $1 + |y|^2 \geq 1$, имеем

$$\int_{\gamma^*} \rho^*(y) \geq \int_{\gamma^*} \max_j \frac{\rho(x_j)}{l(x_j, f)} \cdot \frac{ds^*}{1 + |x|^2}.$$

Так как в каждой точке x_j пересекается ровно m_j кривых из Γ , тогда

$$\int_{\gamma^*} \rho^*(y) \geq \int_{\gamma^*} \frac{\rho(\gamma(s))}{l(\gamma(s))} \cdot \frac{ds^*}{1+|x|^2}.$$

Если на γ выбрать в качестве параметра ее длину $s \in [0; b]$, $b < 1$, тогда по [13] $ds/ds^* = |\gamma'(s^*)|$. Отсюда, после замены переменных, получаем

$$\int_{\gamma^*} \rho^*(y) \geq \int_{\gamma} \rho(\gamma(s)) \frac{ds}{1+|x|^2} = \int_{\gamma} \rho(\gamma(s)) ds_x \geq 1.$$

Таким образом, $\rho_* \wedge \Gamma_*$.

Перейдем теперь к оценке модуля семейства $f\Gamma$.

$$M_\alpha(f\Gamma) \leq \int_{f(G)} [\rho^*(y)]^\alpha d\sigma_y = \int_{f(G)} [\rho^*(y)]^\alpha \frac{dy}{(1+|y|^2)^n}.$$

Из определения функции $\rho^*(y)$, получаем, что

$$M_\alpha(f\Gamma) = c^\alpha(D, R) \int_{f(G)} \max_j \frac{\rho^\alpha(x_j)}{l^\alpha(x_j, f)} \cdot \frac{1}{(1+|x|^2)^n} N(y, f) dy.$$

Далее, после замены переменных, согласно [10],

$$M_\alpha(f\Gamma) = c^\alpha(D, R) \int_G \max_j \frac{\rho^\alpha(x_j)}{l^\alpha(x_j, f)} |J(x, f)| \frac{dx}{(1+|x|^2)^n}$$

и использования теоремы 3 из [14], наше неравенство примет следующий вид:

$$M_\alpha(f\Gamma) \leq c^\alpha(D, R) \int_G \rho^\alpha(x) \frac{|J(x, f)|}{l^\alpha(x, f)} d\sigma_x. \quad (11)$$

Применяя к интегралу в правой части (11) неравенство Гельдера с показателями $p = ns/(ns-\alpha)$ и $q = ns/\alpha$, а также в силу (1), получаем, что

$$M_\alpha(f\Gamma) \leq c^\alpha(D, R) \left(\int_G \rho^{\frac{\alpha sn}{ns-\alpha}} d\sigma_x \right)^{\frac{ns-\alpha}{ns}} \left(\int_G K_I^s(x, f) |J(x, f)|^{\frac{sn-s\alpha}{\alpha}} d\sigma_x \right)^{\frac{\alpha}{ns}}. \quad (12)$$

Для $\alpha = ns/(s+1)$ имеем

$$M_{\frac{ns}{s+1}}(f\Gamma) \leq c^{\frac{ns}{s+1}}(D, R) \left(\int_G \rho^n(x) d\sigma_x \right)^{\frac{s}{s+1}} \left(\int_G K_I^s(x, f) |J(x, f)| d\sigma_x \right)^{\frac{1}{s+1}}.$$

Отсюда, ввиду произвола при выборе функции $\rho(x)$, получаем неравенство, которое доказывает нашу теорему:

$$M_n^{s/(s+1)}(\Gamma) \geq c^{\frac{-ns}{s+1}}(D, R) \cdot \Phi_{I, S}^{*, \frac{-1}{s+1}}(G) \cdot M_{\frac{ns}{s+1}}(f\Gamma), \quad (13)$$

где

$$\Phi_{I, S}^*(G) = \int_G K_I^s(x, f) |J(x, f)| d\sigma_x.$$

Или, возведя обе части (13) в степень $s+1$, окончательно получаем

$$M_n^s(\Gamma) \geq c^{-ns}(D, R) \cdot \Phi_{I,S}^*{}^{-1}(G) \cdot M_{ns/(s+1)}^{s+1}(f\Gamma).$$

Теорема доказана.

Теоремы 1 и 2 дают нам следующие следствия.

Следствие 1. Пусть $D \subset \mathbf{R}^n$ – ограниченная область, $D' \subset \mathbf{R}^n$ – область. Пусть $f: D \rightarrow D'$ – отображение с $K_{O,S}$ - и $K_{I,S}$ -усредненными характеристиками, $s > 1$. Пусть $G \subset D$ – борелевское множество, такое, что $N(f, G) < \infty$. Тогда существуют ограниченные, неотрицательные, аддитивные, абсолютно непрерывные функции $\Phi_{O,S}^*$ и $\Phi_{I,S}^*$ борелевских множеств в D , такие, что для любого семейства кривых $\Gamma \subset G$ выполнено неравенство

$$c^{-ns}(D, R) \cdot \Phi_{I,S}^*{}^{-1} \cdot M_{\frac{ns}{s+1}}^{s+1}(f\Gamma) \leq M_n^s(\Gamma) \leq N^{s-1}(f, G) \cdot \Phi_{O,S}^* \cdot M_{\frac{ns}{s-1}}^{s-1}(f\Gamma).$$

Следствие 2. Пусть $D \subset \mathbf{R}^n$ – ограниченная область, $D' \subset \mathbf{R}^n$ – область. Пусть $f: D \rightarrow D'$ – отображение с $K_{O,S}$ - и $K_{I,S}$ -усредненными характеристиками, $s > 1$. Пусть $G \subset D$ – борелевское множество, такое, что $N(f, G) < \infty$. Тогда для любого семейства кривых $\Gamma \subset G$

$$c^{-ns}(D, R) \cdot K_{I,S}^{*-s} \cdot M_{\frac{ns}{s+1}}^{s+1}(f\Gamma) \leq M_n^s(\Gamma) \leq N^{s-1}(f, G) \cdot K_{O,S}^s \cdot M_{\frac{ns}{s-1}}^{s-1}(f\Gamma).$$

Определение 3. Пусть $f: D \rightarrow D'$ – открытое, непрерывное, изолированное отображение. Если γ^* – кривая в $f(D)$, то поднятием (см. [6]) γ^* в D называется кривая $\gamma \in D$, такая, что $f \circ \gamma = \gamma^*$. Дуга кривой γ – это сужение отображения γ на отрезок, содержащийся в $[0, 1]$. Частичным поднятием γ^* назовем поднятие ее дуги. Два частичных поднятия γ_1 и γ_2 кривой γ называются существенно различными, если $H_1(\gamma_1 \cap \gamma_2) = 0$, где $H_1(s)$ – одномерная мера Хаусдорфа множества s .

Теорема 3. Пусть $D \subset \mathbf{R}^n$ – нормальная область, $D' \subset \mathbf{R}^n$ – область. Пусть $f: D \rightarrow D'$ отображение с $K_{O,S}$ - и $K_{I,S}$ -усредненными характеристиками, $s > n-1$. Пусть $\Gamma \subset D$ – семейство кривых, причем любая кривая $\gamma^* \in f\Gamma$ имеет, по крайней мере, m существенно различных поднятий, принадлежащих Γ . Тогда справедливы неравенства:

$$M_n^s(f\Gamma) \leq K_{I,S}^s \cdot M_{n\beta}^{s/\beta}(\Gamma), \quad M_n^s(f\Gamma) \leq K_{O,S}^s \cdot M_{n\beta}^{s/\beta}(\Gamma),$$

где $\beta = s/(s-1)$.

Доказательство. Пусть $D_i \subseteq D$ – семейство множеств, таких, что $D_i \subseteq D_{i+1}$ и $\bigcup_i D_i = D$. Возьмем функцию $\rho \wedge \Gamma$. Можно считать, что $\int_D \rho^n(x) d\sigma_x < \infty$. Тогда $\int_{D \setminus D_i} \rho^n(x) d\sigma_x \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$. Согласно [6], если $y \in f(D_i) \setminus f(B_f)$ и $f^{-1}(y) = \{x_j\}$,

то существуют $V_j = D(x_j, f, r)$ – окрестности точек $x_j \in D_i$, такие, что отображения $f_j = f|_{V_j}$ гомеоморфны, $h_j = f_j^{-1}$ дифференцируемы почти всюду и множество E точек $y \in f(D_i) \setminus f(B_f)$, в которых хотя бы одно из h_j не дифференцируемо, содержится в борелевском множестве E_0 , причем $m_n(E_0) = 0$ [12].

Обозначим через $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}$, ($a_{1j} \geq a_{nj} > 0$) полуоси эллипсоида, главную часть которого в точке x_j отображение f_j преобразует в шар радиуса r . При этом

минимальное искажение одномерных мер в точке x_j отображения f_j есть $\mu_j(x_j) = r/a_{1j}$ и имеет место следующая оценка:

$$J(x_j, f_j) = \frac{r^n}{a_{1j} \dots a_{nj}} = \left(\frac{r}{a_{1j}} \right)^n \cdot \frac{a_{1j}^{n-1}}{a_{2j} \dots a_{nj}} \leq \mu_j^n(x_j) \left(\frac{a_{1j}}{a_{nj}} \right)^{n-1} \leq k^{n-1}(x_j, f_j) \cdot \mu_j^n(x_j), \quad (14)$$

где

$$k(x_j, f_j) = \frac{\max_{|h|=1} |f_j'(x_j)h|}{\min_{|h|=1} |f_j'(x_j)h|}.$$

Определим теперь на $f(D)$ функцию $\rho_i^*(y)$ следующим образом:

$$\rho_i^*(y) = \begin{cases} \max_j \frac{\rho(x_j)}{\mu_j(x_j, f)} \cdot N^n(y, f) \cdot \frac{1+|y|^2}{1+|x|^2}, & y \in f(D_i) \setminus (E_0 \cup f(B_f)); \\ \infty, & y \in E_0 \cup f(B_f); \\ 0, & y \notin f(D_i). \end{cases}$$

Функция $\rho_i^*(y)$ измерима по Борелю. Пусть $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ – заранее фиксированные существенно различные поднятия кривой γ^* , а q_i – максимальный интервал на $[0, s^*]$, такой, что все кривые $\gamma_i = \gamma|_{q_i}$ лежат в D_i . Согласно лемме 1 [9], кривые γ_i абсолютно непрерывны для почти всех кривых $\gamma_* = \gamma|_{q_i}$. Если на γ_i выбрать в качестве параметра ее длину $s \in [0, l]$, где l – длина γ , тогда $ds/ds^* = |\gamma_i'(s^*)|$ [13] и, если ds, ds^* – элементы одномерных мер для кривых γ_i и γ^* , тогда по теореме 5.3 из [1]

$$ds^* \geq \mu(\gamma_i) ds. \quad (15)$$

Покажем, что функция $\rho_i^*(y) \wedge f\Gamma$.

По определению функции $\rho_i^*(y)$

$$\int_{\gamma_*^i} \rho_i^*(y) ds_y^* = \int_{\gamma_*^i} \rho_i^*(y) \frac{ds^*}{1+|y|^2} = \int_{\gamma_*^i} \max_j \frac{\rho(x_j)}{\mu_j(x_j, f)} \cdot N^n(y, f) \cdot \frac{ds^*}{1+|x|^2},$$

и в силу (15)

$$\int_{\gamma_*^i} \rho_i^*(y) ds_y^* \geq \int_{\gamma_i} \max_j \frac{\rho(\gamma_i)}{\mu(\gamma_i)} \cdot \frac{\mu(\gamma_i) ds}{1+|x|^2} \geq \int_{\gamma_i} \rho(\gamma(s)) \cdot \frac{ds}{1+|x|^2} = \int_{\gamma_i} \rho(\gamma(s)) ds_x.$$

Ясно, что $\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\gamma_i} \rho(\gamma(s)) ds_x \geq 1$. Следовательно, $\rho_i^*(y) \wedge f\Gamma$.

Далее оценим модуль:

$$M_n(f\Gamma) \leq \int_{f(D)} [\rho_i^*(y)]^n d\sigma_y = \int_{f(D)} [\rho_i^*(y)]^n \frac{dy}{(1+|y|^2)^n}.$$

По определению функции $\rho_j^*(y)$

$$M_n(f\Gamma) \leq \int_{f(D)} \left[\max_j \frac{\rho(x_j)}{\mu_j(x_j, f)} \right]^n \cdot \frac{1}{(1+|x|^2)^n} N(y, f) dy,$$

и после очевидной оценки

$$M_n(f\Gamma) \leq \int_{f(D)} \frac{\left[\max_j \rho(x_j) \right]^n}{\left[\min_j \mu_j(x_j, f) \right]^n} \cdot \frac{1}{(1+|x|^2)^n} N(y, f) dy,$$

а также в силу (14) и (4), получаем, что

$$M_n(f\Gamma) \leq \int_{f(D)} \frac{[\rho(x)]^n k^{n-1}(x, f)}{(1+|x|^2)^n |J(x, f)|} \cdot N(y, f) dy.$$

После замены переменных имеем

$$M_n(f\Gamma) \leq \int_{D_i} \rho^n(x) K^{n-1}(x, f) d\sigma_x.$$

В силу неравенства (3), связывающего характеристики отображения f , получаем, что

$$M_n(f\Gamma) \leq \int_{D_i} \rho^n(x) K_I(x, f) d\sigma_x \quad (16)$$

или

$$M_n(f\Gamma) \leq \int_{D_i} \rho^n(x) K_O(x, f) d\sigma_x. \quad (17)$$

Применяя теперь к интегралам в правых частях (16), (17) неравенство Гельдера с показателями $p = \beta$ и $q = s$, где $\beta = s/(s-1)$, получаем оценку искажения модуля образа семейства кривых при отображении f :

$$M_n(f\Gamma) \leq \left(\int_{D_i} \rho^{n\beta}(x) d\sigma_x \right)^{1/\beta} \left(\int_{D_i} K_I^s(x, f) d\sigma_x \right)^{1/s}$$

и

$$M_n(f\Gamma) \leq \left(\int_{D_i} \rho^{n\beta}(x) d\sigma_x \right)^{1/\beta} \left(\int_{D_i} K_O^s(x, f) d\sigma_x \right)^{1/s}.$$

Отсюда, по определению отображения f , имеем

$$M_n(f\Gamma) \leq \int_{f(D)} [\rho^*(y)]^n d\sigma_y \leq K_{I,S} \cdot \left(\int_{D_i} \rho^{n\beta}(x) d\sigma_x \right)^{1/\beta}; \quad (18)$$

$$M_n(f\Gamma) \leq \int_{f(D)} [\rho^*(y)]^n d\sigma_y \leq K_{O,S} \cdot \left(\int_{D_i} \rho^{n\beta}(x) d\sigma_x \right)^{1/\beta}. \quad (19)$$

Для завершения доказательства воспользуемся рассуждениями из [6] при доказательстве теоремы 1.1.

Используя свойство аддитивности интеграла, получаем

$$\int_{f(D)} |\rho_i^* - \rho_j^*|^{n\beta} d\sigma_y \leq \int_{f(D_i)} |\rho_i^* - \rho_j^*|^{n\beta} d\sigma_y + \int_{f(D_i \setminus D_j)} |\rho_i^*|^{n\beta} d\sigma_y = \int_{f(D_i \setminus D_j)} |\rho_i^*|^{n\beta} d\sigma_y.$$

Далее, в силу (18), видим, что для интеграла в правой части последнего неравенства, выполняется

$$\int_{f(D_i \setminus D_j)} |\rho_i^*|^{n\beta} d\sigma_y \leq K_{I,S} \cdot \left(\int_{D_i \setminus D_j} \rho^{n\beta^2}(x) d\sigma_x \right)^{1/\beta^2}.$$

Следовательно,

$$\int_{f(D)} |\rho_i^* - \rho_j^*|^{n\beta} d\sigma_y \leq K_{I,S} \cdot \left(\int_{D_i \setminus D_j} \rho^{n\beta^2}(x) d\sigma_x \right)^{1/\beta^2}. \quad (20)$$

Применяя к интегралу в правой части (20) неравенство Гельдера с показателями $p = 1/\beta^2$ и $q = 1/(1-\beta^2)$, получаем

$$\int_{f(D)} |\rho_i^* - \rho_j^*|^{n\beta} d\sigma_y \leq K_{I,S} \cdot \left(\int_{D_i \setminus D_j} \rho^n(x) d\sigma_x \right) \cdot \left(\int_{D_i \setminus D_j} d\sigma_x \right)^{1-\beta^2}. \quad (21)$$

Так как оба интеграла в правой части (21) стремятся к нулю при $i, j \rightarrow \infty$, в силу выбора D_i, D_j , тогда

$$\lim_{i,j \rightarrow \infty} \int_{f(D)} |\rho_i^* - \rho_j^*|^{n\beta} d\sigma_y = 0.$$

Поэтому существует функция $\rho^*(y)$, такая, что $\int_{f(D)} |\rho_i^* - \rho^*|^{n\beta} d\sigma_y \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$. Тогда для почти всех кривых из Γ^* имеем $\int_{\gamma^*} |\rho_i^* - \rho^*| ds_y^* \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$ и, следовательно,

$\int_{\gamma^*} \rho^* ds_y^* \geq 1$. Если выбросить из Γ^* все кривые γ^* , для которых

$\int_{\gamma^*} \rho^* ds_y^* \leq 1$ и обозначить оставшееся семейство кривых через $\bar{\Gamma}^*$, то

$$M_{n\beta}^{1/\beta}(\bar{\Gamma}^*) = M_{n\beta}^{1/\beta}(\Gamma^*)$$

и, следовательно,

$$M_n(\bar{\Gamma}^*) \leq K_{I,S} \cdot \left(\int_D \rho^{n\beta}(x) d\sigma_x \right)^{1/\beta}. \quad (22)$$

Проводя аналогичные рассуждения для (19), получаем

$$M_n(\bar{\Gamma}^*) \leq K_{O,S} \cdot \left(\int_D \rho^{n\beta}(x) d\sigma_x \right)^{1/\beta}. \quad (23)$$

Окончательно, по определению модуля семейства кривых при отображении f и после возведения обеих частей (22) и (23) в степень s , для $s > n-1$ получаем утверждение нашей теоремы:

$$M_n^s(f\Gamma) \leq K_{I,S}^s \cdot M_{n\beta}^{s/\beta}(\Gamma),$$

$$M_n^s(f\Gamma) \leq K_{O,S}^s \cdot M_{n\beta}^{s/\beta}(\Gamma),$$

где $\beta = s/(s-1)$.

Теорема доказана.

Результаты, полученные в теоремах 1 – 3, позволяют установить эквивалентность геометрического и аналитического определений для отображений с s -усредненной характеристикой, а также соотношения исследуемых отображений с другими классами отображений, например с классом отображений с ограниченным интегралом Дирихле и др.

ЛИТЕРАТУРА

1. Väisälä J. Lectures on n -dimensional quasiconformal mappings // Lectures and Notes in Math. Berlin – Heidelberg – N.Y.: Springer Verlag, 1971. 144 p.
2. Шабат Б.В. Метод модулей в пространстве // ДАН СССР. 1960. Т. 130. № 6. С. 1210 – 1215.
3. Сычев А.В. Модули и пространственные квазиконформные отображения. Новосибирск: Наука, 1983. 152 с.
4. Martio O., Rickman S., Väisälä J. Definitions for quasiregular mappings // Ans. Acad. Sci. Fenn. 1969. No. 448.
5. Решетняк Ю.Г. Пространственные отображения с ограниченным искажением. Новосибирск: Наука, 1982.
6. Полецкий Е.А. Метод модулей для негомеоморфных квазиконформных отображений // Мат. сборник. 1970. Т. 83(125). № 2(10). С. 261 – 273.
7. Стругов Ю.Ф. Отображения, квазиконформные в среднем. Новосибирск, 1979. 39 с. (Препринт АН СССР, Сиб. отд. Ин-т математики).
8. Кругликов В.И., Пайков В.И. Некоторые геометрические свойства отображений с искажением, ограниченным в среднем. Донецк: Донецк ун-т, 1982. 43с. (Деп. в ВИНТИ 06.09.82 № 4747-82 Деп).
9. Малютина А.Н., Кривошеева И.И., Баталова Н.Н. Искажение сферического модуля семейства кривых // Исследования по математическому анализу и алгебре. Вып. 3. Томск: Изд. ТГУ, 2001. С. 179 – 195.
10. Rado T., Reichelderfer R.V. Continuous transformation in analysis. Berlin – Göttingen – Heidelberg: Springer Verlag, 1955. 442 p.
11. Малютина А.Н., Елизарова М.А. Теоремы о полунепрерывности снизу отображений с s -усредненной характеристикой // Вестник ТГУ. Математика и механика. 2009. № 4(8). С. 46 – 52.
12. Чернавский А.В. Конечнократные открытые отображения многообразий // Мат. сборник. 1964. Т. 65. № 3. С. 357 – 369.
13. Сакс С. Теория интеграла. М.: ИЛ, 1949.
14. Гольдштейн В.М., Водопьянов С.И. Метрическое пополнение области при помощи конформной емкости, инвариантное при квазиконформных отображениях // ДАН СССР. 1978. Т. 238. № 5. С. 1040 – 1042.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

МАЛЮТИНА Александра Николаевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций и лаборатории математического анализа механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: NDM@main.tusur.ru

ЕЛИЗАРОВА Мария Александровна – аспирантка кафедры теории функций механико-математического факультета Томского государственного университета, лаборатория математического анализа. E-mail: elizarova_m@sibmail.com

Статья принята в печать 06.05.2010 г.