УДК 519.6

О.П. Федорова, О.В. Кулиш

О ЗАДАНИИ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ УСЛОВИЙ В МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ СПЛАЙНА, СОХРАНЯЮЩЕГО ИНТЕГРАЛ ФУНКЦИИ ПО ОБЛАСТИ ЕЕ ЗАДАНИЯ

В настоящей работе исследуются способы задания дополнительных условий, необходимых при вычислении коэффициентов сплайна, аппроксимирующего функцию одного переменного, так что интеграл сплайна по области задания совпадает с соответствующим интегралом функции.

Ключевые слова: *аппроксимация сплайнами, приближение функции одной переменной, оценивание погрешности приближения.*

Пусть задана функция $f(x)$, $x \in D \subset R^k$, такая, что существует конечный интеграл от функции по области D

$$\left|\int\limits_D f(x)\,dx\right| < M .$$

Приблизим функцию сплайнами так, чтобы значения определенного интеграла по области задания приближаемой функции и сплайна совпадали. Рассмотрим функцию одной переменной. Для построения сплайна будем использовать аппроксимацию сплайнами дефекта 1 [1, 2].

На сетке $\Delta: -\infty < x_{-m} < \ldots < x_0 < x_1 < \ldots < x_n < x_{n+1} < \ldots < x_{n+m} < \infty$ сплайн $S(x)$ степени m на отрезке $[x_0; x_n]$ выражается линейной комбинацией нормализованных базисных B сплайнов

$$S(x) = \sum_i z_i(f) B_i(x), \tag{1}$$

где $z_i(f)$ – последовательность линейных функционалов, способ задания которых определяет вид приближения. Выберем $z_i(f)$ так, чтобы значения определенного интеграла по области задания приближаемой функции и сплайна были равными [1].

На промежутке $[x_i; x_{i+1}]$ кубический сплайн $S(x)$ дефекта 1 (1) запишется в виде

$$S(x) = \sum_{p=i-1}^{i+2} z_p B_p(x). \tag{2}$$

Для определения n+3 коэффициентов z_i сплайна (2) имеется n условий, которые обеспечивают выбор коэффициентов так, что интегралы от функции и сплайна по области D совпадают и выражаются системой

$$a_i z_{i-1} + b_i z_i + c_i z_{i+1} + d_i z_{i+2} = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx, \quad i = \overline{0, n-1}. \tag{3}$$

Здесь $a_i = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} B_{i-1}(x)\,dx$, $b_i = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} B_i(x)\,dx$, $c_i = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} B_{i+1}(x)\,dx$, $d_i = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} B_{i+2}(x)\,dx$.

Для разрешения системы (3) относительно коэффициентов сплайна необходимо задать дополнительные условия, которые можно задать различными способами, исходя из знаний о свойствах приближаемой функции $f(x)$. Если $f(x)$ – плотность некоторого распределения, о котором заранее известно, что оно является симметричным относительно нуля, то можно положить в качестве дополнительного условия следующее:

$$\int_D x \cdot S(x)dx = 0 .$$

Заметим, что для кусочно-непрерывной функции, принимающей ненулевые значения на конечной области, существуют моменты любого порядка. Можно также потребовать, чтобы сплайн был интерполирующим для функции $f(x)$ или значения производной сплайна и функции совпадали в каких-либо точках.

В настоящей работе рассматриваются дополнительные условия, заключающиеся в том, что совпадают значения сплайна или его первой, или второй производной и соответственно значения функции или ее первой, или второй производной в трех точках из шести: x_0, x_1, x_2, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n:

$$\sum_{p=-1}^{1} z_{p+k} B_p^{(r)}(x_k) = f^{(r)}(x_k), \quad k = 0,\, 1,\, 2,\, n-2,\, n-1,\, n; \quad r = 0,\, 1,\, 2. \tag{4}$$

Система (3) с дополнительными условиями (4) имеет четырехдиагональную матрицу коэффициентов, решение которой будем искать методом прогонки в виде [1]

$$z_i = W_i z_{i+1} + Q_i z_{i+2} + R_i .$$

Здесь $W_i = -\dfrac{c_i + Q_{i-1} \cdot a_i}{b_i + W_{i-1} \cdot a_i}$, $Q_i = -\dfrac{d_i}{b_i + W_{i-1} \cdot a_i}$, $R_i = \dfrac{p_i - R_{i-1} \cdot a_i}{b_i + W_{i-1} \cdot a_i}$, $i = \overline{0, n-1}$.

Некоторые способы задания граничных условий

1. Дополнительные условия задаются в точках x_0, x_{n-1}, x_n или в x_1, x_{n-1}, x_n. Если дополнительное условие задается в точке x_0, то уравнение, которое может быть использовано для вычисления коэффициентов сплайна, имеет вид

$$\sum_{p=-1}^{1} z_p B_p^{(r)}(x_0) = f^{(r)}(x_0) . \tag{5}$$

Из (5) получим для прогоночных коэффициентов следующие выражения:

$$W_{-1} = -B_0^{(r)}(x_0) / B_{-1}^{(r)}(x_0), \; Q_{-1} = -B_1^{(r)}(x_0) / B_{-1}^{(r)}(x_0),$$

$$R_{-1} = f^{(r)}(x_0) / B_{-1}^{(r)}(x_0) .$$

Если же дополнительное условие задано в точке x_1, то коэффициенты прогонки при $i = -1$ при $r \neq 1$ определим из решения системы:

$$\begin{cases} \sum_{p=-1}^{1} z_{p+1} B_p^{(r)}(x_1) = f^{(r)}(x_1), \\ a_0 z_{-1} + b_0 z_0 + c_0 z_1 + d_0 z_2 = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx. \end{cases} \tag{6}$$

Разрешаем систему (6):

$$a_0 R_{-1} = \int\limits_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx - d_0 f^{(r)}(x_1) / B_1^{(r)}(x_1)\,,$$

$$a_0 W_{-1} = d_0 B_{-1}^{(r)}(x_1) / B_1^{(r)}(x_1) - b_0\,,$$

$$a_0 Q_{-1} = d_0 B_0^{(r)}(x_1) / B_1^{(r)}(x_1) - c_0\,.$$

Из последнего равенства выражаем W_{-1}, Q_{-1} и R_{-1}.

В том и другом случае на правой границе имеем в точках x_{n-1}, x_n систему

$$\sum_{p=n-2}^{n} z_p B_p^{(r)}(x_{n-1}) = f^{(r)}(x_{n-1})\,,$$

$$\sum_{p=n-1}^{n+1} z_p B_p^{(q)}(x_n) = f^{(q)}(x_n)\,. \qquad (7)$$

Здесь $r = 0{,}1, 2$ и $q = 0{,}1, 2$. Заметим, что значение первой производной сплайна $B'_k(x)$ в точке x_k равно нулю и при некоторых сочетаниях значений r и q система (7) является неразрешимой относительно коэффициентов. Положим

$$a_n = B_{n-1}^{(r)}(x_n)\,,\ \ b_n = B_n^{(r)}(x_n)\,,\ \ c_n = B_{n+1}^{(r)}(x_n)\,,\ \ d_n = 0\,.$$

Из первого уравнения системы (7) выражаем коэффициенты W_n, Q_n и R_n.

Для вычисления коэффициентов z_{n-2}, z_{n-1}, z_n, z_{n+1} будем использовать систему

$$z_{n-2} = W_{n-2} z_{n-1} + Q_{n-2} z_n + R_n\,,$$

$$z_{n-1} = W_{n-1} z_n + Q_{n-1} z_{n+1} + R_{n-1}\,,$$

$$z_n = W_n z_{n+1} + R_n\,,$$

$$\sum_{p=n-1}^{n+1} z_p B_p^{(q)}(x_n) = f^{(q)}(x_n)\,. \qquad (8)$$

Разрешаем систему (8), получим выражение для z_{n+1} и определим z_n, z_{n-1}, …, z_0, z_{-1}. Заметим, что значение первой производной сплайна $B_k(x)$ в точке x_k равно нулю и при некоторых сочетаниях r и q система (7) является неразрешимой относительно коэффициентов z_{n-2}, z_{n-1}, z_n, z_{n+1}.

2. Потребуем, чтобы значение сплайна или его первой, или второй производной и соответственно значения функции или ее первой, или второй производной совпадали в трех начальных точках: x_0, x_1, x_2.

Для равномерной сетки $a_i = d_i = h/24$, $c_i = b_i = 11h/24$ введем обозначения $a = h/24$, $b = 11h/24$,

$$\alpha_1 = B_{-1}^{(r)}(x_0),\ \ \beta_1 = B_0^{(r)}(x_0),\ \ \gamma_1 = B_1^{(r)}(x_0),$$

$$\alpha_2 = B_{-1}^{(s)}(x_1),\ \ \beta_2 = B_0^{(s)}(x_1),\ \ \gamma_2 = B_1^{(s)}(x_1),$$

$$\alpha_3 = B_{-1}^{(q)}(x_2),\ \beta_3 = B_0^{(q)}(x_2),\ \ \gamma_3 = B_1^{(q)}(x_2). \qquad (9)$$

В обозначениях (9) для определения коэффициентов z_{-1}, z_0, z_1, z_2, z_3 имеем систему

$$\alpha_1 z_{-1} + \beta_1 z_0 + \gamma_1 z_1 = f^{(r)}(x_0)\,,$$

$$a z_{-1} + b z_0 + b z_1 + a z_2 = p_0,$$

$$a z_0 + b z_1 + b z_2 + a z_3 = p_1,$$

$$\alpha_2 z_0 + \beta_2 z_1 + \gamma_2 z_2 = f^{(s)}(x_1),$$

$$\alpha_3 z_1 + \beta_3 z_2 + \gamma_3 z_3 = f^{(q)}(x_2)\,, \tag{10}$$

где r, s, q – степень производной в точках x_0, x_1, x_2. Для условий интерполирования функции сплайном в точках x_0, x_1, x_2, разрешая систему (10), получим следующие выражения для коэффициентов:

$$z_{-1} = \frac{23}{2} f(x_0) + 16 f(x_1) + \frac{3}{2} f(x_2) - \frac{11}{12} p_0 - \frac{1}{4} p_1\,,$$

$$z_0 = -\frac{2}{3} f(x_0) - 5 f(x_1) - \frac{1}{2} f(x_2) + \frac{1}{4} p_0 + \frac{1}{12} p_1\,,$$

$$z_1 = \frac{1}{2} f(x_0) + 4 f(x_1) + \frac{1}{2} f(x_2) - \frac{1}{12} p_0 - \frac{1}{12} p_1\,,$$

$$z_2 = -\frac{1}{2} f(x_0) - 5 f(x_1) - \frac{3}{2} f(x_2) + \frac{1}{12} p_0 + \frac{1}{4} p_1\,,$$

$$z_3 = \frac{3}{2} f(x_0) + 16 f(x_1) + \frac{23}{2} f(x_2) - \frac{1}{4} p_0 - \frac{11}{12} p_1\,. \tag{11}$$

Далее находятся коэффициенты сплайна по формулам

$$z_{i+2} = \Big(\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - (a z_{i-1} + b z_i + b z_{i+1}) \Big) / a\,,\ i = 1, 2, \ldots, n–1.$$

На рис. 1 сплошной линией показан график плотности вероятности распределения Фишера при степенях свободы 10 и 25 на промежутке [0; 5]. В качестве дополнительных условий задавались значения функции в точках x_0, x_{n-1}, x_n . При числе разбиений 10 шаг дискретизации $h = 0{,}5$, максимальное отклонение значений, вычисляемых по сплайн-функции (показаны заполненными кружками) от точных значений, не превосходит в этом случае 3,5 % при условии, что значения $\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$ вычислялись с высокой точностью (10^{-8}). Квадратами показаны значения сплайна в узловых точках для случая, когда значения интеграла $\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$ вычислялись приближенно по таблице значений функции с использованием метода трапеции. Ошибка составила примерно 9 %. Во всех проведенных численных экспериментах погрешность соответствует оценкам, построенным в [1].

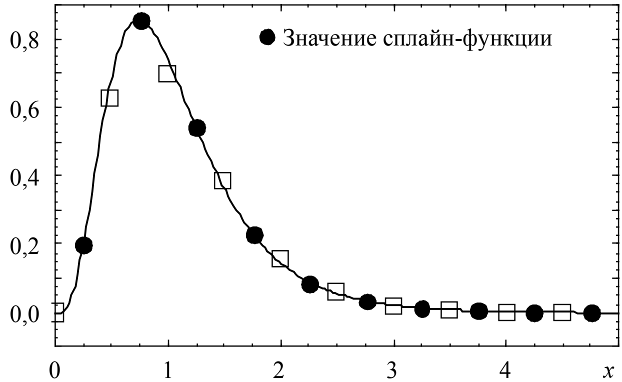

Рис. 1. Распределение Фишера с числами степеней свободы 10 и 25 (сплошная линия) и значения сплайн-функции, построенной по 10 значениям (кружки и квадраты)

Общее решение разностного уравнения

Система уравнений (4) с дополнительными условиями (7) – (10) для случая кубического сплайна есть разностное уравнение третьего порядка с постоянными коэффициентами, общее решение которого z_i , согласно[2], может быть найдено как сумма общего решения однородного уравнения $\overline{z}_i$ (с неоднородными дополнительными условиями) и частного решения неоднородного уравнения z_i^* (с однородными дополнительными условиями): $z_i = \overline{z}_i + z_i^*$ или, согласно [1], $z_i = s_1(-1)^i + s_2\left(-5+2\sqrt{6}\right)^i + s_3\left(-5-2\sqrt{6}\right)^i + z_i^*$. Коэффициенты s_1, s_2, s_3 находятся из дополнительных условий. Если в качестве дополнительных заданы условия совпадения значений функции и сплайна в трех точках x_0, x_1, x_2, то коэффициенты выражаются следующим образом:

$$s_1 = -\frac{3}{8}\cdot(f_0+f_2) - \frac{15}{4}\cdot f_1 \ ,$$

$$s_2 = -\frac{\sqrt{6}}{48}\cdot(11\cdot f_0 + 12\cdot f_1 + f_2) - \frac{1}{144}\cdot(81\cdot f_0 + 90\cdot f_1 + 9\cdot f_2) \ ,$$

$$s_3 = \frac{\sqrt{6}}{48}\cdot(11\cdot f_0 + 12\cdot f_1 + f_2) - \frac{1}{144}\cdot(81\cdot f_0 + 90\cdot f_1 + 9\cdot f_2) \ .$$

Обозначим $u(j) = (-1)^j$, $v(j) = (-5+2\sqrt{6})^j$, $w(j) = (-5-2\sqrt{6})^j$, тогда частное решение неоднородного уравнения с нулевыми значениями в точках x_0, x_1, x_2 для $i = 3, 4, \ldots, n+1$ имеет вид [3]

$$z^*(i) = \sum_{j=0}^{i-3} \frac{\begin{vmatrix} u(j+1) & v(j+1) & w(j+1) \\ u(j+2) & v(j+2) & w(j+2) \\ u(i) & v(i) & w(i) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u(j+1) & u(j+2) & u(j+3) \\ v(j+1) & v(j+2) & v(j+3) \\ w(j+1) & w(j+2) & w(j+3) \end{vmatrix}} \frac{f_{j+1}}{b} \ .$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Федорова О.П.* Об одном подходе к приближению функций сплайнами // Вестник ТГУ. Математика и механика. 2008. № 2(3). С. 61 – 66.
2. *Завьялов Ю.С.*, *Квасов Б.И.*, *Мирошниченко В.Л.* Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.
3. *Самарский А.А.*, *Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 589 с.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

ФЕДОРОВА Ольга Петровна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной математики и компьютерного моделирования механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: opf@math.tsu.ru
КУЛИШ Ольга Валерьевна – студентка механико-математического факультета Томского государственного университета.

Статья принята в печать 08.02.2010 г.