ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2010 Математика и механика № 1(9)

УДК 512.541

А.Р. Чехлов

Е-НИЛЬПОТЕНТНЫЕ И Е-РАЗРЕШИМЫЕ АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ КЛАССА 2[1]

Изучаются Е-нильпотентные и Е-разрешимые абелевы группы. Описаны вышеназванные группы в ряде классов групп.

Ключевые слова: *Е-нильпотентный элемент*, *Е-центральный ряд*, *Е-коммутант*, *Е-центр*, *Е-полупервичная подгруппа.*

Все группы в статье предполагаются абелевыми, кольца – ассоциативными. Пусть A – группа. Тогда $E(A)$ обозначает кольцо ее эндоморфизмов, $r(A)$ – ранг, если не оговорено противное, то A_p – ее p-компонента, а $t(A)$ – периодическая часть. Если A – однородная группа без кручения, то $t(A)$ – ее тип. Запись $H \leq A$ означает, что H – подгруппа в A; $H \leq \mathrm{fi}\, A$, что H – вполне инвариантная подгруппа в A, т.е. $fH \subseteq H$ для каждого $f \in E(A)$. Если $f\colon A \to B$ – гомоморфизм, то $f\,|\,H$ – ограничение f на $H \subseteq A$. Если B, G – группы и X – непустое подмножество B, то через Hom $(B, G)X$ обозначим подгруппу в G, порожденную всеми подмножествами fX, где $f \in$ Hom (B, G); Hom $(B, G)B$ совпадает со следом группы B в G. Через 1_A обозначим тождественный автоморфизм группы A, через $o(a)$ – порядок элемента $a \in A$. $\mathbf{N}$ – множество всех натуральных чисел, $\mathbf{Z}$ – аддитивная группа (или кольцо) целых чисел, $\mathbf{Q}$ – аддитивная группа всех рациональных чисел. $A^1 = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} nA$. Z_{p^∞} – квазициклическая p-группа, $\widehat{Z}_p$ – группа целых p-адических чисел, Z_n – циклическая группа порядка n. $Z(R)$ – центр кольца R. Подгруппа G группы A называется *чистой* (или *сервантной*), если $G \cap nA = nG$ для каждого $n \in \mathbf{N}$; *инвариантной*, если $fG \subseteq G$ для каждого автоморфизма f группы A.

§ 1. Определения и некоторые свойства

Изучаемые в статье классы групп можно рассматривать как обобщение класса групп с коммутативным кольцом эндоморфизмов.

Напомним, что если R – кольцо и $a,b \in R$, то элемент $[a,b] = ab-ba$ называется *коммутатором* элементов a и b. Если $a_1,\ldots,a_n \in R$, то положим по индукции $[a_1,\ldots,a_n] = [[a_1,\ldots,a_{n-1}],a_n]$.

Подгруппу H группы A назовем *коммутаторно инвариантной* (обозначение $H \leq \mathrm{ki}\, A$), если $[\varphi,\psi]H \subseteq H$ для всех $\varphi,\psi \in E(A)$. Коммутаторно инвариантные подгруппы изучались в [1].

Приведем несколько свойств коммутаторов.

1) $-[\varphi,\psi] = [-\varphi,\psi] = [\varphi,-\psi] = [\psi,\varphi]$, $[\alpha,\varphi+\psi] = [\alpha,\varphi] + [\alpha,\psi]$, $[\alpha+\beta,\varphi] =[\alpha,\varphi] + [\beta,\varphi]$;

2) $[[\alpha,\beta],\gamma] + [[\beta,\gamma],\alpha] + [[\gamma,\alpha],\beta] = 0$, $[\alpha,[\beta,\gamma]] + [\beta,[\gamma,\alpha]] + [\gamma,[\alpha,\beta]] = 0$ (тождества Якоби);

[1] Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 – 2013 годы. Государственный контракт П 937 от 20 августа 2009 г.

3) $[[\alpha,\beta],\gamma] = [\alpha\beta,\gamma] - [\beta\alpha,\gamma]$, $[\alpha,[\beta,\gamma]] = [\alpha,\beta\gamma] - [\alpha,\gamma\beta]$;

4) $\varphi^n[\varphi,\psi] = [\varphi,\varphi^n\psi]$, $\psi^n[\varphi,\psi] = [\psi^n\varphi,\psi]$, $[\varphi,\psi]\varphi^n = [\varphi,\psi\varphi^n]$, $[\varphi,\psi]\psi^n = [\varphi\psi^n,\psi]$ для любого $n \in \mathbf{N}$;

5) $[\alpha,\beta]\varphi = \alpha[\beta,\varphi] + [\alpha\varphi,\beta]$, $[\alpha,\beta]\varphi = [\alpha,\beta\varphi] + \beta[\varphi,\alpha]$;

6) $\varphi[\alpha,\beta] = [\varphi,\alpha]\beta + [\alpha,\varphi\beta]$, $\varphi[\alpha,\beta] = [\varphi\alpha,\beta] + [\beta,\varphi]\alpha$;

7) равенство $[\alpha,\beta]^2 = 0$ равносильно как равенству $\alpha[\beta\alpha,\beta] = \beta[\alpha,\alpha\beta]$, так и равенству $[\alpha,\beta\alpha]\beta = [\alpha\beta,\beta]\alpha$;

8) если элемент α обратим в кольце, то $\alpha[\beta,\gamma] = [\alpha\beta\alpha^{-1},\alpha\gamma\alpha^{-1}]\alpha$, $[\beta,\gamma]\alpha = \alpha[\alpha^{-1}\beta\alpha,\alpha^{-1}\gamma\alpha]$;

9) $[\alpha\beta,\gamma] = [\alpha,\beta\gamma] + [\beta,\gamma\alpha]$, $[\alpha,\beta\gamma] = [\alpha\beta,\gamma] + [\gamma\alpha,\beta]$;

10) $[\alpha,\beta,\gamma,\delta] + [\beta,\alpha,\delta,\gamma] + [\gamma,\delta,\alpha,\beta] + [\delta,\gamma,\beta,\alpha] = 0$.

Группу A назовем Е-*нильпотентной класса* n, если $[\alpha_1,\dots,\alpha_{n+1}] = 0$, эквивалентно $[\alpha_1,\dots,\alpha_n] \in Z(E(A))$, для любых $\alpha_i \in E(A)$, $i = 1,\dots,n+1$, и $[\beta_1,\dots,\beta_n] \neq 0$ для некоторых $\beta_j \in E(A)$, $j = 1,\dots,n$.

11) Для кольца R следующие условия эквивалентны:

а) $[a,b] \in Z(R)$ для любых $a,b \in R$;

б) $[[a,b],c] = [a,[b,c]]$ для любых $a,b,c \in R$;

в) $[a,b,c] = [a,c,b]$ для любых $a,b,c \in R$;

г) $[a,bc] = [a,cb]$ для любых $a,b,c \in R$.

Доказательство. Импликации а) $\Rightarrow$ б), в) очевидны. Эквивалентность а) и г) вытекает из свойства 3) коммутаторов.

б) $\Rightarrow$ а). Имеем $[[b,c],a] = bca - cba - abc + acb$, $[b,[c,a]] = bca - bac - cab + acb$. Приравнивая правые части, получаем $0 = cba + abc - bac - cab = [[a,b],c]$. Откуда $[a,b] \in Z(R)$ в силу произвольности элемента c.

в) $\Rightarrow$ а). Как и выше, из равенства $[c,a,b] = [c,b,a]$ получаем $cab-cba+bac-abc = 0$ или $c[a,b] =[a,b]c$, т.е. $[a,b] \in Z(R)$.

В свойстве 12) – 13) предполагается, что кольцо R удовлетворяет тождеству $[x_1,x_2,x_3] = 0$.

12) Для любых $a,b \in R$ элементы ab, a^2b^2, a^3b^3, … попарно перестановочны.

Доказательство. Если $n > 1$, то, учитывая свойство 1), п. г) и индуктивное предположение, получаем $[ab, a^nb^n] = aba^nb^n - a^nb^nab = a[ba, a^{n-1}b^{n-1}]b = a[ab, a^{n-1}b^{n-1}]b = 0$. Если же $n>m>1$ и $n = mq+r$, где $0 \le r < m$, то

$$[a^mb^m, a^nb^n] = a^m[b^ma^m, a^{n-m}b^{n-m}]b^m =$$
$$=a^m[a^mb^m, a^{n-m}b^{n-m}]b^m = a^{2m}[a^mb^m, a^{n-2m}b^{n-2m}]b^{2m} = \dots = a^{mq}[a^mb^m, a^rb^r]b^{mq}.$$

При $r = 0$ получаем равенство нулю, если же $r \neq 0$, то делим m на r. Согласно алгоритму Евклида, через конечное число шагов при $(n,m) > 1$ придем к скобке вида $[a^tb^t, 1] = 0$ либо при $(n,m) = 1$ к скобке вида $[a^kb^k, ab]$, которая также равна нулю согласно уже рассмотренному случаю.

13) $[a,b]^2 = 0$ для любых $a,b \in R$. В частности, если кольцо R не содержит ненулевых нильпотентных элементов, то оно коммутативно.

Доказательство. Действительно

$$[a,b]^2 = a(bab-bba)-(abb-bab)a = a[ba,b]-[ab,b]a =$$
$$= a[ba,b]-[ba,b]a = [a,[ba,b]] = 0.$$

14) Кольцо R удовлетворяет тождествам $[x_1,x_2][x_3,x_4] = 0$ и $[x_1,x_2,x_3] = 0$ тогда и только тогда, когда $c[a,b] \in Z(R)$ для любых $a,b,c \in R$.

Доказательство. Необходимость. Имеем

$$0 = [c,d][a,b] = cd[a,b]-dc[a,b] = (c[a,b])d - d(c[a,b]), \text{ т.е. } c[a,b] \in Z(R).$$

Достаточность следует из равенств

$$-[c,d][a,b] = [d,c][a,b] = d(cab - cba) - (ab–ba)cd =$$

$$= d(cab–cba)–(cab–cba)d = [d,[a,b]c] = 0.$$

Е-*центром* группы A назовем следующую ее подгруппу

$$Z(A) = \{a \in A \mid [\varphi,\psi]a = 0 \text{ для всех } \varphi,\psi \in E(A)\}.$$

Подгруппу $A' = \langle[\varphi,\psi]A \mid \varphi,\psi \in E(A)\rangle$ назовем Е-*коммутантом* группы A. Ясно, что кольцо $E(A)$ коммутативно в точности тогда, когда $A' = 0$. Если $a \in A$, то через $[\varphi,\psi]a$ обозначим *коммутатор* элемента a.

Определим по индукции $A^{(0)} = A$, $A^{(1)} = A',\ldots, A^{(n+1)} = (A^{(n)})'$ и $A^{(\alpha)} = \cap_{\rho<\alpha}A^{(\rho)}$ при предельном α.

Лемма 1.1 [2, лемма 2]. *Если* $A = B\oplus G$, *то*

$$A' = \langle \mathrm{Hom}\,(B,G)B,\ \mathrm{Hom}\,(G,B)G,\ B',\ G'\rangle.$$

Некоторые свойства и описание Е-центра и Е-коммутанта ряда классов групп получены в [1, 2]. Так, Е-центр и Е-коммутант – вполне инвариантные подгруппы (что следует соответственно из свойств 5) и 6) коммутаторов). Отметим еще, что если, например, $A = B\oplus C$, где $B = Z_p$, а $C = Z_{p^\infty}$, то в силу леммы 1.1 $A' = C[p]$. Поэтому $A/A' \cong A$ и, следовательно, $(A/A')' \neq 0$. Факторгруппа по Е-центру может быть циклической. Например, если $A = B\oplus C$, где $B = \mathbf{Q}$, а $C = \mathbf{Z}$, то $Z(A) = B$ и $A/Z(A) \cong \mathbf{Z}$. Если же $C = Z_n$, где $n = p_1^{k_1} \ldots p_m^{k_m}$, а $B = Z_{p_1^\infty} \oplus \ldots \oplus Z_{p_m^\infty}$, то $Z(A) = B$ и $A/Z(A) \cong Z_n$.

Е-центр группы без кручения – чистая подгруппа, а Е-коммутант может не быть чистой подгруппой.

Пример 1. Пусть $n>1$ – натуральное число и K – кольцо всех матриц вида

$$A = \begin{pmatrix} a & nb & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \text{ где } a,b,c,d \in \mathbf{Z}.$$

Если

$$B = \begin{pmatrix} x & ny & z \\ 0 & x & t \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}, \text{ то } AB - BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & n(bt - yd) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in Z(K).$$

По теореме Корнера [3, теорема 110.1] существует группа без кручения, кольцо эндоморфизмов которой изоморфно K; эта группа Е-нильпотентна класса 2, коммутант которой не является чистой подгруппой.

Легко привести примеры, когда подгруппы и факторгруппы Е-нильпотентной группы не являются Е-нильпотентными. Так, пусть $A = B\oplus C$, где B и C – вполне инвариантные подгруппы с коммутативными кольцами эндоморфизмов группы без кручения A и $pB \neq B$, $pC \neq C$. Кольцо $E(A)$ также коммутативно, поэтому A – Е-нильпотентная группа. Однако для любых $0 \neq b \in B$ и $0 \neq c \in C$ подгруппа $\langle b\rangle\oplus\langle c\rangle$ и факторгруппа $A/pA \cong (B/pB)\oplus(C/pC)$, как это следует из предложения 1.2, не являются Е-нильпотентными.

Напомним, что кольцо называется *нормальным* [4], если все его идемпотенты центральны. Кольцо эндоморфизмов модуля нормально тогда и только тогда, когда все его прямые слагаемые вполне инвариантны [4, утверждение 3.28].

Группу назовем Е-*энгелевой* класса $\le n$, если $[a,\underbrace{b,\dots,b}_{n}]=0$ для любых ее эндоморфизмов a,b.

Предложение 1.2. *В* Е-*энгелевой группе A все ее прямые слагаемые вполне инвариантны. В частности, кольцо $E(A)$ нормальное.*

Доказательство. Если $A = B\oplus C$, а $\alpha \in E(A)$ – такой, что $\alpha|C = 1_C$ и $0 \ne \alpha b \in C$ для некоторого $b \in B$, то определим $\beta \in E(A)$ следующим образом: $\beta|B = \alpha$ и $\beta|C = 0$. Теперь если $\psi_1 = [\beta,\alpha]$ и $\psi_{n+1} = [\psi_n,\alpha] = [\beta,\underbrace{\alpha,\dots,\alpha}_{n}]$, то по индукции проверяется, что $\psi_n b = (-1)^n\alpha b \ne 0$. Это доказывает утверждение.

Группы с нормальным кольцом эндоморфизмов изучались в [5]; из этих результатов следует, что, например, периодические и сепарабельные группы без кручения являются Е-нильпотентными тогда и только тогда, когда их кольца эндоморфизмов коммутативны.

Группу A назовем Е-*разрешимой*, если $A^{(n)} = 0$ для некоторого $n \in \mathbf{N}$. Наименьшее такое n назовем *классом* Е-разрешимости группы A. Прямые слагаемые Е-разрешимой группы являются Е-разрешимыми группами.

Отметим, что для каждого n существуют Е-разрешимые группы класса n, не являющиеся Е-нильпотентными.

Пример 2. Пусть $K = T_2(\mathbf{Z})$ – кольцо целочисленных треугольных матриц порядка 2. Коммутатор любых двух матриц из K имеет вид $a=\begin{pmatrix}0 & u\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ для некоторого $u \in \mathbf{Z}$. Поэтому произведение любых двух коммутаторов есть 0 кольца K. Согласно теореме Корнера (см. пример 1), существуют группы A с кольцом эндоморфизмов K, эти группы будут Е-разрешимыми группами класса 2. Если $b=\begin{pmatrix}x & y\\ 0 & z\end{pmatrix}\in K$, где $x \ne z$, то $ab-ba=\begin{pmatrix}0 & u(z-x)\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. Откуда $[a,\underbrace{b,\dots,b}_{n}]\ne 0$ для любого n, т.е. A не будут даже Е-энгелевыми.

Пример 3. Пусть $\mathbf{Z}[i] = \{m + ki \mid m,k \in \mathbf{Z}\}$ – кольцо целых гауссовых чисел. Рассмотрим кольцо $(\mathbf{Z}[i])[x,\bar{\ }\,]$, состоящее из многочленов от x с коэффициентами из $\mathbf{Z}[i]$, для которых выполняется равенство $xa = \bar{a}x$, где $\bar{a}$ – комплексное число из $\mathbf{Z}[i]$, сопряженное к a. Пусть теперь $K_n = (\mathbf{Z}[i])[x,\bar{\ }\,]/(x^n)$, где (x^n) – идеал, порожденный x^n. Тогда $[f,g] = fg - gf \in xK_n$ для любых $f, g \in K_n$. Поэтому $[f_{2n-1},f_{2n}]\dots[f_1,f_2] = 0$ для всех $f_i \in K_n$ при $i = 1,\dots,2n$. Аддитивная группа кольца K_n является счетной редуцированной группой без кручения. Как и в примере 2, в качестве A можно взять группы, кольца эндоморфизмов которых изоморфны K_n. Поскольку, например, $[x,\underbrace{i,\dots,i}_{n}]=(-2i)^n x\ne 0$, то A не являются Е-энгелевыми.

Пусть R – кольцо эндоморфизмов группы A и $[x, y, y] = 0$ для любых $x, y \in R$. Тогда $0 = [x, y + z, y + z] = [x, y, z] + [x, z, y]$. Согласно тождеству Якоби $[x, z, y] = [x, y, z] + [y, z, x]$. Откуда $2[x, y, z] + [y, z, x] = 0$. Из $0 = [y, z + x, z + x] = [y, z, x] + [y, x, z]$ получаем $[y, z, x] = -[y, x, z] = [x, y, z]$. Поэтому $3[x, y, z] = 0$. Аналогичным образом, используя свойство 10) и уже доказанное равенство $3[x, y, z] = 0$, можно показать, что $[x, y, z, t] = 0$ для любых $x, y, z, t \in R$. Следовательно, всякая Е-энгелева группа класса ≤ 2 является Е-нильпотентной класса ≤ 3, а если она не имеет элементов порядка 3, то и Е-нильпотентной класса ≤ 2.

Из определения вытекает справедливость следующей леммы.

Лемма 1.3. *Для группы A следующие условия эквивалентны*:

1) A – Е-*разрешимая группа класса* $\le n$;

2) $[\alpha_{2n-1},\alpha_{2n}]\ldots[\alpha_1,\alpha_2] = 0$ *для любых* $\alpha_i \in E(A)$, $i = 1,\ldots,2n$;

3) $A^{(n-1)} \subseteq Z(A)$.

Из определения также следует, что если A – Е-разрешимая группа, то $Z(A) \ne 0$; кроме того, если $0 \ne H \le \mathrm{ki}\, A$, то $H\cap Z(A) \ne 0$. Отметим для сравнения, что если G – некоммутативная нильпотентная группа и $1<N\trianglelefteq G$, то $[N,G]<N$ и $N\cap Z(G)>1$, где $[N,G] = \langle [x,g] \mid x \in N,\ g \in G\rangle$ – коммутант N и $[x,g] =x^{-1}g^{-1}xg$ – коммутатор x и g. Для Е-разрешимой группы A класса n возможен случай, когда $A^{(n-1)} \ne Z(A)$. Например, если $A = B\oplus C\oplus D$, где кольца $E(B)$, $E(C)$, $E(D)$ коммутативны, для каждого $0 \ne b \in B$ существует $f \in \mathrm{Hom}(B,C)$ со свойством $fb \ne 0$, $\mathrm{Hom}(B,D) = 0$, и подгруппы C,D вполне инвариантны в A, то $A'' = 0$ и $A' = \mathrm{Hom}(B,C)B \subseteq C \ne Z(A) = C\oplus D$.

Если $H \le \mathrm{ki}\, A$ и $R = E(A)$, то положим $Z_R(A/H) = \{\bar{a} \in A/H \mid [\alpha,\beta]\bar{a} = 0$ для всех $\alpha,\beta \in R\}$. Ясно, что если $A' \subseteq B \le A$, то $B \le \mathrm{ki}\, A$.

Если $H \subseteq A$, то через $N_R(H) = \{a \in A \mid [\alpha,\beta]a \in H$ для всех $\alpha,\beta \in R\}$ обозначим Е-*нормализатор* подмножества H в группе A. Индекс R иногда будем опускать. Из свойства 8) коммутаторов следует, что инвариантность подгруппы H влечет инвариантность $N(H)$. Ясно, что $H = N(H)$ для $H \le A$ в точности тогда, когда $H \le \mathrm{ki}\, A$ и A/H – коммутаторно точная факторгруппа, т.е. для любого $0 \ne \overline{a} = a + H \in A/H$ найдутся $\varphi,\psi \in E(A)$ со свойством $[\varphi,\psi]\,\overline{a} \ne 0$ (факт, отмеченный в [1]). Отсюда несложно вывести, что для прямого слагаемого H выполняется равенство $H = N(H)$ тогда и только тогда, когда H вполне инвариантно и $Z(C) = 0$ для каждого (эквивалентно – для некоторого в силу их изоморфизма) дополнительного прямого слагаемого C.

Ряд $A_i \subseteq A_{i+1} \subseteq \ldots \subseteq A_{i+n} \subseteq \ldots$ подгрупп A_i ($i \in I$) группы A назовем Е-*центральным*, если $A_i \le \mathrm{ki}\, A$ и $A_{i+1}/A_i \subseteq Z_R(A/A_i)$ (эквивалентно, $A_{i+1} \subseteq N_R(A_i)$) для всех $i \in I$. Если же $A_i \le \mathrm{ki}\, A$ для всех $i \in I$, то ряд назовем Е-*нормальным*.

Если A – группа, $R = E(A)$, то положим по индукции

$$Z_0(A) = 0,\ Z_1(A) = Z(A),\ \ldots,\ Z_i(A)/Z_{i-1}(A) = Z_R(A/Z_{i-1}(A))$$

$$\text{и } Z_\alpha(A) = \bigcup\nolimits_{\rho<\alpha} Z_\rho(A) \text{ при предельном } \alpha.$$

Обозначим для краткости $Z_\alpha = Z_\alpha(A)$. Ряд $0 \subseteq Z_1 \subseteq \ldots \subseteq Z_\alpha \subseteq \ldots$ назовем *верхним* Е-*центральным* рядом группы A. Подгруппы Z_α назовем Е-*гиперцентрами* группы A. Из свойства 5) коммутаторов вытекает, что все Е-гиперцентры являются вполне инвариантными подгруппами. В группе без кручения все Е-гиперцентры являются чистыми подгруппами, поэтому все факторы верхнего Е-центрального ряда также группы без кручения.

Если $H \subseteq A$, то подгруппу $\langle [\varphi,\psi]h \mid h\in H,\ \varphi,\psi \in E(A)\rangle$ назовем Е-*коммутантом* подмножества H в A и обозначим через $[H,A]$. Если $H \le \mathrm{ki}\, A$, то $[H,A] \le \mathrm{ki}\, A$, а если $H \le \mathrm{fi}\, A$, то из свойства 6) коммутаторов следует, что $[H,A] \le \mathrm{fi}\, A$. Всегда $[B+C,A] = [B,A]+[C,A]$ для $B,C \le A$. Обозначим

$$[H,A]_1 = H + [H,A] \text{ и } [H,A]_{n+1} = [H,A]_n + [[H,A]_n, A] \text{ при } n\ge 1.$$

Тогда $\overline{H} = \bigcup_{n=1}^{\infty}[H, A]_n$ – наименьшая ki-подгруппа, содержащая H. Действительно, $\overline{H} \le \mathrm{ki}\, A$ и всякая ki-подгруппа, содержащая H, содержит и $\overline{H}$. Из свойства 8) коммутаторов следует, что инвариантность H влечет инвариантность $\overline{H}$.

Положим по индукции $L_1(A) = A$, $L_{i+1}(A) = [L_i(A),A]$ и $L_\alpha(A) = \bigcap_{\rho<\alpha} L_\rho(A)$, если α – предельное число. Отметим, что $L_n(A) = A^{(n-1)}$ для $n \in \mathbf{N}$ и $L_\alpha(A) \le \mathrm{fi}\, A$ для каждого ординала α.

Заметим, что

$$L_{n+1}(A) = \langle[\alpha_{2n-1},\alpha_{2n}]\ldots[\alpha_1,\alpha_2]a \mid a \in A,\ \alpha_i \in E(A),\ i = 1,\ldots,2n\rangle,$$

а

$$Z_n(A) = \{a \in A \mid [\alpha_{2n-1},\alpha_{2n}]\ldots[\alpha_1,\alpha_2]a = 0,\ \alpha_i \in E(A),\ i = 1,\ldots,2n\}.$$

Е-разрешимые группы класса n являются подклассом класса BL_n групп – групп A со свойством $[\varphi,\psi]^n = 0$ для всех $\varphi,\psi \in E(A)$. Внимание автора на класс BL_2 обратил профессор П.А. Крылов. Группы из класса BL_2 изучались в [2, 5]. Отметим, что в [6 – 16] и в других работах автора рассматривались вопросы, связанные с возможностью продолжения гомоморфизмов абелевых групп.

Если $0 = A_0 \subseteq A_1 \subseteq \ldots \subseteq A_{n-1} \subseteq A_n = A$ – Е-центральный ряд, то получаем включения $A_i \subseteq Z_i$ и $L_i \subseteq A_{n-i+1}$, где $L_i = L_i(A)$. Ряд $L_1(A) \supseteq L_2(A) \supseteq \ldots$ назовем *нижним* Е-*центральным* рядом группы A. Из вышеприведенных включений следует, что в Е-разрешимой группе верхний и нижний Е-центральные ряды обрываются, причем их длины равны классу Е-разрешимости группы. В частности, в Е-разрешимой группе все ее Е-центральные ряды обрываются, минимальная длина таких рядов совпадает с классом Е-разрешимости группы.

Хотя верхний и нижний Е-центральные ряды Е-разрешимой группы имеют одинаковую длину, они сами не обязаны совпадать. Так, в вышеприведенном примере Е-разрешимой группы $A = B\oplus C\oplus D$ верхний Е-центральный ряд имеет вид $0 \subset C\oplus D \subset A$, а нижний – $0 \subset \mathrm{Hom}(B,C)B \subset A$.

Некоторые свойства нильпотентных некоммутативных групп переносятся на Е-разрешимые группы.

Теорема 1.4. *Для группы A равносильны условия*:

1) A – Е-*разрешимая группа класса* n;

2) $Z_n(A) = A$ *и* $Z_{n-1}(A) \ne A$;

3) $L_{n+1}(A) = 0$, *но* $L_n(A) \ne 0$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) Так как $L_i \subseteq Z_{n-i+1}$, то $L_1 = A \subseteq Z_n$, т.е. $Z_n = A$. Допустим, что $Z_{n-1} = A$. Тогда $L_2 = A' \subseteq Z_{n-2}$ и по индукции $L_i \subseteq Z_{n-i}$. Значит, $L_n = A^{(n-1)} \subseteq Z_0 = 0$. Противоречие с условием $A^{(n-1)} \ne 0$.

2) $\Rightarrow$ 3) Имеем $L_{n+1} \subseteq Z_0 = 0$. Если $L_n = 0$, то $L_{n-1} \subseteq Z_1$. По индукции $L_{n-k} \subseteq Z_k$ или $L_k \subseteq Z_{n-k}$. Отсюда $L_1 = A \subseteq Z_{n-1}$. Противоречие. Импликация 3) $\Rightarrow$ 1) очевидна.

Теорема 1.5. *Если A –* Е-*разрешимая группа класса n, то для любой ее подгруппы H ряд последовательных* Е-*нормализаторов достигает A не позже чем через n шагов. В частности, всякая* ki-*подгруппа* Е-*разрешимой группы входит в некоторый* Е-*центральный ряд*.

Доказательство. Обозначим $H_0 = H$, $H_{i+1} = N(H_i)$. Достаточно проверить, что $Z_i \subseteq H_i$. Для $i = 0$ это очевидно, а далее имеем $Z_{i+1} = N(Z_i) \subseteq N(H_i) = H_{i+1}$. Оставшееся утверждение для ki-подгрупп следует из того, что если $H \le \mathrm{ki}\, A$, то $H\cap Z_i \le \mathrm{ki}\, A$, $H\cap Z_{i+1} \subseteq N(H\cap Z_i)$ и $H \subseteq N(H_i)$.

ki-подгруппу H группы A назовем Е-*малой*, если из $A = H+S$, где S – некоторая ki-подгруппа, следует, что $S = A$.

Элемент $x \in A$ назовем Е-*необразующим* группы A, если $\overline{\langle x\rangle}$ – Е-малая подгруппа. Очевидно, что любая ki-подгруппа, содержащаяся в Е-малой подгруппе, является Е-малой; сумма конечного числа Е-малых подгрупп является Е-малой подгруппой. В силу сказанного сумма всех Е-малых подгрупп совпадает с множеством Е-необразующих элементов группы A.

Обозначим через $C(A)$ пересечение всех максимальных ki-подгрупп группы A, если они существуют, и $C(A) = A$ в противном случае.

Лемма 1.6. *Множество S всех* Е*-необразующих элементов группы A совпадает с подгруппой $C(A)$.*

Доказательство. $S \subseteq C(A)$. Если A не содержит максимальных ki-подгрупп, то утверждение очевидно. Пусть теперь $x \in S$ и H – максимальная ki-подгруппа в A. Если $x \notin H$, то $\overline{\langle x\rangle + H} = A$ и $H \neq A$. Это противоречит включению $x \in S$.

$C(A) \subseteq S$. Пусть, напротив, существует элемент $x \in C(A)$ и $B \leq \mathrm{ki}\, A$, такие, что $B \neq A$, но $\overline{\langle x\rangle + B} = A$. По лемме Цорна найдется ki-подгруппа H группы A, максимальная среди ki-подгрупп, содержащих B и не содержащих x. Ясно, что H – максимальная ki-подгруппа. Но тогда $x \in C(A) \subseteq H$. Противоречие.

Теорема 1.7. *Если A –* Е*-разрешимая группа и H – ее* ki*-подгруппа с условием $H+A' = A$, то $H = A$. В частности, $A' \subseteq C(A)$.*

Доказательство. Положим $H_i = H+Z_i$, $i = 0,1,2,\ldots$. Пусть $H_m \subset A$ и $H_{m+1} = A$. Тогда $A' = [A,A] = [H,A]+[Z_{m+1},A] \subseteq H+Z_m = H_m$. Откуда $H+A' \subseteq H_m \subset A$. Противоречие. Включение $A' \subseteq C(A)$ следует из леммы 1.6.

ki-подгруппу P группы A назовем Е-*полупервичной*, если для любой подгруппы B группы A из включения $[B,A] \subseteq P$ следует, что $B \subseteq P$. Отметим, что включение $[B,A] \subseteq P$ эквивалентно включению $[\overline{B}, A] \subseteq P$.

Пересечение всех Е-полупервичных подгрупп группы A обозначим через $P(A)$. Из определения следует, что $Z(A) \subseteq P(A)$, в частности, $A = P(A)$ для Е-разрешимой группы A.

Элемент a группы A назовем *строго* Е-*нильпотентным*, если любой последовательности $\{\alpha_n \in E(A) \mid n \in \mathbf{N}\}$ найдется такой номер m, что $[\alpha_{2m-1},\alpha_{2m}]\ldots[\alpha_1,\alpha_2]a = 0$.

Следующий результат является аналогом характеризации Левицкого первичного радикала кольца [17, предложение 26.5].

Теорема 1.8. $P(A)$ *состоит из строго* Е*-нильпотентных элементов*.

Доказательство. Пусть $a \notin P(A)$. Поэтому $a \notin P$ для некоторой Е-первичной подгруппы P. Тогда $[\langle a\rangle,A] \nsubseteq P$, т.е. существует такой элемент $a_1 \in [\langle a\rangle,A]$, что $a_1 \notin P$. Если $a_n \notin P$, то $[\langle a_n\rangle,A] \nsubseteq P$. Значит, существует $a_{n+1} \in [\langle a_n\rangle,A]$ со свойством $a_{n+1} \notin P$. В частности, элемент a не является строго Е-нильпотентным.

Обратно, пусть элемент a не является строго Е-нильпотентным, и пусть $T = \{a_n \mid n = 0,1,\ldots\}$ – такая последовательность элементов группы A, что $a_0 = a$ и $0 \neq a_{n+1} \in [\langle a_n\rangle,A]$ для каждого n. Тогда $0 \notin T$ и по лемме Цорна существует ki-подгруппа P, максимальная среди ki-подгрупп, не пересекающихся с T. Пусть теперь B – такая подгруппа в A, что $B \nsubseteq P$. В силу выбора подгруппы P имеем $(\overline{B}+P)\bigcap T \neq \varnothing$. Если теперь $a_n \in \overline{B}+P$, то $a_{n+1} \in [\overline{B}+P,A] = [\overline{B},A]+[P,A]$. Поскольку $[P,A] \subseteq P$, то $[\overline{B},A] \nsubseteq P$. Значит, и $[B,A] \nsubseteq P$. Таким образом, P – Е-полупервичная подгруппа и $a_0 = a \notin P$. Следовательно, $a \notin P(A)$.

Поскольку $Z(A) \subseteq P(A)$, то условие $P(A) = 0$ влечет $Z(A) = 0$. Верно и обратное утверждение. Действительно, пусть $a_0 = a \neq 0$. По условию найдутся такие

$\alpha_n,\beta_n \in E(A)$, что $a_{n+1} = [\alpha_n,\beta_n]a_n \neq 0$, $n = 0,1,\ldots$, т.е. элемент a не является строго E-нильпотентным. Из теоремы 1.8 следует также, что если $P(A) = 0$, то 0 – единственная среди подгрупп H группы A со свойством $L_n(H) = 0$ для некоторого n, где $L_n(H) = [L_{n-1}(H),A]$ при $n \geq 2$, а $L_1(H) = H$.

§ 2. E-разрешимые группы класса 2

Лемма 2.1. *Пусть* $A = \oplus_{j \in I} A_j$, $|I| > 1$. *Тогда*:

1) *если* $A_j \leq \mathrm{fi}\, A$ *для каждого* $j \in I$, *то группа* A E-*разрешима класса* ≤ 2 *в том и только в том случае, когда каждая* A_j – E-*разрешимая группа класса* ≤ 2, *причем если кольцо* $E(A_j)$ *некоммутативно хотя бы для одного* $j \in I$, *то* A – E-*разрешимая группа класса* 2;

2) *если* A – E-*разрешимая группа класса* 2, *то* $\alpha_i(\mathrm{Hom}\,(A_j, A_i)\, A_j) = 0$ *для любого* $\alpha_i \in \mathrm{Hom}\,(A_i, A_k)$, *где* $j, k \in I \setminus \{i\}$;

3) *в группе без кручения* A *любая* ki-*подгруппа ранга* 1 *лежит в* E-*центре.*

Доказательство. 1) очевидно. 2) Пусть θ – проекция A на $\oplus_{k \in I \setminus \{i\}} A_k$ и $\gamma a = g \in A_i$, где $a \in A_j$, $\gamma \in \mathrm{Hom}\,(A_j, A_i)$. Пусть теперь $f \in E(A)$ – такой, что $f\,|\,A_j = \gamma$, $f\,|\,A_i = \alpha_i$ и $f\,|\,A_s = 0$ при $s \neq j, i$. Имеем $[\theta, f]g = \alpha_i g = \alpha_i \gamma a$, $[\theta,f]a = -\gamma a = -g$. Следовательно, $[\theta,f]^2 a = -\alpha_i \gamma a = 0$. Откуда $\alpha_i(\mathrm{Hom}\,(A_j, A_i)A_j) = 0$ в силу произвольности γ и a.

3) Пусть $B \leq \mathrm{ki}\, A$, $r(B) = 1$, $a \in B$ и $G = \langle B \rangle_*$ – чистая подгруппа в A, порожденная B. Если $G \leq \mathrm{fi}\, A$, то утверждение очевидно. Допустим, что $x = \alpha a \notin G$ для некоторого $\alpha \in E(A)$. Если теперь $\beta \in E(A)$, то $[\alpha,\beta]a \in G$. Значит, $n[\alpha,\beta]a = ma$ для некоторых $n,m \in \mathbf{Z}$, причем $n \neq 0$. Допустим, что $m \neq 0$. Тогда $mx = m\alpha a = n\alpha[\alpha,\beta]a = n[\alpha,\alpha\beta]a \in G$. Противоречие. Если же $[\alpha,\beta]a = 0$ для всех $\beta \in E(A)$, то и $[\alpha,\beta]G = 0$, т.е. $G \subseteq Z(A)$.

Если A не является группой без кручения, то утверждение п. 3) леммы 2.1 в общем случае не справедливо. Например, пусть $o(a) = p$, $o(b) = p^3$, $A = \langle a \rangle \oplus \langle b \rangle$ и $H = \langle a+pb \rangle$. Можно непосредственно проверить, что $H \leq \mathrm{ki}\, A$ (см. пример 2 в [1]). Пусть $\gamma(a) = p^2 b$ и $\gamma\,|\,\langle b \rangle = 0$. Тогда если π – проекция группы A на $\langle b \rangle$, то $[\pi,\gamma](a+pb) = (\pi\gamma-\gamma\pi)(a+pb) = p^2 b \neq 0$.

Лемма 2.2. *Пусть* $A = B \oplus G$, *где* $G \leq \mathrm{fi}\, A$. *Тогда условие* E-*разрешимости группы* A *класса* ≤ 2 *равносильно тому, что каждая группа* B, G *является* E-*разрешимой класса* ≤ 2, $[\varphi,\psi](\mathrm{Hom}\,(B,G)B) = 0$ *для любых* $\varphi,\psi \in E(G)$ *и* $\beta(B') = 0$ *для любого* $\beta \in \mathrm{Hom}\,(B,G)$. *Причем при одном из условий* $\mathrm{Hom}\,(B,G) \neq 0$, $B' \neq 0$ *или* $G' \neq 0$ *группа* A – E-*разрешима класса* 2. *В частности, если кольца* $E(B)$ *и* $E(G)$ *коммутативны и* $\mathrm{Hom}\,(B,G) \neq 0$, *то* A – E-*разрешимая группа класса* 2.

Доказательство. Пусть θ: $A \to G$ – проекция, а $f \in E(A)$ – такой, что $f\,|\,B = \beta$, $f\,|\,G = 1_G$. Тогда если $b \in B$, то $[\theta,f]b = \beta b \in A'$, что ввиду $B' \subseteq A'$ доказывает необходимость.

Достаточность. Пусть π: $A \to B$, θ: $A \to G$ – проекции и $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in E(A)$. Имеем

$$[\gamma,\delta] = (\pi + \theta)[\gamma,\delta](\pi + \theta) = \pi[\gamma,\delta]\pi + \theta[\gamma,\delta]\pi + \theta[\gamma,\delta]\theta$$

(учтено, что $\pi[\gamma,\delta]\theta = 0$). Здесь можно считать, что $\theta[\gamma,\delta]\theta \in E(G)$. Поэтому ввиду вполне инвариантности подгруппы G осталось проверить действие $[\alpha,\beta][\gamma,\delta]$ на B. Если $b \in B$, то $[\gamma,\delta]b = [\pi\gamma,\pi\delta]b + \theta\gamma(\pi\delta b) - \theta\delta(\pi\gamma b) + [\theta\gamma,\theta\delta]b$. Последние три слагаемые принадлежат следу B в G, поэтому они аннулируются при действии $[\alpha,\beta]$.

Далее $[\pi\alpha,\pi\beta][\pi\gamma,\pi\delta]b \in B'' = 0$. Следовательно,

$$[\alpha,\beta][\gamma,\delta]b = \theta\alpha(\pi\beta[\pi\gamma,\pi\delta]b) - \theta\beta(\pi\alpha[\pi\gamma,\pi\delta]b) + [\theta\alpha,\theta\beta]([\pi\gamma,\pi\delta]b) = 0,$$

поскольку, ввиду $\pi\alpha|B,\pi\beta|B \in E(B)$, все эти слагаемые принадлежат образу G-подгруппы $[\pi\gamma,\pi\delta]B$.

Лемма 2.3. *Пусть* $A = \oplus_{i \in I} A_i$ *и* $|I| > 1$. *Тогда*:

1) [2, лемма 4] $A \in \mathrm{BL}_2$ *в том и только в том случае, когда все* $A_i \in \mathrm{BL}_2$, $\alpha_i(\mathrm{Hom}\,(A_j, A_i)\,A_j) = 0$, $[\varphi_i,\psi_i](\mathrm{Hom}\,(A_j,A_i)A_j) = 0$ *и* $\beta_i(A_i') = 0$ *для любых* $\alpha_i, \beta_i \in \mathrm{Hom}\,(A_i, A_k)$ *и* $\varphi_i,\psi_i \in E(A_i)$, *где* $j, k \in I \setminus \{i\}$.

2) *Если* $A = \oplus_{i \in I} A_i$, $|I| > 1$, *то* A – Е-*разрешимая группа класса* ≤ 2 *в том и только в том случае, когда каждая* A_i – Е-*разрешимая группа класса* ≤ 2, $\alpha_i(\mathrm{Hom}\,(A_j, A_i)\,A_j) = 0$, $[\varphi_i,\psi_i](\mathrm{Hom}\,(A_j,A_i)A_j) = 0$ *и* $\beta_i(A_i') = 0$ *для любых* $\alpha_i, \beta_i \in \mathrm{Hom}\,(A_i, A_k)$ *и* $\varphi_i,\psi_i \in E(A_i)$, *где* $j, k \in I \setminus \{i\}$, *причем если* $\mathrm{Hom}\,(A_j,A_i) \ne 0$ *хотя бы для одной пары* (i,j) *или* $A_i' \ne 0$ *хотя бы для одной группы* A_i, *то* A – Е-*разрешимая группа класса* 2.

3) *Если* $A \in \mathrm{BL}_2$ *и каждая* A_i *является* Е-*разрешимой группой класса* ≤ 2, *то и сама группа* A Е-*разрешима класса* ≤ 2.

Доказательство. 2) Необходимость вытекает из лемм 2.1, 2.2.

Достаточность. Пусть $B_j = \oplus_{i \in I \setminus \{j\}} A_i$, $\pi\colon A \to A_j$ и $\theta\colon A \to B_j$ – проекции, а $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in E(A)$. Если $a \in A_j$, то

$$[\gamma,\delta]a = [(\pi + \theta)\gamma,(\pi + \theta)\delta]a = [\pi\gamma,\pi\delta]a + [\pi\gamma,\theta\delta]a + [\theta\gamma,\pi\delta]a + [\theta\gamma,\theta\delta]a =$$

$$= [\pi\gamma,\pi\delta]a + \pi\gamma\theta\delta a - \theta\delta\pi\gamma a + \theta\gamma\pi\delta a - \pi\delta\theta\gamma a + \theta\gamma\theta\delta a - \theta\delta\theta\gamma a\,.$$

Здесь $\theta\delta a \in \mathrm{Hom}\,(A_j,B_j)A_j$ и $\pi\gamma \mid B_j \in \mathrm{Hom}\,(B_j,A_j)$, поэтому $\pi\gamma\theta\delta a = 0$. Аналогично $\pi\delta\theta\gamma a = 0$. Далее

$$\theta\delta\pi\gamma a,\ \theta\gamma\pi\delta a,\ \theta\gamma\theta\delta a,\ \theta\delta\theta\gamma a \in \mathrm{Hom}\,(A_j,B_j)A_j,$$

а поскольку в скобках $[\pi\alpha,\theta\beta]$, $[\theta\alpha,\pi\beta]$ в качестве множителей входят гомоморфизмы из $\mathrm{Hom}\,(B_j,A_j)$, то перечисленные элементы аннулируются при действии этих скобок. С учетом того, что $[\pi\alpha,\pi\beta][\pi\gamma,\pi\delta]a = 0$ и $[\theta\alpha,\theta\beta](\mathrm{Hom}\,(A_j,B_j)A_j) = 0$, окончательно получаем $[\alpha,\beta][\gamma,\delta]a = 0$.

Из лемм 2.1, 2.3 следует, что всякая Е-разрешимая группа не содержит прямые слагаемые, разложимые в прямые суммы изоморфных групп. Поэтому делимая группа D является Е-разрешимой тогда и только тогда, когда все ее ненулевые p-компоненты имеют ранг 1, а часть без кручения либо нулевая, либо также имеет ранг 1 (такая группа $D \in \mathrm{BL}_2$).

3) вытекает из 1) и 2).

Теорема 2.4. *Если* A – Е-*разрешимая группа класса* ≤ 2, *то каждая ее ненулевая* p-*компонента* A_p *есть либо циклическая группа, либо прямая сумма циклической группы* B_p *и группы* Z_{p^∞}, *причем в последнем случае, если* $B_p \ne 0$, *то* $A/A_p = p(A/A_p)$.

Доказательство. Вытекает из лемм 2.1 и 2.3.

Следствие 2.5. *Если* A – *периодическая группа, то следующие условия эквивалентны*:

1) A – Е-*разрешимая группа класса* ≤ 2;

2) $A \in \mathrm{BL}_2$;

3) *каждая ненулевая* p-*компонента группы* A *есть либо циклическая группа, либо прямая сумма некоторой* (*возможно, нулевой*) *циклической группы и группы*

Z_{p^∞}. *В частности, если А редуцированна, то ее кольцо эндоморфизмов коммутативно.*

Теорема 2.6. *Если* $0 \neq D$ *– делимая часть группы* A, $A = B \oplus D$, *то* A *–* Е-*разрешимая группа класса* ≤ 2 *тогда и только тогда, когда*

1) *каждая группа* B, D *является* Е-*разрешимой класса* ≤ 2;

2) *Е-коммутант* B' *группы* B *периодичен*;

3) *если обе подгруппы* $D_p, B_p \neq 0$, *то* $B/B_p = p(B/B_p)$;

4) $0 \neq t(D) \neq D$ *влечет периодичность* B, *в этом случае* A *имеет строение* $A = (\oplus_{p \in \Pi} A_p) \oplus D_0$, *где* Π *– некоторое множество простых чисел, каждая* A_p *есть или циклическая группа, или прямая сумма некоторой (возможно, нулевой) циклической p-группы и группы* Z_{p^∞}, *а* $D_0 \cong \mathbf{Q}$.

Доказательство. Необходимость. Если $0 \neq b \in B$ – элемент бесконечного порядка, то ввиду инъективности группы D найдется гомоморфизм $\alpha: B \to D$ со свойством $\alpha b \neq 0$, причем если часть без кручения D_0 группы D отлична от нуля, то α можно выбрать так, чтобы $\alpha b \in D_0$ и $\gamma\alpha b \neq 0$ для некоторого $\gamma \in \mathrm{Hom}\,(D_0, Z_{p^\infty})$. Поэтому в силу леммы 2.1 условие $0 \neq t(D) \neq D$ влечет периодичность B. Наконец, если $B_p \neq 0$, то по теореме 2.4 B_p – циклическая группа, поэтому $B = B_p \oplus E_{(p)}$ для некоторой подгруппы $E_{(p)} \subseteq B$. Если теперь $pE_{(p)} \neq E_{(p)}$, то при условии $D_p \neq 0$ найдется ненулевая композиция гомоморфизмов $E_{(p)} \to B_p \to D_p$, что противоречит лемме 2.1.

Достаточность. Пусть $0 \neq t(D) \neq D$. Имеем $A = B \oplus t(D) \oplus D_0$, где $B \oplus t(D) \leq \mathrm{fi}\, A$, $E(B)$ и $E(t(D))$ – коммутативные кольца. Согласно лемме 2.2, $B \oplus t(D)$ – Е-разрешимая группа класса 2. Поскольку след группы D_0 в $B \oplus t(D)$ содержится в подгруппе $t(D)$, а $E(t(D))$ и $E(D_0)$ – коммутативные кольца, то из леммы 2.2 следует, что A – Е-разрешимая группа класса 2. Если же $D_0 = 0$, то $E(D)$ – коммутативное кольцо и $D \leq \mathrm{fi}\, A$. Далее, если $B = B_p \oplus E_{(p)}$, то по условию $pE_{(p)} = E_{(p)}$ при $D_p \neq 0$.

В силу леммы 1.1 $B' = (E_{(p)})'$ и, значит, $(B')_p = 0$. Откуда ввиду периодичности B' вытекает, что $\beta(B') = 0$ для каждого $\beta \in \mathrm{Hom}\,(B,D)$. Поэтому по лемме 2.2 A – Е-разрешимая группа класса ≤ 2. Пусть, наконец, D – группа без кручения. Тогда $r(D) = 1$, $D \leq \mathrm{fi}\, A$, $E(D)$ – коммутативное кольцо и, так как B' – периодическая группа, $\beta(B') = 0$ для каждого $\beta \in \mathrm{Hom}\,(B,D)$, следовательно, по лемме 2.2 вновь A Е-разрешима класса ≤ 2. Заметим, что если $D \cong \mathbf{Q}$, а B – периодическая группа с коммутативным кольцом эндоморфизмов, то и кольцо $E(A)$ также коммутативно, т.е. в теореме возможен случай, когда A – разрешимая группа класса 1.

Следствие 2.7. *Если* $0 \neq D$ *– делимая часть группы* A, $A = B \oplus D$ *и* $0 \neq B$ *– группа без кручения, то* A *–* Е-*разрешимая группа класса* 2 *в том и только в том случае, когда* $E(B)$, $E(D)$ *– коммутативные кольца.*

Доказательство. Необходимость следует из теоремы 2.6, а достаточность из леммы 2.2. Поскольку $\mathrm{Hom}(B,D) \neq 0$, то A – Е-разрешимая группа класса 2.

Отметим, что делимая группа $D = t(D) \oplus D_0$ имеет коммутативное кольцо эндоморфизмов $E(D)$ тогда и только тогда, когда либо $t(D) = 0$, а $D_0 \cong \mathbf{Q}$, либо $D_0 = 0$, а $D_p \cong Z_{p^\infty}$ для каждого p с условием $D_p \neq 0$.

Следствие 2.8. *Пусть* $A = t(A) \oplus R$ *– расщепляющаяся смешанная группа с ненулевой делимой частью* $D = t(D) \oplus D_0$. *Запишем* A *в виде* $A = T \oplus B \oplus t(D) \oplus D_0$, *где*

$t(A) = T \oplus t(D)$. *Группа* A Е-*разрешима класса* ≤ 2 *в том и только в том случае, когда выполняются следующие условия*:

1) $t(D) \cong \oplus_{p \in \Pi} Z_{p^\infty}$, *а* $r(D_0) \leq 1$;

2) $T = \oplus_{p \in \Pi_1} T_p$, *где каждая* T_p – *ненулевая циклическая p-группа*;

3) *кольцо* $E(B)$ *коммутативно и* $pB = B$ *при* $p \in \Pi' = \Pi \cap \Pi_1$;

4) *если* $B, D_0 \neq 0$, *то* $t(D) = 0$.

Доказательство. Необходимость следует из теоремы 2.6. Достаточность. Имеем $t(A) = T \oplus t(D) \leq \text{fi } A$. Если $D_0 = 0$, то обозначим через G – след группы B в $t(A)$. G можно записать в виде $G = G_1 \oplus G_2$, где $G_1 = \oplus_{p \in \Pi_1 \setminus \Pi} G_p \subseteq T$, $G_2 = \oplus_{p \in \Pi} G_p \subseteq t(D)$ ($pG = G$ при $p \in \Pi'$, поэтому $G_p \cap T_p = 0$ для таких p). Поскольку $\oplus_{p \in \Pi_1 \setminus \Pi} T_p \leq \text{fi } t(A)$ и кольца $E(T)$, $E(t(D))$ коммутативны, то $[\varphi, \psi]G = 0$ для любых $\varphi, \psi \in E(t(A))$. Поэтому A – Е-разрешимая группа класса ≤ 2 по лемме 2.2. Если же $B \neq 0$ и $D_0 \cong \mathbf{Q}$, то $A = B \oplus T \oplus D_0$, где $T \oplus D_0 \leq \text{fi } A$ и $E(B)$, $E(T \oplus D_0)$ – коммутативные кольца. Вновь по лемме 2.2 A – Е-разрешима класса 2. Наконец, при $B = 0$ имеем $A = T \oplus D$, где $E(T)$, $E(t(D))$ – коммутативные кольца и D – Е-разрешимая группа класса ≤ 2. Поэтому и в этом случае A – Е-разрешимая группа класса ≤ 2.

Теорема 2.9. 1) *Пусть* A – *вполне разложимая группа без кручения*, $A = B \oplus D$, *где* D – *делимая часть группы* A. *Тогда* A – Е-*разрешимая группа класса* ≤ 2 *в том и только в том случае*, *когда*:

а) *если* $D \neq 0$, *то* $r(D) = 1$, *а* B – *прямая сумма групп ранга* 1 *несравнимых между собой типов*;

б) *если* $D = 0$, *то* $A = \oplus_{i \in I} A_i$, *где типы прямых слагаемых ранга* 1 *групп* A_i *и* A_j *не сравнимы при различных* i *и* j, *причем либо* $r(A_i) = 1$, *либо* $A_i = B_i \oplus C_i$, $r(B_i) = 1$, C_i – *прямая сумма групп ранга* 1 *несравнимых между собой типов больших* $t(B_i)$.

2) *Пусть* A – *сепарабельная* (*векторная группа*) *без кручения*, $A = B \oplus D$, *где* D – *делимая часть группы* A. *Тогда* A – Е-*разрешимая группа класса* ≤ 2 *в том и только в том случае*, *когда*:

а) *если* $D \neq 0$, *то* $r(D) = 1$, *а* B – *прямая сумма* (*прямое произведение*) *групп ранга* 1 *несравнимых между собой типов*;

б) *если* $D = 0$, *то* $A = \oplus_{i \in I} A_i$ ($A = \prod_{i \in I} A_i$), *типы прямых слагаемых ранга* 1 *групп* A_i *и* A_j *не сравнимы при различных* i *и* j, *причем либо* $r(A_i) = 1$, *либо* $A_i = B_i \oplus C_i$, $r(B_i) = 1$, C_i – *сепарабельная* (*векторная*) *группа*, *типы прямых слагаемых ранга* 1 *которой несравнимы между собой и больше* $t(B_i)$.

Доказательство. 1) Необходимость следует из леммы 2.2, поскольку для прямого слагаемого $N_1 \oplus N_2 \oplus N_3$ группы A, где $r(N_i) = 1$, невозможны следующие соотношения для типов: $t(N_1) = t(N_2)$ или $t(N_1) \leq t(N_2) \leq t(N_3)$. Достаточность в случае а) вытекает из леммы 2.2, поскольку $D \leq \text{fi } A$ и $E(B)$, $E(D)$ – коммутативные кольца. В случае б) достаточность следует из того, что $A_i \leq \text{fi } A$, где согласно лемме 2.2 A_i – Е-разрешимые группы класса ≤ 2.

2) Прямые слагаемые сепарабельных групп являются сепарабельными группами [3, теорема 87.5]. Далее, если $\Omega(A)$ – множество типов всех прямых слагаемых ранга 1 группы A, то $\Omega(A)$ можно разбить на классы эквивалентности

$\Omega(A) = \cup_{i \in I}\Omega_i$, где типы $s, t \in \Omega(A)$ считаются эквивалентными, если существуют $t_1,\ldots,t_n \in \Omega(A)$, такие, что типы t_i и t_{i+1} сравнимы для всех $i = 1,\ldots,n$ (здесь $t_0 = s$, $t_{n+1} = t$). В этом случае $A = \oplus_{i \in I} A_i$, $\Omega(A_i) = \Omega_i$ и $A_i \leq \mathrm{fi}\ A$, т.е. типы из $\Omega(A_i)$ и $\Omega(A_j)$ не сравнимы при $i \neq j$. Для векторных групп можно использовать лемму: если η – ненулевой гомоморфизм векторной группы $V = \prod_{i \in I} R_i$ в векторную группу $W = \prod_{j \in J} S_j$ (R_i и S_j – группы ранга 1), то $t(R_i) \leq t(S_j)$ для некоторых $i \in I$ и $j \in J$ [3, лемма 96.1]. С учетом этих фактов оставшиеся утверждения доказываются аналогично 1).

Теорема 2.10. *Пусть A – копериодическая группа, D – ее делимая часть, $A = B\oplus D$, $D = t(D)\oplus D_0$. Тогда A – E-разрешимая группа класса ≤ 2 в том и только в том случае, когда A алгебраически компактна, $D = (\oplus_{p \in \Pi} Z_{p^\infty})\oplus D_0$, где Π – некоторое множество простых чисел, $r(D_0) \leq 1$ и, кроме того:*

1) если $0 \neq t(D) \neq D$, то $B = \oplus_{p\in\Pi_1} B_p$, каждая B_p – циклическая p-группа и Π_1 – некоторое конечное множество простых чисел;

2) если $t(D) = 0$ или $D_0 = 0$, то $B = G\oplus C$, $G = \Pi_{p\in\Pi_1} B_p$, каждая B_p является (при $\Pi_1 \neq \varnothing$) ненулевой циклической p-группой, $C \cong \prod_{p\in\Pi_2} \widehat{Z}_p$, Π_1 и Π_2 – такие множества простых чисел, что $\Pi\cap\Pi_1\cap\Pi_2 = \varnothing$, причем если $D \neq 0$, то множество $\Pi_1\cap\Pi_2$ конечно.

Доказательство. Необходимость. Имеем $A^1 = D\oplus B^1$. Если $B_p \neq 0$, $B = B_p\oplus E_{(p)}$, то $B^1 = E^1_{(p)}$. Отсюда следует, что B^1 – делимая подгруппа без кручения в B и, значит, $B^1 = 0$, $A^1 = D$. Поэтому группа A алгебраически компактна [3, предложение 54.2]. Если $0 \neq t(D) \neq D$, то по теореме 2.6 B – периодическая группа. Всякая периодическая алгебраически компактная группа ограниченная [3, следствие 40.3], это доказывает 1).

2) Замыкание $G = (t(B))^-$ в $\mathbf{Z}$-адической топологии периодической части $t(B)$ выделяется в B прямым слагаемым, $B = G\oplus C$, ($\Pi_1 = \{p \in P \mid B_p \neq 0\}$). Если D_p, $B_p \neq 0$, то $pC = C$, поэтому $\Pi\cap\Pi_1\cap\Pi_2 = \varnothing$. Если множество $\Pi_1\cap\Pi_2$ бесконечно, то след группы C в G является смешанной группой, а это при условии $D \neq 0$ в силу леммы 1.1 противоречит теореме 2.6.

Достаточность. В случае 1) A – E-разрешимая группа класса ≤ 2 по теореме 2.6. Если выполнены условия 2), то $G \leq \mathrm{fi}\ (G\oplus C)$ и $E(G)$, $E(C)$ – коммутативные кольца. Поэтому по лемме 2.2 $G\oplus C$ – E-разрешимая группа класса ≤ 2. Пусть $D \neq 0$. По лемме 1.1 $(G\oplus C)' = \mathrm{Hom}(C,G)C$. Так как множество $\Pi_1\cap\Pi_2$ конечно, то $(G\oplus C)'$ – периодическая группа и $\beta(G\oplus C)' = 0$ для каждого $\beta \in \mathrm{Hom}(G\oplus C,D)$ в силу условия $\Pi\cap\Pi_1\cap\Pi_2 = \varnothing$. Следовательно, по лемме 2.2 A – E-разрешимая группа класса ≤ 2.

В утверждениях 2.7 – 2.10 условие A – E-разрешимая группа класса ≤ 2 равносильно условию $A \in \mathrm{BL}_2$, это можно вывести из их доказательств или сравнивая с соответствующими результатами из [2, 5].

В заключение отметим, что помимо коммутаторно инвариантных подгрупп в [18 – 21] автор изучал проективно инвариантные подгруппы, т.е. подгруппы, инвариантные относительно проекций.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чехлов А.Р.* О свойствах центрально и коммутаторно инвариантных подгрупп абелевых групп // Вестник ТГУ. Математика и механика. 2009. № 2(6). С. 85 – 99.
2. *Чехлов А.Р.* О скобке Ли эндоморфизмов абелевых групп // Вестник ТГУ. Математика и механика. 2009. № 2(6). С. 78 – 84.
3. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1974. Т. 1; 1977. Т. 2.
4. *Пунинский Г.Е.*, *Туганбаев А.А*. Кольца и модули. М.: Союз, 1998.
5. *Чехлов А.Р.* Об абелевых группах с нормальным кольцом эндоморфизмов // Алгебра и логика. 2009. Т. 48. № 4. С. 520 – 539.
6. *Чехлов А.Р.* О некоторых классах абелевых групп // Абелевы группы и модули. Томск, 1984. С. 137 – 152.
7. *Чехлов А.Р.* Квазисервантно инъективные абелевы группы без кручения // Матем. заметки. 1989. Т. 46. № 3. С. 93 – 99.
8. 8.*Чехлов А.Р.* Связные квазисервантно инъективные абелевы группы // Изв. вузов. Математика. 1989. № 10. С. 84 – 87.
9. *Чехлов А.Р.* Вполне транзитивные группы конечного *p*-ранга // Алгебра и логика. 2001. Т. 40. № 6. С. 698 – 715.
10. *Крылов П.А.*, *Чехлов А.Р.* Абелевы группы без кручения с большим числом эндоморфизмов // Труды Института математики и механики. 2001. Т. 7. № 2. С. 194 – 207.
11. *Чехлов А.Р.* О прямых произведениях и прямых суммах абелевых QCPI-групп без кручения // Изв. вузов. Математика. 1990. № 4. С. 58 – 67.
12. *Чехлов А.Р.* Об абелевых CS-группах без кручения // Изв. вузов. Математика. 1990. № 3. С. 84 – 87.
13. *Чехлов А.Р.* Об одном классе эндотранзитивных групп // Матем. заметки. 2001. Т. 69. № 6. С. 944 – 949.
14. *Чехлов А.Р.* О разложимых вполне транзитивных группах без кручения // Сиб. матем. журн. 2001. Т. 42. № 3. С. 714 – 719.
15. *Чехлов А.Р.* О квазиполных смешанных группах // Фундамент. и прикл. матем. 2002. Т. 8. № 4. С. 1215 – 1224.
16. *Чехлов А.Р.* О слабо квазисервантно инъективных группах // Матем. заметки. 2007. Т. 81. № 3. С. 434 – 447.
17. *Фейс К.* Алгебра: кольца, модули и категории. М.: Мир, 1979. Т. 2.
18. *Чехлов А.Р.* Свойства подгрупп абелевых групп, инвариантных относительно проекций // Вестник ТГУ. Математика и механика. 2008. № 1(2). С. 76 – 82.
19. *Чехлов А.Р.* О подгруппах абелевых групп, инвариантных относительно проекций // Фундамент. и прикл. матем. 2008. Т. 14. № 6. С. 211 – 218.
20. *Чехлов А.Р.* О проективно инвариантных подгруппах абелевых групп // Вестник ТГУ. Математика и механика. 2009. № 1(5). С. 31 – 36.
21. *Чехлов А.Р.* Сепарабельные и векторные группы, проективно инвариантные подгруппы которых вполне инвариантны // Сиб. матем. журн. 2009. Т. 50. № 4. С. 942 – 953.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

ЧЕХЛОВ Андрей Ростиславович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры Томского государственного университета. E-mail: cheklov@math.tsu.ru

Статья принята в печать 22.12.2009 г.