УДК 512.541

А.Р. Чехлов

О НИЛЬГРУППАХ *p*-РАНГА 1[1]

Найдены необходимые и достаточные условия, при которых группы без кручения p-ранга 1 являются нильгруппами.

Ключевые слова: *нильгруппа*, *связная группа*, *p-характеристика*, *p-тип.*

Все рассматриваемые в статье группы – абелевы. Напомним, что функция $\mu\colon A\times A \to A$ называется *умножением* на группе A, если

$$\mu(a,b+c) = \mu(a,b)+\mu(a,c) \text{ и } \mu(b+c,a) = \mu(b,a) + \mu(c,a) \text{ для всех } a,b,c \in A.$$

Всякое кольцо (под кольцом подразумевается не обязательно ассоциативное или коммутативное кольцо, но умножение всегда дистрибутивно с двух сторон относительно сложения) на группе A задает некоторое умножение μ, а именно $\mu(a,b) = ab$, и это соответствие между кольцевыми структурами и умножениями на группе A биективно. Если μ и ν – умножения на группе A, то их *сумма* $\mu+\nu$ определяется по правилу

$$(\mu+\nu)(a,b) = \mu(a,b)+\nu(a,b) \text{ для всех } a,b \in A.$$

Относительно введенной операции сложения все умножения на группе A образуют абелеву группу, *группу умножений* на A, $\operatorname{Mult} A$. Всякая группа A может быть тривиальным образом снабжена кольцевой структурой, если все произведения ее элементов положить равными 0. Такое кольцо называется *нуль-кольцом*. Нуль группы $\operatorname{Mult} A$ – это умножение, соответствующее нуль-кольцу на A. Группа A называется *нильгруппой* [1, § 120], если на A не существует никаких колец, отличных от нуль-кольца, т.е. $\operatorname{Mult} A = 0$. Всякая периодическая делимая группа является нильгруппой [1, теорема 120.3]. Из [1, § 121] сразу следует, что всякая нильгруппа не содержит ненулевых делимых подгрупп без кручения. Группа без кручения ранга 1 не является нильгруппой тогда и только тогда, когда ее тип идемпотентен [1, теорема 121.1]. В [2, теорема 3] описаны сепарабельные нильгруппы без кручения, а также изучены векторные нильгруппы. Отметим, что для каждой группы A имеют место изоморфизмы:

$$\operatorname{Mult} A \cong \operatorname{Hom}(A\mathrm{A}A, A) \cong \operatorname{Hom}(A,E(A)^{+}) \text{ [1, теорема 118.1].}$$

Через $\mathbf{Z}$ обозначается аддитивная группа (или кольцо) целых чисел, $\hat{Z}_p$ – группа (или кольцо) целых p-адических чисел, $\mathbf{N}$ – множество всех натуральных чисел. Если A – группа, p – простое число, то $p^{\omega}A = \bigcap_{n=1}^{\infty} p^n A$, $\Pi(A)$ – множество

[1] Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 – 2013 годы. Государственный контракт П 937 от 20 августа 2009 г.

всех простых чисел p со свойством $pA \neq A$, $r_p(A)$ – p-ранг группы A, т.е. ранг ее фактор-группы A/pA. $E(A)$ – кольцо эндоморфизмов группы A. Подгруппа G группы A называется *чистой* (*p-чистой*), если $nG = G\cap nA$ ($p^nG = G\cap p^nA$) для каждого $n \in \mathbf{N}$. Группа без кручения A называется *квазиоднородной*, если $\Pi(A) = \Pi(G)$ для любой ее ненулевой чистой подгруппы G.

Обозначим через R_p класс групп без кручения и без ненулевых элементов бесконечной p-высоты при данном простом числе p. Если $a \in A \in R_p$, $\xi = r_0 + r_1p +\ldots$ – целое p-адическое число, то через ξa будем обозначать элемент группы A, являющийся пределом в p-адической топологии последовательности $(r_0 +\ldots+ r_np^n)a$ ($n = 0, 1, \ldots$). Следуя [3], *p-характеристикой* элемента a будем называть множество

$$H_p^A(a) = \{\xi \mid \xi \in \widehat{Z}_p \text{ и } \xi a \text{ определено}\}.$$

Множество p-характеристик совпадает с множеством всех p-чистых подгрупп группы $\widehat{Z}_p$, содержащих группу $\mathbf{Z}$. В [3] показано, что если $A,B \in R_p$, $r_p(A) = 1$, а $a \in A\backslash pA$ и $H_p(a) \subseteq H_p(b)$ для некоторого $b \in B$, то существует единственный гомоморфизм f_b: $A\rightarrow B$ со свойством $f_ba = b$; в частности, если $b \in A(H_p(a)) = \{x \in A \mid H_p(x) \supseteq H_p(a)\}$, то отображение $b\mapsto f_b$ задает изоморфизм $E(A)^+\cong A(H_p(a))$. Будем говорить, что p-характеристики H_1, H_2 эквивалентны, если существуют такие $n,m \in \mathbf{N}$, что $nH_1 \subseteq H_2$, $mH_2 \subseteq H_1$. Класс эквивалентности в множестве p-характеристик будем называть *p-типом*. Группу $A \in R_p$ назовем *p-однородной*, если все ее ненулевые элементы имеют один и тот же p-тип τ, в этом случае будем писать $\tau_p(A) = \tau$. На множестве всех p-типов можно ввести отношение частичного порядка $\leq$. Например, запись $\tau_1 \leq \tau_2$ означает, что существуют p-характеристики $H_1 \in \tau_1$, $H_2 \in \tau_2$, такие, что $nH_1 \subseteq H_2$ для некоторого $n \in \mathbf{N}$. Понятие p-типа было введено автором в ряде работ ([4 – 7] и др.). Множество p-типов всех ненулевых элементов группы $A \in R_p$ обозначим через $T_p(A)$, а через $\tau_p(a)$ – p-тип элемента $a \in A$. Если $H_1 \in \tau_1$, $H_2 \in \tau_2$, то под H_1H_2 будем понимать p-характеристику (т.е. p-чистую подгруппу группы $\widehat{Z}_p$), порожденную элементами h_1h_2, где $h_1 \in H_1$, $h_2 \in H_2$, а под p-типом $\tau_1\tau_2$ будем понимать p-тип, содержащий H_1H_2. Если $H_1 \subseteq H_2$, то под p-характеристикой $H_2 : H_1$ будем понимать наибольшую p-характеристику H, для которой $HH_1 \subseteq H_2$. p-характеристику H назовем *идемпотентной*, если $H^2 = HH = H$. Отметим, что $H_p(p^na) = H_p(a)$ для всех $n \in \mathbf{N}$. Групповые термины, примененные к кольцу, касаются его аддитивной группы.

Лемма 1. Пусть A и B – группы из R_p p-ранга 1. Если $\tau_p(a)\leq\tau_p(b)$ для некоторых $0 \neq a \in A$, $0 \neq b \in B$, то $H = \mathrm{Hom}(A,B)$ является группой из R_p p-ранга 1 и $\tau_p(b) : \tau_p(a) \in T_p(H)$. В противном случае $\mathrm{Hom}(A,B) = 0$.

Доказательство. Ясно, что $H \in R_p$. Если $H_p(a) \subseteq H_p(b)$ (можно считать, что $a \in A\backslash pA$, $b \in B\backslash pB$), то существует единственный гомоморфизм f: $A\rightarrow B$ со свойством $fa = b$. Если $\xi H_p(a) \subseteq H_p(b)$ $(\xi \in \widehat{Z}_p \setminus p\widehat{Z}_p)$, то $H_p(a) \subseteq \xi^{-1}H_p(b) = H_p(\xi b)$.

Поэтому существует гомоморфизм $\varphi: A \to B$, $\varphi a = \xi b$. Ясно, что $\varphi = \xi f$, т.е. $H_p(f) \supseteq H_p(b) : H_p(a)$. Пусть теперь $\eta f \in H$ для некоторого $\eta \in \widehat{Z}_p \setminus p\widehat{Z}_p$. Имеем $(\eta f)a = \eta b$. Отсюда $H_p(a) \subseteq H_p(\eta b) = \eta^{-1}H_p(b)$ и $\eta H_p(a) \subseteq H_p(b)$, т.е. $\eta \in H_p(b) : H_p(a)$ и, значит, $H_p(f) = H_p(b) : H_p(a)$. Если $\psi a = x$ для $x \in B \setminus pB$, то $x = \zeta b$ для некоторого $\zeta \in \widehat{Z}_p \setminus p\widehat{Z}_p$. Откуда $\zeta^{-1}\psi a = b$, значит, $\zeta^{-1}\psi = f$ или $\psi = \zeta f$. В частности, $r_p(H) = 1$.

Если A и B – группы из R_p p-ранга 1, то $G = A \otimes B$ – группа без кручения p-ранга 1. Необязательно $G \in R_p$, однако для $a \in A$ и $b \in B$ следует, что $\tau_p(a \otimes b + p^{\omega}G) \geq \tau_p(a)\tau_p(b)$.

Лемма 2. 1) Кольцо S из R_p p-ранга 1 либо является нуль-кольцом, либо изоморфно некоторому p-чистому подкольцу кольца $\widehat{Z}_p$.

2) Группа $A \in R_p$ p-ранга 1 не является нильгруппой тогда и только тогда, когда для некоторых $\tau_1, \tau_2 \in T_p(A)$ найдется $\tau \in T_p(A)$ со свойством $\tau_1\tau_2 \leq \tau$.

Доказательство. 1) вытекает из того, что S^+ можно рассматривать как p-чистую подгруппу в $\widehat{Z}_p$, а всякое умножение на S продолжается до умножения кольца $\widehat{Z}_p$.

2) Если $a,b \in A$, $a,b \neq 0$, и $\xi \in H_p(a)$, $\eta \in H_p(b)$, то $\xi\eta(ab) = (\xi a)(\eta b)$. Откуда следует, что $H_p(a)H_p(b) \subseteq H_p(ab)$, т.е. $\tau_p(a)\tau_p(b) \leq \tau_p(ab)$.

Обратно, допустим, что $\tau_1\tau_2 \leq \tau$. Согласно лемме 1, $E(A)^+$ является группой из R_p и $t = \tau$: $\tau_1 \in T_p(E(A)^+)$. Тогда $\tau_2 \leq t$. Следовательно, $\mathrm{Mult}\, A \cong \mathrm{Hom}(A, E(A)^+) \neq 0$. Отметим, что (поскольку в кольце из R_p p-ранга 1, не являющегося нуль-кольцом, нет делителей нуля) в качестве τ_1 и τ_2 могут участвовать любые p-типы из $T_p(A)$.

Лемма 3. Пусть $A \in R_p$ – группа p-ранга 1. Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1) A содержит элемент с наименьшей p-характеристикой;

2) A изоморфна аддитивной группе некоторого p-чистого подкольца кольца $\widehat{Z}_p$, содержащего кольцо **Z**;

3) A содержит элемент с идемпотентной p-характеристикой.

Доказательство. 1)$\Rightarrow$2). Пусть $a \in A \setminus pA$ – элемент с наименьшей p-характеристикой. Тогда $A = A(H_p(a)) \cong E(A)^+$, где $E(A)$ можно рассматривать как p-чистое подкольцо в $\widehat{Z}_p$ (лемма 2).

Импликация 2)$\Rightarrow$3) очевидна, так как в кольце из R_p с 1 имеем $H_p(1) = H_p(1)H_p(1)$.

3)$\Rightarrow$1). Пусть $a \in A \setminus pA$ – элемент с идемпотентной p-характеристикой. Если $b \in A$, то $b = \xi a$ для некоторого $\xi \in H_p(a)$. Так как $\xi H_p(a) \subseteq H_p(a)$, то $H_p(a) \subseteq \xi^{-1}H_p(a) = Hp(\xi a)$, т.е. $H_p(a) \subseteq H_p(b)$ для любого $b \in A$.

В леммах 4, 5 и в теореме 6 используются идеи доказательств некоторых результатов § 96 из [1].

Лемма 4. Пусть $A = \prod_{i \in I} A_i$, $B = \prod_{j \in J} B_j$, где A_i и B_j – квазиоднородные группы и $r_p(A_i) = 1$, $r_q(B_j) = 1$ для некоторых $p \in \Pi(A_i)$, $q \in \Pi(B_j)$. Тогда если $\eta: A \to B$ – ненулевой гомоморфизм, то $\tau_1 \le \tau_2$ для некоторых $\tau_1 \in T_p(A_i)$ и $\tau_2 \in T_p(B_j)$, где $p \in \Pi(A_i) \cap \Pi(B_j)$ и $i \in I, j \in J$.

Доказательство. Найдется $j \in J$, для которого композиция гомоморфизмов $A \to B \to B_j$ не равна нулю. Следовательно, можно считать, что $B = B_j$ – квазиоднородная группа p-ранга 1 для некоторого $p \in \Pi(B)$. Если $B \cong \widehat{Z}_p$, то доказывать нечего. Пусть B – узкая группа и $\eta a \neq 0$ для $a \in A$. Запишем a в виде $a = (\ldots, a_i, \ldots)$, где $a_i \in A_i$. В силу квазиоднородности группы B можно считать, что $A_i \in R_p$. Соберем в одно слагаемое те A_i, для которых совпадают p-характеристики $H_p(a_i)$. Пусть $T_H = \prod_{H_p(a_i) = H} A_i$. Тогда $A = \prod_H T_H$. Сомножителей T_H не более чем $2^{2^{\aleph_0}}$ (группа $\widehat{Z}_p$ имеет мощность $2^{\aleph_0}$, а всякая группа из R_p p-ранга 1 изоморфна некоторой подгруппе группы $\widehat{Z}_p$). Поэтому найдется конечный набор $H_1, \ldots, H_k$, для которого $\eta T_{H_1}, \ldots, \eta T_{H_k} \neq 0$, но $\eta(\prod' T_H) = 0$ (штрих означает, что $H \neq H_1, \ldots, H_k$). Представим элемент a в виде $a = (\ldots, a_H, \ldots)$, где $a_H \in T_H$. Тогда $\eta a = \eta a_{H_1} + \ldots + \eta a_{H_k}$. Если, например, $\eta a_{H_1} \neq 0$, то $\tau_p(\eta a_{H_1}) \ge \tau_p(a_{H_1})$, где $\tau_p(a_{H_1})$ входит в $T_p(A_i)$ любой группы из произведения T_{H_1}, а $\eta a_{H_1} \in B$.

Если $A \in R_p$ – p-однородная группа p-ранга 1 и $0 \neq a, b \in A$, то $fa = nb$ при некоторых $f \in E(A)$ и $n \in \mathbf{N}$. Отсюда следует, что A – q-однородная группа для каждого $q \in \Pi(A)$.

Лемма 5. Пусть $A = \prod_{i \in I} A_i$, где каждая A_i – p-однородная группа p-ранга 1 для некоторого $p \in \Pi(A_i)$. Тогда если G – квазиоднородное прямое слагаемое в A q-ранга 1 при некотором $q \in \Pi(G)$, то G – q-однородная группа и найдется группа A_i со свойством $\tau_q(G) = \tau_q(A_i)$.

Доказательство. Для каждого $p \in \Pi(A)$ соберем группы A_i одного и того же p-типа τ и p-ранга 1 так, чтобы каждая группа соответствовала только одной паре (p, τ); обозначим через $A_\tau = \prod_{\tau_p(A_i) = \tau} A_i$ произведение таких групп A_i; групп в этом произведении не более чем $2^{2^{\aleph_0}}$. Можно считать, что $G \ncong \widehat{Z}_p$ ни для какого p. Поэтому G – узкая группа. Следовательно, для проекции $\pi: A \to G$, $A = G \oplus C$, найдется не более чем конечное число ненулевых образов $\pi A_{\tau_1}, \ldots, \pi A_{\tau_k}$, а произведение остальных групп A_τ гомоморфизм π переводит в нуль. Следовательно, это произведение содержится в C и $A_{\tau_1} \oplus \ldots \oplus A_{\tau_k} = G \oplus C'$ для некоторой подгруппы $C' \subseteq C$. Так как $\theta_l G \neq 0$ (и $\pi A_{\tau_l} \neq 0$) для некоторой проекции $\theta_l : A \to A_{\tau_l}$ $(l = 1, \ldots, k)$, то для каждого $p \in \Pi(A_i)$ следует, что $p \in \Pi(G)$ и $T_p(G)$ содержит p-тип τ_l. В частности, G – также p-однородная группа p-типа τ_l и согласно замечанию перед леммой $\tau_q(G) = \tau_q(A_i)$ для данного простого $q \in \Pi(G)$.

Теорема 6. Если $A = \prod_\tau A_\tau = \prod_\tau B_\tau \in R_p$, где A_τ и B_τ – прямые произведения p-однородных p-типа τ групп p-ранга 1, а τ пробегает различные p-типы, то $A_\tau \cong B_\tau$ для каждого τ.

Пусть $A_\tau = \prod_{i \in I} A_i = \prod_{j \in J} B_j$, где A_i – p-однородные p-типа τ группы p-ранга 1, а B_j – квазиоднородные группы p-ранга 1. Тогда все группы B_j p-однородны и имеют p-тип τ. Более того, при одном из следующих условий:

1) справедлива обобщенная гипотеза континуума;

2) $A_i \not\cong \widehat{Z}_p$ для каждого i, а множество I неизмеримо,

выполняется равенство $|I| = |J|$.

Доказательство. Пусть $\pi_\tau: A \to A_\tau$ и $\rho_\tau: A \to B_\tau$ – проекции. В силу леммы 4 $A_\tau \subseteq \prod_{s \geq \tau} B_s$. Элемент $a_\tau \in A_\tau$ запишем в виде $a_\tau = b_\tau + c_\tau$, где $b_\tau \in B_\tau$, $c_\tau \in \prod_{s > \tau} B_s$. Снова по лемме 4 $\pi_\tau c_\tau = 0 = \rho_\tau c_\tau$. Откуда $a_\tau = \pi_\tau a_\tau = \pi_\tau b_\tau$ и $b_\tau = \rho_\tau b_\tau = \rho_\tau a_\tau$. Таким образом, композиция гомоморфизмов $A_\tau \xrightarrow{\rho_\tau} B_\tau \xrightarrow{\pi_\tau} A_\tau$ есть тождественное отображение группы A_τ. Согласно лемме 5, все B_j – p-однородные группы, поэтому в силу симметрии получаем изоморфизм $A_\tau \cong B_\tau$.

Если множество I конечно, то $|I| = r_p(A_\tau) = |J|$. Допустим, что I – бесконечное множество. Тогда если выполняется условие 1), то из равенств $2^{|I|} = |A_\tau| = 2^{|J|}$ (учесть, что $|A_i|, |B_j| \leq 2^{\aleph_0}$) следует равенство $|I| = |J|$. Если выполняется условие 2), то, учитывая узкость групп A_i, для каждой группы $R \cong A_i$ получаем

$$\mathrm{Hom}(A_\tau, R) \cong \oplus_{i \in I} \mathrm{Hom}(A_i, R) \cong \oplus_{j \in J} \mathrm{Hom}(B_j, R).$$

(Неизмеримость $|I|$ влечет неизмеримость $2^{|I|} = 2^{|J|}$ и, значит, неизмеримость $|J|$). Согласно лемме 1, последние прямые суммы имеют p-ранги $|I|$ и $|J|$ соответственно.

Напомним, что группа без кручения A называется *связной*, если для всякой ее ненулевой чистой подгруппы B факторгруппа A/B делима; это эквивалентно тому, что A – квазиоднородная группа и $r_p(A) = 1$ для каждого $p \in \Pi(A)$.

Пусть $A = \prod_{i \in I} A_i$, где A_i – связные группы. Для $p \in \Pi(A)$ через $\Omega_p(A)$ обозначим множество $\Omega_p(A) = \{T_p(A_i) \mid A_i \in R_p, i \in I\}$. Если V и W – группы p-ранга 1 из R_p, то будем писать $T_p(V) \leq T_p(W)$, если $\tau_1 \leq \tau_2$ для некоторых $\tau_1 \in T_p(V)$ и $\tau_2 \in T_p(W)$ (это эквивалентно существованию ненулевых гомоморфизмов $V \to W$).

Теорема 7. Пусть $A = \prod_{i \in I} A_i$, где A_i – связные редуцированные группы и для всех $i \in I$ и $p \in \Pi(A)$ множество $J_i^{(p)} = \{j \in I \mid T_p(A_j) \leq T_p(A_i), p \in \Pi(A_i) \cap \Pi(A_j)\}$ неизмеримо. Группа A является нильгруппой тогда и только тогда, когда для всех $p \in \Pi(A)$ и любых $\tau_1, \tau_2, \tau \in \Omega_p(A)$ выполняется неравенство $\tau_1\tau_2 \not\leq \tau$.

Доказательство. Воспользуемся изоморфизмом $\mathrm{Mult}\, A \cong \mathrm{Hom}(A, E(A)^+)$. Если A – нильгруппа, то, как ее прямые слагаемые, все A_i являются нильгруппами, в частности среди A_i не встречаются группы, изоморфные $\widehat{Z}_p$. Имеем $E(A)^+ =$ $= \mathrm{Hom}(A, A) \cong \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}(A, A_i)$ [1, теорема 43.2]. Зафиксируем $i \in I$ и выберем некоторый $p \in \Pi(A_i)$. Запишем A в виде $A = B_i \oplus C_i$, где $B_i = \prod_{j \in J} A_j$, $C_i = \prod_{s \in I \setminus J} A_s$, $J = \{j \in I \mid p \in \Pi(A_j)$ и $T_p(A_j) \leq T_p(A_i)\}$. В силу связности групп A_s из леммы 4 следует, что $\mathrm{Hom}(C_i, A_i) = 0$. Поэтому $\mathrm{Hom}(A, A_i) \cong \mathrm{Hom}(B_i, A_i)$. А так как все A_i – узкие группы, то $\mathrm{Hom}(B_i, A_i) \cong \oplus_{j \in J} \mathrm{Hom}(A_j, A_i)$ [1, следствие 94.5]. Здесь каждая группа $\mathrm{Hom}(A_j, A_i)$ является связной, множество p-типов ненулевых элементов которой содержит p-тип $\tau_p^{(i)} : \tau_p^{(j)}$, где $\tau_p^{(i)} \in T_p(A_i)$, $\tau_p^{(j)} \in T_p(A_j)$ $(\tau_p^{(i)} \geq \tau_p^{(j)})$. Из вышесказанного следует, что $E(A)^+$ можно рассматривать как подгруппу прямого произведения таких связных групп. Поэтому вновь по лемме 4 $\mathrm{Hom}(A,E(A)^+) \neq 0$ тогда и только тогда, когда $\tau_p^{(s)} \leq \tau_p^{(i)} : \tau_p^{(j)}$ или, эквивалентно, $\tau_p^{(j)}\tau_p^{(s)} \leq \tau_p^{(i)}$ для некоторых $i,j,s \in I$.

В работах [8 – 11] автор изучал проективно инвариантные подгруппы абелевых групп.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1974. Т. 1; 1977. Т. 2.
2. *Чехлов А.Р.* Об абелевых группах, все подгруппы которых являются идеалами // Вестник ТГУ. Математика и механика. 2009. № 3(7). С. 64 – 67.
3. *Иванов А.М.* Об одном свойстве p-сервантных подгрупп группы целых p-адических чисел // Матем. заметки. 1980. Т. 27. № 6. С. 859 – 867.
4. *Чехлов А.Р.* Об абелевых группах без кручения, близких к квазисервантно инъективным // Абелевы группы и модули. 1985. С. 117 – 127.
5. *Чехлов А.Р.* О некоторых классах абелевых групп без кручения, близких к квазисервантно инъективным // Изв. вузов. Математика. 1985. № 8. С. 82 – 83.
6. *Чехлов А.Р.* Абелевы CS-группы без кручения // Абелевы группы и модули. 1988. С. 131 – 147.
7. *Чехлов А.Р.* О прямых произведениях и прямых суммах абелевых QCPI-групп без кручения // Изв. вузов. Математика. 1990. № 4. С. 58 – 67.
8. *Чехлов А.Р.* Свойства подгрупп абелевых групп, инвариантных относительно проекций // Вестник ТГУ. Математика и механика. 2008. № 1(2). С. 76 – 82.
9. *Чехлов А.Р.* О подгруппах абелевых групп, инвариантных относительно проекций // Фундамент. и прикл. матем. 2008. Т. 14. № 6. С. 211 – 218.
10. *Чехлов А.Р.* О проективно инвариантных подгруппах абелевых групп // Вестник ТГУ. Математика и механика. 2009. № 1(5). С. 31 – 36.
11. *Чехлов А.Р.* Сепарабельные и векторные группы, проективно инвариантные подгруппы которых вполне инвариантны // Сиб. матем. журн. 2009. Т. 50. № 4. С. 942 – 953.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

ЧЕХЛОВ Андрей Ростиславович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры Томского государственного университета. E-mail: cheklov@math.tsu.ru

Статья принята в печать 26.10.2009г.