МЕХАНИКА

УДК 539.3

Г.Е. Берикханова, Б.Т. Жумагулов, Б.Е. Кангужин

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОЛЕБАНИЙ ПАКЕТА ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН С УЧЕТОМ ТОЧЕЧНЫХ СВЯЗЕЙ

В работе предложена математическая модель о вынужденных колебаниях пакета плоских пластин с точечными упругими связями. Показана непротиворечивость предлагаемой математической модели. Предложен алгоритм расчета полученной математической модели и приведены иллюстративные примеры расчета о вынужденных колебаниях в случае кривой пластины.

Ключевые слова: *математическая модель*, *колебание пластин*, *упругая задача*, *точечная связь*, *потенциалы нулевого радиуса*, *собственные колебания.*

1. Постановка задачи и полученные результаты

В данной работе изучается упругая задача о вынужденных колебаниях пакета прямоугольных пластин. Подобная задача о собственных колебаниях изучалась в монографии [1, с. 42], где предлагалась вариационная постановка и учитывались упругие точечные опоры и сосредоточенные массы.

Рассмотрим пакет однородных упругих изотропных прямоугольных пластин, соединенных внутренними жесткими и упругими стойками (пружинами) и нагруженных сосредоточенными массами. Пластины имеют постоянную толщину h и внутренние точечные жесткие и упругие опоры шарнирного типа, которые могут, имеет защемления. Расположение точечных связей и присоединенных масс произвольно. Массы стоек можно рассматривать как сосредоточенные. Граничные условия для каждой стороны пластин одни из следующих: шарнирное опирание, защемление или свободный край. Требуется определить собственные частоты и формы поперечных колебаний пакета пластин.

При определении частот колебаний будем считать пластину *тонкой* (толщина мала по сравнению с остальными размерами).

Предполагая справедливость гипотез Кирхгофа – Лява, запишем известные из теории упругости зависимости между перемещениями и деформациями [2]:

$$\varepsilon_{x_i} = -z_i \frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_{y_i} = -z_i \frac{\partial^2 W_i}{\partial y^2}, \quad \varepsilon_{x_i y_i} = -2 z_i \frac{\partial^2 W_i}{\partial x \partial y}. \qquad (1)$$

Здесь z_i – координата точки в направлении, перпендикулярном к срединной поверхности, $\varepsilon_{x_i}, \varepsilon_{y_i}, \varepsilon_{x_i y_i}$ – компоненты тензора деформаций пакета пластин.

Компоненты напряжений соответственно равны

$$G_{x_i} = -\frac{Ez_i}{1-\nu_i^2}\left[\frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2} + \nu_i \frac{\partial^2 W_i}{\partial y^2}\right],$$

$$G_{y_i} = -\frac{Ez_i}{1-\nu_i^2}\left[\frac{\partial^2 W_i}{\partial y^2} + \nu_i \frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2}\right], \tag{2}$$

$$G_{x_i y_i} = G_{y_i x_i} = -\frac{Ez_i}{1+\nu_i}\frac{\partial^2 W_i}{\partial x \partial y},$$

где E – модуль Юнга, а ν_i – коэффициент Пуассона для i-й пластины. Нормальная компонента G_{z_i} при поперечном изгибе мала по сравнению с G_{x_i} и G_{y_i}, поэтому полагаем $G_{z_i} = 0$.

Потенциальная энергия, накапливаемая пластиной при упругой деформации, согласно указанным выше допущениям имеет вид

$$G = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\iiint\limits_{V_i}\left(G_{x_i}\varepsilon_{x_i} + G_{y_i}\varepsilon_{y_i} + G_{x_i y_i}\varepsilon_{x_i y_i}\right)dxdydz, \tag{3}$$

где V_i – объем i-й пластины. Подставляя в (3) значения компонент деформации и напряжений (1), (2) и учитывая потенциальную энергию упругих опор, получим

$$G = \frac{D_i}{2}\int_0^a\int_0^b\left[\left(\frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_i}{\partial y^2}\right)^2 - 2(1-\nu_i)\left(\frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2}\frac{\partial^2 W_i}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 W_i}{\partial x \partial y}\right)^2\right)\right]dxdy +$$

$$+\frac{1}{2}C_i^{l'}W_i^2\left(x_i^{l'}, y_i^{l'}\right) + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{L}C_i^l\left(W_i\left(x_i^l, y_i^l\right) - W_{i+1}\left(x_i^l, y_i^l\right)\right)^2. \tag{5}$$

Здесь $D_i = Eh_i^3\left[12\left(1-\nu_i^2\right)\right]^{-1}$ – цилиндрическая жесткость пластины, а $C_i^{l'}, x_i^{l'}, y_i^{l'}$ – жесткость и координаты упругой опоры. Двойные интегралы в (5) берутся по поверхности нейтрального слоя i-й пластины.

Кинетическая энергия всей пластины с учетом присоединенных масс задается равенством

$$T = \frac{\rho h_i}{2}\int_0^a\int_0^b\left(\frac{\partial W_i}{\partial t}\right)^2 dxdy + \frac{1}{2}\sum_{q=1}^{Q}M_i^q\left(\frac{\partial W_i\left(x_i^q, y_i^q, t\right)}{\partial t}\right)^2, \tag{6}$$

где ρ – плотность материала пластины, x_i^q, y_i^q – координаты q-й присоединенной массы.

Рассмотрим функционал Остроградского – Гамильтона

$$L = \int_{t_H}^{t_b}(T-G)\,dt$$

на совокупности главных колебаний. Они должны удовлетворять условиям шарнирного закрепления жестких опор пластины в S точках:

$$W_i\left(x_i^s, y_i^s, t\right) = 0 \quad (s = 1, ..., S),$$

где x_i^s, y_i^s – координаты s-й внутренней опоры. Если, кроме того, некоторые жесткие опоры защемлены в направлениях α_s относительно оси $0X$, то к (7) добавляется условие

$$\frac{\partial W_i\left(x_i^s, y_i^s, t\right)}{\partial \alpha_s} = 0 \quad \left(s = 1, 2, ..., s_\alpha; \quad 0 \le \alpha_s \le \frac{\pi}{2}\right), \tag{8}$$

причем число защемлений s_α не обязательно равно числу опор S. Таким образом, данная модель включает различные сочетания опор и защемлений.

Основным результатом работы является теорема 1.

Теорема 1. *Колебание однородной упругой изотропной пластины пакета плоских пластин с постоянной толщиной* h, *ограниченной прямоугольным контуром с размерами* a, b, *к которой точечно присоединены массы* M_q *в* Q *внутренних точках, и в* l' *внутренних точках она упруго оперта, а также во внутренних точках* $\left(x^s, y^s\right)$ *жестко оперта или упруго защемлена, описывается дифференциальным уравнением*

$$\rho h_i \frac{\partial^2 W_i}{\partial t^2} - D\Delta^2 W = 0 \quad \{0 < x_i < a, \ \ 0 < y_i < b, \ \ t_H < t < t_B, \ \ (q = 1, ..., Q)\}, \tag{9}$$

которое выполняется во всех точках пластины, где нет точечных связей, а в точечных связях справедливы многоточечные краевые условия:

$$M_{iq} \left.\frac{\partial^2 W_i}{\partial t^2}\right|_{\left(x_i^q, y_i^q\right)} - 2D_i(1-\nu_i)\times$$
$$\times\left(\left.\frac{\partial^2 W_i}{\partial x \partial y}\right|_{x_i^q-0, y_i^q-0} - \left.\frac{\partial^2 W_i}{\partial x \partial y}\right|_{x_i^q-0, y_i^q+0} - \left.\frac{\partial^2 W_i}{\partial x \partial y}\right|_{x_i^q+0, y_i^q-0} + \left.\frac{\partial^2 W_i}{\partial x \partial y}\right|_{x_i^q+0, y_i^q+0} \right) = 0\,; \tag{10}$$

$$C_i^{l'} W_i\left(x_i^{l'}, y_i^{l'}, t\right) - 2D_i(1-\nu_i)\times$$
$$\times\left(\left.\frac{\partial^2 W_i}{\partial x \partial y}\right|_{x_i^{l'}-0, y_i^{l'}-0} - \left.\frac{\partial^2 W_i}{\partial x \partial y}\right|_{x_i^{l'}-0, y_i^{l'}+0} - \left.\frac{\partial^2 W_i}{\partial x \partial y}\right|_{x_i^{l'}+0, y_i^{l'}-0} + \left.\frac{\partial^2 W_i}{\partial x \partial y}\right|_{x_i^{l'}+0, y_i^{l'}+0} \right) = 0\,. \tag{11}$$

Для единственности решения к указанным в теореме 1 многоточечным условиям надо добавить граничные условия

$$W_i|_{\Omega_i} = 0, \qquad \left.\frac{\partial W_i}{\partial n_i}\right|_{\partial\Omega_i} = 0\,; \tag{12}$$

$$W_i|_{t_H} = W_1(x_i, y_i), \qquad W_i|_{t_B} = W_2(x_i, y_i)\,. \tag{13}$$

В результате получаем краевую задачу для уравнения (9) в многосвязной области

$$\Omega_i = \bigcup_{q=1}^{Q}\left(x_i^q, y_i^q\right)\bigcup_{l'=1}^{L'}\left(x_i^{l'}, y_i^{l'}\right)\bigcup_{s=1}^{S}\left(x_i^s, y_i^s\right).$$

Здесь $\left(x_i^q, y_i^q\right)$ – внутренние точки к которым прикреплена точечная масса M_{iq}, $(x_i^{l'}, y_i^{l'})$ – внутренние точки, где наложены упругие точечные связи, (x_i^s, y_i^s) – внутренние точки, где пластина жестко оперта или упруго защемлена.

В каждой точке $\left(x_i^q, y_i^q\right)$, к которым прикреплена точечная масса M_{iq}, добавляется условие

$$M_{iq}\left.\frac{\partial^2 W_i}{\partial t^2}\right|_{\left(x_i^q, y_i^q\right)} - 2D_i(1-\nu_i)\times$$
$$\times\left(\left.\frac{\partial^2 W_i}{\partial x\partial y}\right|_{x_i^q-0,\, y_i^q-0} - \left.\frac{\partial^2 W_i}{\partial x\partial y}\right|_{x_i^q-0,\, y_i^q+0} - \left.\frac{\partial^2 W_i}{\partial x\partial y}\right|_{x_i^q+0,\, y_i^q-0} + \left.\frac{\partial^2 W_i}{\partial x\partial y}\right|_{x_i^q+0,\, y_i^q+0}\right) = 0.$$

В каждой точке $(x^{l'}, y^{l'})$, где наложена точечная упругая связь, добавляется условие

$$C_i^{l'} W_i\left(x_i^{l'}, y_i^{l'}, t\right) - 2D_i(1-\nu_i)\times$$
$$\times\left(\left.\frac{\partial^2 W_i}{\partial x\partial y}\right|_{x_i^{l'}-0,\, y_i^{l'}-0} - \left.\frac{\partial^2 W_i}{\partial x\partial y}\right|_{x_i^{l'}-0,\, y_i^{l'}+0} - \left.\frac{\partial^2 W_i}{\partial x\partial y}\right|_{x_i^{l'}+0,\, y_i^{l'}-0} + \left.\frac{\partial^2 W_i}{\partial x\partial y}\right|_{x_i^{l'}+0,\, y_i^{l'}+0}\right) = 0.$$

В точках $\left(x_i^s, y_i^s\right)$, где пластина жестко оперта, ставится условие

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial^2 W_i}{\partial x\partial y}\right|_{x_i^s-0,\, y_i^s-0} - \left.\frac{\partial^2 W_i}{\partial x\partial y}\right|_{x_i^s-0,\, y_i^s+0} - \left.\frac{\partial^2 W_i}{\partial x\partial y}\right|_{x_i^s+0,\, y_i^s-0} + \left.\frac{\partial^2 W_i}{\partial x\partial y}\right|_{x_i^s+0,\, y_i^s+0} = 0; \\ W_i\left(x_i^s, y_i^s\right) = 0 \quad (s = 1, \ldots, S). \end{cases}$$

2. Вспомогательные утверждения и обоснование теоремы

Соотношения (7), (8) представляют собой задачу на условный экстремум. Учитывая связи (7) и (8), с помощью множителей Лагранжа получим окончательное вариационное уравнение

$$\delta\left[\sum_{s=1}^{S}\int_{t_H}^{t_b}\lambda_s W_i\left(x_i^s, y_i^s, t\right)dt + \sum_{s=1}^{S}\int_{t_H}^{t_b}\lambda_s^{\alpha}\frac{\partial W_i\left(x_i^s, y_i^s, t\right)}{\partial\alpha_s}dt + \int_{t_H}^{t_b}(G-T)\,dt\right] = 0, \quad (14)$$

в котором $\lambda_s, \lambda_s^{\alpha}$ – множители Лагранжа, δ – вариация по перемещениям. Соотношение (14) представляет собой в некотором смысле аналог уравнения Рауса.

Выпишем соответствующую систему дифференциальных уравнений Эйлера – Лагранжа. Для удобства представим кинетическую T и потенциальную энергию G в виде сумм

$$G = G_1 + G_2 + G_3, \quad T = T_4 + T_5,$$

где

$$G_1 = \frac{D_i}{2}\int_0^a\int_0^b\left[\left(\frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W_i}{\partial y^2}\right)^2 - 2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2}\frac{\partial^2 W_i}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 W_i}{\partial x\partial y}\right)^2\right)\right]dxdy,$$

$$G_2 = \frac{1}{2}\sum_{l'=1}^{L'} C_i^{l'} W_i^2\left(x_i^{l'}, y_i^{l'}\right), \quad G_3 = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{L} C_i^l\left(W_i\left(x_i^l, y_i^l\right) - W_{i+1}\left(x_i^l, y_i^l\right)\right)^2,$$

$$T_4 = \frac{\rho h_i}{2}\int_0^a\int_0^b\left(\frac{\partial W_i}{\partial t}\right)^2 dxdy, \quad T_5 = \frac{1}{2}\sum_{q=1}^{Q} M_i^q\left(\frac{\partial W_i\left(x_i^q, y_i^q, t\right)}{\partial t}\right)^2.$$

Тогда функционал Остроградского – Гамильтона разлагается следующим образом:

$$L = \int_{t_H}^{t_B}(T-G)\,dt = \int_{t_H}^{t_B} T_4 dt + \int_{t_H}^{t_B} T_5 dt - \int_{t_H}^{t_B} G_1 dt - \int_{t_H}^{t_B} G_2 dt - \int_{t_H}^{t_B} G_3 dt.$$

Нам удобно ввести функционалы по формулам

$$I_1 = \int_{t_H}^{t_B} G_1 dt, \quad I_2 = \int_{t_H}^{t_B} G_2 dt, \quad I_3 = \int_{t_H}^{t_B} G_3 dt, \quad I_4 = \int_{t_H}^{t_B} T_4 dt, \quad I_5 = \int_{t_H}^{t_B} T_5 dt$$

и выписать отдельно для каждого функционала соответствующие уравнения Эйлера – Лагранжа.

Выпишем уравнение Эйлера – Лагранжа, соответствующее функционалу I_1. Рассмотрим точку W из области определения функционала I и пусть U_i произвольный элемент i-й области определения функционала I, подчиненный условию

$$U_i\big|_{\partial\Omega_i} = 0, \quad \frac{\partial U_i}{\partial n_i}\Big|_{\partial\Omega_i} = 0,$$

где Ω_i – обозначает i-ю прямоугольную пластину, а $\partial\Omega_i$ – ее границы. Здесь $\frac{\partial}{\partial n_i}$ означает производную по нормали в граничной точке.

Функции $U_i(x_i, y_i, t)$ будем называть возмущениями. Сместимся из W_i в точку $W_i + \varepsilon U_i$, где ε – малый параметр. Здесь функция U_i задает «направление смещения» из точки W_i. Теперь находим выражение $\frac{1}{\varepsilon}(I[W_i + \varepsilon U_i] - I[W_i])$ и, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим функцию

$$\frac{dI[W_i+\varepsilon U_i]}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left(I[W_i+\varepsilon U_i]-I[W_i]\right)=\int\limits_{[t_H,t_B]\times\Omega_i}\frac{\delta I}{\delta W_i}\cdot\delta W_i\,dt\,dx\,dy,$$

которую называют производной функционала I в точке W_i по направлению U_i [3, с. 340].

Перейдем к аналитическому вычислению производной $\frac{\delta I_j}{\delta W_i}$ при $j=1,2,3,4,5$. Вычислим её при $j=1$.

$$I_1[W_i+2U_i]-I_1[W_i]=D_i\varepsilon\int\limits_{t_H}^{t_B}\left\{\int_0^a\int_0^b\left[\left(\frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W_i}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 U_i}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U_i}{\partial y^2}\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-(1-\nu_i)\left(\frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2}\frac{\partial^2 U_i}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U_i}{\partial x^2}\frac{\partial^2 W_i}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2 W_i}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 U_i}{\partial x\partial y}\right)\right]dxdy\right\}dt+\overset{=}{o}(\varepsilon),\qquad(15)$$

где $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{\overset{=}{o}(\varepsilon)}{\varepsilon}=0$.

Наша цель – избавиться от производных возмущения $U_i(x_i,y_i,t)$. Для этого нам придется неоднократно применять формулу интегрирования по частям. Отметим, что функция $W_i(x_i,y_i,t)$ по переменным (x_i,y_i) при наложении точечных связей и масс может в этих точках терять гладкость. Поэтому при интегрировании по частям необходимо учесть, что функция $W_i(x_i,y_i,t)$ или ее частные производные могут иметь разрывы первого рода в точках, где наложены точечные связи или массы. Допустим, что к внутренней точке $\left(x_i^q,y_i^q\right)$ присоединена точечная масса M_{q_i} или она либо упруго, либо жестко оперта. Покажем как можно применять формулу интегрирования по частям, если функция $W_i(x_i,y_i,t)$ или ее частные производные теряют гладкость в этой точке $\left(x_i^q,y_i^q\right)$. Для наглядности рассмотрим один из интегралов, присутствующих в правой части соотношения (15).

К примеру, возьмем интеграл

$$A=\int\limits_{t_H}^{t_B}\left\{\int\limits_0^a\int\limits_0^b\frac{\partial^2 W_i}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 U_i}{\partial x\partial y}dxdy\right\}dt=\int\limits_{t_H}^{t_B}\left\{\int\limits_0^a\left[\int\limits_0^b\frac{\partial^2 W_i}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 U_i}{\partial x\partial y}dy\right]dx\right\}dt=$$

$$=\int\limits_{t_H}^{t_B}\left\{\int\limits_0^a\left[\int\limits_0^{y_i^q-0}\frac{\partial^2 W_i}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 U_i}{\partial x\partial y}dy\right]dx\right\}dt+\int\limits_{t_H}^{t_B}\left\{\int\limits_0^a\left[\int\limits_{y_i^q+0}^{b}\frac{\partial^2 W_i}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 U_i}{\partial x\partial y}dy\right]dx\right\}dt=$$

$$=\int\limits_{t_H}^{t_B}\left\{\int\limits_0^a\left[\frac{\partial^2 W_i}{\partial x\partial y}\frac{\partial U_i}{\partial x}\Bigg|_0^{y_i^q-0}-\int\limits_0^{y_i^q-0}\frac{\partial^3 W_i}{\partial x\partial y^2}\frac{\partial U_i}{\partial x}dy\right]dx\right\}dt+$$

$$+\int\limits_{t_H}^{t_B}\left\{\int\limits_0^a\left[\frac{\partial^2 W_i}{\partial x\partial y}\frac{\partial U_i}{\partial x}\Bigg|_{y_i^q+0}^{b}-\int\limits_{y_i^q+0}^{b}\frac{\partial^3 W_i}{\partial x\partial y^2}\frac{\partial U_i}{\partial x}dy\right]dx\right\}dt.$$

Согласно выбору, возмущение $U_i(x_i, y_i, t)$ удовлетворяет граничным условиям $\left.\frac{\partial U_i}{\partial x}\right|_{y=0}$ и $\left.\frac{\partial U_i}{\partial x}\right|_{y=b}$ равным нулю. В силу произвольности возмущение $U_i(x_i, y_i, t)$ можно считать достаточно гладким, то есть

$$\left.\frac{\partial U_i}{\partial x}\right|_{y_i^q-0} = \left.\frac{\partial U_i}{\partial x}\right|_{y_i^q+0}.$$

В результате

$$A=\int_{t_H}^{t_B}\left\{\int_0^a\left(\left.\frac{\partial^2 W_i}{\partial x\partial y}\right|_{y_i^q-0}-\left.\frac{\partial^2 W_i}{\partial x\partial y}\right|_{y_i^q+0}\right)\left.\frac{\partial U_i}{\partial x}\right|_{y_i^q}dx\right\}dt-\int_{t_H}^{t_B}\left\{\int_0^a\left[\int_0^b\frac{\partial^3 W_i}{\partial x\partial y^2}\frac{\partial U_i}{\partial x}dy\right]dx\right\}dt=$$

$$=\int_{t_H}^{t_B}\left\{\int_0^{x^q-0}\left(\left.\frac{\partial^2 W_i}{\partial x\partial y}\right|_{y_i^q-0}-\left.\frac{\partial^2 W_i}{\partial x\partial y}\right|_{y_i^q+0}\right)\left.\frac{\partial U_i}{\partial x}\right|_{y_i^q}dx\right\}dt+\int_{t_H}^{t_B}\left\{\int_{x_i^q+0}^{a}\left(\left.\frac{\partial^2 W_i}{\partial x\partial y}\right|_{y_i^q-0}-\left.\frac{\partial^2 W_i}{\partial x\partial y}\right|_{y_i^q+0}\right)\left.\frac{\partial U_i}{\partial x}\right|_{y_i^q}dx\right\}dt-$$

$$-\int_{t_H}^{t_B}\left\{\int_0^b\left[\int_0^{x_i^q-0}\frac{\partial^3 W_i}{\partial x\partial y^2}\frac{\partial U_i}{\partial x}dx\right]dy\right\}dt-\int_{t_H}^{t_B}\left\{\int_0^b\left[\int_{x_i^q+0}^{a}\frac{\partial^3 W_i}{\partial x\partial y^2}\frac{\partial U_i}{\partial x}dx\right]dy\right\}dt=$$

$$=\int_{t_H}^{t_B}\left\{\left[\left.\frac{\partial^2 W_i}{\partial x\partial y}\right|_{y_i^q-0}-\left.\frac{\partial^2 W_i}{\partial x\partial y}\right|_{y_i^q+0}U_i\big|_{y_i^q}\right]_0^{x_i^q-0}\right\}dt-\int_{t_H}^{t_B}\left\{\int_0^{x_i^q-0}\left(\left.\frac{\partial^3 W_i}{\partial x^2\partial y}\right|_{y_i^q-0}-\left.\frac{\partial^3 W_i}{\partial x^2\partial y}\right|_{y_i^q+0}\right)U_i\big|_{y_i^q}dx\right\}dt+$$

$$+\int_{t_H}^{t_B}\left\{\left[\left.\frac{\partial^2 W_i}{\partial x\partial y}\right|_{y_i^q-0}-\left.\frac{\partial^2 W_i}{\partial x\partial y}\right|_{y_i^q+0}U_i\big|_{y_i^q}\right]_{x_i^q+0}^{a}\right\}dt-\int_{t_H}^{t_B}\left\{\int_{x_i^q+0}^{a}\left(\left.\frac{\partial^3 W_i}{\partial x^2\partial y}\right|_{y_i^q-0}-\left.\frac{\partial^3 W_i}{\partial x^2\partial y}\right|_{y_i^q+0}\right)U_i\big|_{y_i^q}dx\right\}dt-$$

$$-\int_{t_H}^{t_B}\left\{\int_0^b\left[\frac{\partial^3 W_i}{\partial x\partial y^2}U_i\right]_0^{x_i^q-0}dy\right\}dt+\int_{t_H}^{t_B}\left\{\int_0^b\left[\int_0^{x_i^q-0}\frac{\partial^4 W_i}{\partial x^2\partial y^2}U_i dx\right]dy\right\}dt-$$

$$-\int_{t_H}^{t_B}\left\{\int_0^b\left[\frac{\partial^3 W_i}{\partial x\partial y^2}U_i\right]_{x_i^q+0}^{a}dy\right\}dt+\int_{t_H}^{t_B}\left\{\int_0^b\left[\int_{x_i^q+0}^{a}\frac{\partial^4 W_i}{\partial x^2\partial y^2}U_i dx\right]dy\right\}dt.$$

Учитывая нулевые граничные значения возмущения и его производных, получаем окончательное соотношение

$$A=\int_{t_H}^{t_B}\left\{\left[\left(\left.\frac{\partial^2 W_i}{\partial x\partial y}\right|_{x_i^q-0,y_i^q-0}-\left.\frac{\partial^2 W_i}{\partial x\partial y}\right|_{x_i^q-0,y_i^q+0}\right)-\left(\left.\frac{\partial^2 W_i}{\partial x\partial y}\right|_{x_i^q+0,y_i^q-0}-\left.\frac{\partial^2 W_i}{\partial x\partial y}\right|_{x_i^q+0,y_i^q+0}\right)\right]U\big|_{x_i^q,y_i^q}\right\}dt-$$

$$-\int_{t_H}^{t_B}\left\{\int_0^b\left(\left.\frac{\partial^3 W_i}{\partial x\partial y^2}\right|_{x_i^q-0}-\left.\frac{\partial^3 W_i}{\partial x\partial y^2}\right|_{x_i^q+0}\right)U_i\big|_{x_i^q}dy\right\}dt-\int_{t_H}^{t_B}\left\{\int_0^a\left(\left.\frac{\partial^3 W_i}{\partial x^2\partial y}\right|_{y_i^q-0}-\left.\frac{\partial^3 W_i}{\partial x^2\partial y}\right|_{y_i^q+0}\right)U_i\big|_{y_i^q}dx\right\}dt+$$

$$+\int_{t_H}^{t_B}\left\{\int_0^a\left[\int_0^b\frac{\partial^4 W_i}{\partial x^2\partial y^2}U_i dy\right]dx\right\}dt.$$

Точно также с помощью формулы интегрирования по частям преобразуем оставшиеся в (15) интегралы:

$$B=\int_{t_H}^{t_B}\left\{\int_0^a\left[\int_0^b \frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2}\frac{\partial^2 U_i}{\partial y^2}dy\right]dx\right\}dt=$$

$$=\int_{t_H}^{t_B}\left\{\int_0^a\left[\int_0^{y_i^q-0} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}dy\right]dx\right\}dt+\int_{t_H}^{t_B}\left\{\int_0^a\left[\int_{y_i^q+0}^{b} \frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2}\frac{\partial^2 U_i}{\partial y^2}dy\right]dx\right\}dt=$$

$$=\int_{t_H}^{t_B}\left\{\int_0^a\left[\left(\frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2}\frac{\partial U_i}{\partial y}-\frac{\partial^3 W_i}{\partial y\partial x^2}U_i\right)\Bigg|_0^{y_i^q-0}+\int_0^{y_i^q-0}\frac{\partial^4 W_i}{\partial x^2\partial y^2}U_i dy\right]dx\right\}dt+$$

$$+\int_{t_H}^{t_B}\left\{\int_0^a\left[\left(\frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2}\frac{\partial U_i}{\partial y}-\frac{\partial^3 W_i}{\partial y\partial x^2}U_i\right)\Bigg|_{y_i^q+0}^{b}+\int_{y_i^q+0}^{b}\frac{\partial^4 W_i}{\partial x^2\partial y^2}U_i dy\right]dx\right\}dt=$$

$$=\left|\begin{array}{c}\text{Учитывая граничные значения возмущения}\\ U_i|_{y=0}=U_i|_{y=b}=0,\quad \left.\frac{\partial U_i}{\partial y}\right|_{y=0}=\left.\frac{\partial U_i}{\partial y}\right|_{y=b}=0,\\ \text{а также гладкость функции } U_i\left(x_i,y_i,t\right)\\ \text{во внутренних точках, имеем}\end{array}\right|=$$

$$=\int_{t_H}^{t_B}\left\{\int_0^a\left[\left(\left.\frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2}\right|_{y_i^q-0}-\left.\frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2}\right|_{y_i^q+0}\right)\left.\frac{\partial U_i}{\partial y}\right|_{y_i^q}-\left(\left.\frac{\partial^3 W_i}{\partial y\partial x^2}\right|_{y_i^q-0}-\left.\frac{\partial^3 W_i}{\partial y\partial x^2}\right|_{y_i^q+0}\right)U_i|_{y_i^q}\right]dx\right\}dt+$$

$$+\int_{t_H}^{t_B}\left\{\int_0^a\left[\int_0^b\frac{\partial^4 W_i}{\partial x^2\partial y^2}U_i dy\right]dx\right\}dt.$$

$$C=\int_{t_H}^{t_B}\left\{\int_0^b\left[\int_0^a \frac{\partial^2 W_i}{\partial y^2}\frac{\partial^2 U_i}{\partial x^2}dx\right]dy\right\}dt=$$

$$=\int_{t_H}^{t_B}\left\{\int_0^b\left[\left(\left.\frac{\partial^2 W_i}{\partial y^2}\right|_{x_i^q-0}-\left.\frac{\partial^2 W_i}{\partial y^2}\right|_{x_i^q+0}\right)\left.\frac{\partial U_i}{\partial x}\right|_{x_i^q}-\left(\left.\frac{\partial^3 W_i}{\partial x\partial y^2}\right|_{x_i^q-0}-\left.\frac{\partial^3 W_i}{\partial x\partial y^2}\right|_{x_i^q+0}\right)U_i|_{x_i^q}\right]dy\right\}dt+$$

$$+\int_{t_H}^{t_B}\left\{\int_0^a\left[\int_0^b\frac{\partial^4 W_i}{\partial x^2\partial y^2}U_i dy\right]dx\right\}dt.$$

$$E=\int_{t_H}^{t_B}\left\{\int_0^a\left[\int_0^b \Delta W_i\frac{\partial^2 U_i}{\partial y^2}dy\right]dx\right\}dt=$$

$$=\int_{t_H}^{t_B}\left\{\int_0^a\left[\left(\Delta W_i|_{y_i^q-0}-\Delta W_i|_{y_i^q+0}\right)\left.\frac{\partial U_i}{\partial y}\right|_{y_i^q}-\left(\left.\frac{\partial}{\partial y}\Delta W_i\right|_{y_i^q-0}-\left.\frac{\partial}{\partial y}\Delta W_i\right|_{y_i^q+0}\right)U_i|_{y_i^q}\right]dx\right\}dt+$$

$$+\int_{t_H}^{t_B}\left\{\int_0^a\left[\int_0^b\frac{\partial^2 \Delta W_i}{\partial y^2}U_i dy\right]dx\right\}dt.$$

$$F=\int_{t_H}^{t_B}\left\{\int_0^b\left[\int_0^a \Delta W_i\,\frac{\partial^2 U_i}{\partial x^2}dx\right]dy\right\}dt=$$

$$=\int_{t_H}^{t_B}\left\{\int_0^b\left[\left(\Delta W_i|_{x_i^q-0}-\Delta W_i|_{x_i^q+0}\right)\frac{\partial U_i}{\partial x}\bigg|_{x_i^q}-\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta W_i\bigg|_{x_i^q-0}-\frac{\partial}{\partial x}\Delta W_i\bigg|_{x_i^q+0}\right)U_i|_{x_i^q}\right]dy\right\}dt+$$

$$+\int_{t_H}^{t_B}\left\{\int_0^b\left[\int_0^a\frac{\partial^2\Delta W_i}{\partial x^2}U_i dx\right]dy\right\}dt.$$

Поскольку разность с точностью до $\overset{=}{o}(\varepsilon)$ имеет вид

$$I_1[W_i+\varepsilon U_i]-I_1[W_i]=D_i\varepsilon(E+F)-D_i\varepsilon(1-\nu_i)(B+C-2A),$$

то, учитывая полученные представления A,B,C,E,F, её можно записать в виде

$$I_1[W_i+\varepsilon U_i]-I_1[W_i]=D_i\varepsilon\int_{t_H}^{t_B}\left\{\int_0^a\left[\int_0^b\Delta^2 W_i U_i dy\right]dx\right\}dt-$$

$$-D_i\varepsilon(1-\nu_i)\int_{t_H}^{t_B}\left\{\int_0^a\left[\int_0^b\left(-2\frac{\partial^4 W_i}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 W_i}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 W_i}{\partial x^2\partial y^2}\right)dy\right]dx\right\}dt+$$

$$+D_i\varepsilon\int_{t_H}^{t_B}\left\{\int_0^b\left[\left(\Delta W_i|_{x_i^q-0}-\Delta W_i|_{x_i^q+0}\right)\frac{\partial U_i}{\partial x}\bigg|_{x_i^q}-\left(\frac{\partial\Delta W_i}{\partial x}\bigg|_{x_i^q-0}-\frac{\partial\Delta W_i}{\partial x}\bigg|_{x_i^q+0}\right)U_i|_{x_i^q}\right]dy\right\}dt+$$

$$+D_i\varepsilon\int_{t_H}^{t_B}\left\{\int_0^a\left[\left(\Delta W_i|_{y_i^q-0}-\Delta W_i|_{y_i^q+0}\right)\frac{\partial U_i}{\partial y}\bigg|_{y_i^q}-\left(\frac{\partial\Delta W_i}{\partial y}\bigg|_{y_i^q-0}-\frac{\partial\Delta W_i}{\partial y}\bigg|_{y_i^q+0}\right)U_i|_{y_i^q}\right]dx\right\}dt-$$

$$-D_i\varepsilon(1-\nu_i)\int_{t_H}^{t_B}\left\{\int_0^a\left[\left(\frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2}\bigg|_{y_i^q-0}-\frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2}\bigg|_{y_i^q+0}\right)\frac{\partial U_i}{\partial y}\bigg|_{y_i^q}-\left(\frac{\partial^3 W_i}{\partial y\partial x^2}\bigg|_{y_i^q-0}-\frac{\partial^3 W_i}{\partial y\partial x^2}\bigg|_{y_i^q+0}\right)U_i|_{y_i^q}\right]dx\right\}dt-$$

$$-D_i\varepsilon(1-\nu_i)\int_{t_H}^{t_B}\left\{\int_0^b\left[\left(\frac{\partial^2 W_i}{\partial y^2}\bigg|_{x_i^q-0}-\frac{\partial^2 W_i}{\partial y^2}\bigg|_{x_i^q+0}\right)\frac{\partial U_i}{\partial x}\bigg|_{x_i^q}-\left(\frac{\partial^3 W_i}{\partial x\partial y^2}\bigg|_{x_i^q-0}-\frac{\partial^3 W_i}{\partial x\partial y^2}\bigg|_{x_i^q+0}\right)U_i|_{x_i^q}\right]dy\right\}dt-$$

$$-2D_i\varepsilon(1-\nu_i)\int_{t_H}^{t_B}\left\{\int_0^b\left(\frac{\partial^3 W_i}{\partial x\partial y^2}\bigg|_{x_i^q-0}-\frac{\partial^3 W_i}{\partial x\partial y^2}\bigg|_{x_i^q+0}\right)U_i|_{x_i^q}\,dy\right\}dt-$$

$$-2D_i\varepsilon(1-\nu_i)\int_{t_H}^{t_B}\left\{\int_0^a\left(\frac{\partial^3 W_i}{\partial y\partial x^2}\bigg|_{y_i^q-0}-\frac{\partial^3 W_i}{\partial y\partial x^2}\bigg|_{y_i^q+0}\right)U_i|_{y_i^q}\,dx\right\}dt+$$

$$+2D_i\varepsilon(1-\nu_i)\int_{t_H}^{t_B}\left(\frac{\partial^2 W_i}{\partial x\partial y}\bigg|_{x_i^q-0,y_i^q-0}-\frac{\partial^2 W_i}{\partial x\partial y}\bigg|_{x_i^q-0,y_i^q+0}-\frac{\partial^2 W_i}{\partial x\partial y}\bigg|_{x_i^q+0,y_i^q-0}+\frac{\partial^2 W_i}{\partial x\partial y}\bigg|_{x_i^q+0,y_i^q+0}\right)U_i|_{x_i^q,y_i^q}\,dt=$$

$$=D_i\varepsilon\int_{t_H}^{t_B}\left\{\int_0^a\left[\int_0^b \Delta^2 W_i U_i dy\right]dx\right\}dt+$$

$$+\int_{t_H}^{t_B}\left\{\int_0^b\left[\left(\Delta W_i|_{x_i^q-0}-\Delta W_i|_{x_i^q+0}\right)D_i\varepsilon-D_i\varepsilon(1-\nu_i)\left(\frac{\partial^2 W_i}{\partial y^2}\bigg|_{x_i^q-0}-\frac{\partial^2 W_i}{\partial y^2}\bigg|_{x_i^q+0}\right)\right]\frac{\partial U_i}{\partial x}\bigg|_{x_i^q}dy\right\}dt+$$

$$+\int_{t_H}^{t_B}\left\{\int_0^a\left[\left(\Delta W_i|_{y_i^q-0}-\Delta W_i|_{y_i^q+0}\right)D_i\varepsilon-D_i\varepsilon(1-\nu_i)\left(\frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2}\bigg|_{y_i^q-0}-\frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2}\bigg|_{y_i^q+0}\right)\right]\frac{\partial U_i}{\partial y}\bigg|_{y_i^q}dx\right\}dt+$$

$$+\int_{t_H}^{t_B}\left\{\int_0^b\left[\left(\frac{\partial\Delta W_i}{\partial x}\bigg|_{x_i^q-0}-\frac{\partial\Delta W_i}{\partial x}\bigg|_{x_i^q+0}\right)(-D_i\varepsilon)-D_i\varepsilon(1-\nu_i)\left(\frac{\partial^3 W_i}{\partial x\partial y^2}\bigg|_{x_i^q-0}-\frac{\partial^3 W_i}{\partial x\partial y^2}\bigg|_{x_i^q+0}\right)U_i|_{x_i^q}\right]dy\right\}dt+$$

$$+\int_{t_H}^{t_B}\left\{\int_0^a\left[\left(\frac{\partial\Delta W_i}{\partial y}\bigg|_{y_i^q-0}-\frac{\partial\Delta W_i}{\partial y}\bigg|_{y_i^q+0}\right)(-D_i\varepsilon)-D_i\varepsilon(1-\nu_i)\left(\frac{\partial^3 W_i}{\partial y\partial x^2}\bigg|_{y_i^q-0}-\frac{\partial^3 W_i}{\partial y\partial x^2}\bigg|_{y_i^q+0}\right)U_i|_{y_i^q}\right]dx\right\}dt+$$

$$+2D_i\varepsilon(1-\nu_i)\int_{t_H}^{t_B}\left(\frac{\partial^2 W_i}{\partial x\partial y}\bigg|_{x_i^q-0,y_i^q-0}-\frac{\partial^2 W_i}{\partial x\partial y}\bigg|_{x_i^q-0,y_i^q+0}-\frac{\partial^2 W_i}{\partial x\partial y}\bigg|_{x_i^q+0,y_i^q-0}+\frac{\partial^2 W_i}{\partial x\partial y}\bigg|_{x_i^q+0,y_i^q+0}\right)U_i|_{x_i^q,y_i^q}\,dt;$$

$$I_2[W_i+\varepsilon U_i]-I_2[W_i]=\frac{1}{2}\sum_{l'=1}^{L'}C_i^{l'}\int_{t_H}^{t_B}2\varepsilon W_i\left(x_i^{l'},y_i^{l'},t\right)U_i\left(x_i^{l'},y_i^{l'},t\right)dt;$$

$$I_3[W_i+\varepsilon U_i]-I_3[W_i]=\varepsilon\sum_{l=1}^{L}C_i^l\int_{t_H}^{t_B}\left(W_i\left(x_i^l,y_i^l\right)-W_{i+1}\left(x_i^l,y_i^l\right)\right)\left(U_i\left(x_i^l,y_i^l\right)-U_{i+1}^l\left(x_i^l,y_i^l\right)\right)dt\,;$$

$$I_4[W_i+\varepsilon U_i]-I_4[W_i]=\frac{\rho h_i}{2}\int_{t_H}^{t_B}\left\{\int_0^a\left[\int_0^b 2\varepsilon\frac{\partial W_i}{\partial t}\frac{\partial U_i}{\partial t}dy\right]dx\right\}dt=\varepsilon\rho h_i\int_0^a\left\{\int_0^b\left[\int_{t_H}^{t_B}\frac{\partial W_i}{\partial t}\frac{\partial U_i}{\partial t}dt\right]dy\right\}dx=$$

$$=\rho h_i\varepsilon\int_0^a\left\{\int_0^b\left[\frac{\partial W}{\partial t}U\Big|_{t_H}^{t_B}-\int_{t_H}^{t_B}-\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}Udt\right]dy\right\}dx=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\text{Здесь рассматривается задача с неподвижными}\\ \text{концами, т.е. } W_i|_{t=t_H}=W_{iH}(x,y);\;\; W_i|_{t=t_B}=W_{iB}(x,y),\\ \text{поэтому}\;\; U_i|_{t_H}=0\;\; u\;\; U_i|_{t_B}=0\end{array}\right|=$$

$$=\underbrace{\rho h_i\varepsilon\int_0^a\left\{\int_0^b\frac{\partial W_i}{\partial t}U_i\Big|_{t_H}^{t_B}dy\right\}dx}_{=0}-\rho h_i\varepsilon\int_{t_H}^{t_B}\left\{\int_0^a\left[\int_0^b\frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2}U_i dy\right]dx\right\}dt=-\rho h_i\varepsilon\int_{t_H}^{t_B}\left\{\int_0^a\left[\int_0^b\frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2}U_i dy\right]dx\right\}dt;$$

$$I_5[W+\varepsilon U]-I_5[W]=\varepsilon\sum_1^Q M_i^q\left[\underbrace{\left(\frac{\partial W_i}{\partial t}\bigg|_{(x^q,y^q)}U_i|_{(x^q,y^q)}\right)\bigg|_{t_H}^{t_B}}_{=0}-\int_{t_H}^{t_B}\frac{\partial^2 W_i}{\partial t^2}\bigg|_{(x^q,y^q)}U_i|_{(x^q,y^q)}\,dt\right].$$

Учитывая найденные выражения производных функционалов I_1, I_2, I_3, I_4, определим производную функционала Остроградского – Гамильтона:

$$\frac{\delta L[W]}{\delta W}\varepsilon=\varepsilon\int_{t_H}^{t_B}\left\{\int_0^a\left[\int_0^b\left(-\rho h_i\frac{\partial^2 W_i}{\partial t^2}-D_i\Delta^2 W_i\right)U_i dy\right]dx\right\}dt-$$

$$-\sum_{q=1}^{Q}\int_{t_H}^{t_B}\left\{\int_0^b\left[\left(D_i\varepsilon\Delta-D_i\varepsilon(1-\nu_i)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)W_i\Big|_{x^q-0}-\left(\left(D_i\varepsilon\Delta-D_i\varepsilon(1-\nu_i)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)W_i\Big|_{x^q+0}\right)\right]\frac{\partial U_i}{\partial x}\Big|_{x^q}dy\right\}dt-$$

$$-\sum_{q=1}^{Q}\int_{t_H}^{t_B}\left\{\int_0^a\left[\left(D_i\varepsilon\Delta-D_i\varepsilon(1-\nu_i)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)W_i\Big|_{y^q-0}-\left(\left(D_i\varepsilon\Delta-D_i\varepsilon(1-\nu_i)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)W_i\Big|_{y^q+0}\right)\right]\frac{\partial U_i}{\partial x}\Big|_{y^q}dx\right\}dt-$$

$$-\sum_{q=1}^{Q}\int_{t_H}^{t_B}\left\{\int_0^b\left[\left(\frac{\partial\Delta W_i}{\partial x}\Big|_{x^q-0}-\frac{\partial\Delta W_i}{\partial x}\Big|_{x^q+0}\right)(-D_i\varepsilon)-D_i\varepsilon(1-\nu_i)\left(\frac{\partial^3 W_i}{\partial x\partial y^2}\Big|_{x^q-0}-\frac{\partial^3 W_i}{\partial x\partial y^2}\Big|_{x^q+0}\right)U_i|_{x^q}\right]dy\right\}dt-$$

$$-\sum_{q=1}^{Q}\int_{t_H}^{t_B}\left\{\int_0^a\left[\left(\frac{\partial\Delta W_i}{\partial y}\Big|_{y^q-0}-\frac{\partial\Delta W_i}{\partial y}\Big|_{y^q+0}\right)(-D_i\varepsilon)-D_i\varepsilon(1-\nu_i)\left(\frac{\partial^3 W_i}{\partial y\partial x^2}\Big|_{y^q-0}-\frac{\partial^3 W_i}{\partial y\partial x^2}\Big|_{y^q+0}\right)U_i|_{y^q}\right]dx\right\}dt-$$

$$-\sum_{q=1}^{Q}\varepsilon\int_{t_H}^{t_B}\left\{M_{iq}\frac{\partial^2 W_i}{\partial t^2}\Big|_{(x_i^q,y_i^q)}-2D_i(1-\nu_i)\left(\frac{\partial^2 W_i}{\partial x\partial y}\Big|_{x_i^q-0,y_i^q-0}-\frac{\partial^2 W_i}{\partial x\partial y}\Big|_{x_i^q-0,y_i^q+0}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\partial^2 W_i}{\partial x\partial y}\Big|_{x_i^q+0,y_i^q-0}+\frac{\partial^2 W_i}{\partial x\partial y}\Big|_{x_i^q+0,y_i^q+0}\right)\right\}U_i|_{(x_i^q,y_i^q)}dt-$$

$$-\sum_{l'=1}^{L'}\int_{t_H}^{t_B}\left\{\int_0^b\left[\left(D_i\varepsilon\Delta-D_i\varepsilon(1-\nu_i)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)W_i\Big|_{x_i^{l'}-0}-\left(\left(D_i\varepsilon\Delta-D_i\varepsilon(1-\nu_i)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)W_i\Big|_{x_i^{l'}+0}\right)\right]\frac{\partial U_i}{\partial x}\Big|_{x_i^{l'}}dy\right\}dt-$$

$$-\sum_{l'=1}^{L'}\int_{t_H}^{t_B}\left\{\int_0^a\left[\left(D_i\varepsilon\Delta-D_i\varepsilon(1-\nu_i)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)W_i\Big|_{y_i^{l'}-0}-\left(\left(D_i\varepsilon\Delta-D_i\varepsilon(1-\nu_i)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)W_i\Big|_{y_i^{l'}+0}\right)\right]\frac{\partial U_i}{\partial x}\Big|_{y_i^{l'}}dx\right\}dt-$$

$$-\sum_{l'=1}^{L'}\int_{t_H}^{t_B}\left\{\int_0^b\left[\left(\frac{\partial\Delta W_i}{\partial x}\Big|_{x_i^{l'}-0}-\frac{\partial\Delta W_i}{\partial x}\Big|_{x_i^{l'}+0}\right)(-D_i\varepsilon)-D_i\varepsilon(1-\nu_i)\left(\frac{\partial^3 W_i}{\partial x\partial y^2}\Big|_{x_i^{l'}-0}-\frac{\partial^3 W_i}{\partial x\partial y^2}\Big|_{x_i^{l'}+0}\right)U_i|_{x_i^{l'}}\right]dy\right\}dt-$$

$$-\sum_{l'=1}^{L'}\int_{t_H}^{t_B}\left\{\int_0^a\left[\left(\frac{\partial\Delta W_i}{\partial y}\Big|_{y_i^{l'}-0}-\frac{\partial\Delta W_i}{\partial y}\Big|_{y_i^{l'}+0}\right)(-D_i\varepsilon)-D_i\varepsilon(1-\nu_i)\left(\frac{\partial^3 W_i}{\partial y\partial x^2}\Big|_{y_i^{l'}-0}-\frac{\partial^3 W_i}{\partial y\partial x^2}\Big|_{y_i^{l'}+0}\right)U_i|_{y_i^{l'}}\right]dx\right\}dt+$$

$$+\sum_{l'=1}^{L'}\varepsilon\int_{t_H}^{t_B}\left\{C_i^{l'}W_i\left(x_i^{l'},y_i^{l'},t\right)-2D_i(1-\nu_i)\left(\frac{\partial^2 W_i}{\partial x\partial y}\Big|_{x_i^{l'}-0,y_i^{l'}-0}-\frac{\partial^2 W_i}{\partial x\partial y}\Big|_{x_i^{l'}-0,y_i^{l'}+0}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\partial^2 W_i}{\partial x\partial y}\Big|_{x_i^{l'}+0,y_i^{l'}-0}+\frac{\partial^2 W_i}{\partial x\partial y}\Big|_{x_i^{l'}+0,y_i^{l'}+0}\right)\right\}U_i|_{(x_i^{l'},y_i^{l'})}dt\Bigg)+$$

$$+\sum_{s=1}^{S}\varepsilon\int_{t_H}^{t_B}\left\{W_i\left(x_i^s,y_i^s\right)-2D_i\left(1-\nu_i\right)\left(\left.\frac{\partial^2 W_i}{\partial x\partial y}\right|_{x_i^s-0,y_i^s-0}-\left.\frac{\partial^2 W_i}{\partial x\partial y}\right|_{x_i^s-0,y_i^s+0}-\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-\left.\frac{\partial^2 W_i}{\partial x\partial y}\right|_{x_i^s+0,y_i^s-0}+\left.\frac{\partial^2 W_i}{\partial x\partial y}\right|_{x_i^s+0,y_i^s+0}\right)\right\}U_i\big|_{\left(x_i^s,y_i^s\right)}dt\right).$$

В силу произвольности возмущения $U_i\left(x_i,y_i,t\right)$ и значений $U_i\left(x_i^q,y_i,t\right)$, $U_i\left(x_i,y_i^q,t\right)$, $\frac{\partial}{\partial x}U_i\left(x_i^q,y_i,t\right)$, $\frac{\partial}{\partial y}U_i\left(x_i,y_i^q,t\right)$, $U_i\left(x_i^q,y_i^q,t\right)$ по основной лемме вариационного исчисления [4, с. 295], запишем систему уравнений Эйлера – Лагранжа

$$\rho h_i\frac{\partial^2 W_i}{\partial t^2}-D_i\Delta^2 W_i=0\quad\left\{0<x<a,\ 0<y<b,\ t_H<t<t_B,\ \left(q=1,...,Q\right)\right\},\tag{9}$$

с многоточечными краевыми условиями

$$M_{iq}\left.\frac{\partial^2 W_i}{\partial t^2}\right|_{\left(x_i^q,y_i^q\right)}-2D_i\left(1-\nu_i\right)\times$$

$$\times\left(\left.\frac{\partial^2 W_i}{\partial x\partial y}\right|_{x_i^q-0,y_i^q-0}-\left.\frac{\partial^2 W_i}{\partial x\partial y}\right|_{x_i^q-0,y_i^q+0}-\left.\frac{\partial^2 W_i}{\partial x\partial y}\right|_{x_i^q+0,y_i^q-0}+\left.\frac{\partial^2 W_i}{\partial x\partial y}\right|_{x_i^q+0,y_i^q+0}\right)=0;\tag{10}$$

$$C_i^{l'}W_i\left(x_i^{l'},y_i^{l'},t\right)-2D_i\left(1-\nu_i\right)\times$$

$$\times\left(\left.\frac{\partial^2 W_i}{\partial x\partial y}\right|_{x_i^{l'}-0,y_i^{l'}-0}-\left.\frac{\partial^2 W_i}{\partial x\partial y}\right|_{x_i^{l'}-0,y_i^{l'}+0}-\left.\frac{\partial^2 W_i}{\partial x\partial y}\right|_{x_i^{l'}+0,y_i^{l'}-0}+\left.\frac{\partial^2 W_i}{\partial x\partial y}\right|_{x_i^{l'}+0,y_i^{l'}+0}\right)=0\tag{11}$$

и условиями вдоль отрезков

$$\begin{cases}\left(\left(D_i\Delta-D_i\left(1-\nu_i\right)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)W_i\big|_{x_i^q-0}-\left(\left(D_i\Delta-D_i\left(1-\nu_i\right)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)W_i\big|_{x_i^q+0}\right)=0,\\ \left(\left(D_i\Delta-D_i\left(1-\nu_i\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)W_i\big|_{y_i^q-0}-\left(\left(D_i\Delta-D_i\left(1-\nu_i\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)W_i\big|_{y_i^q+0}\right)=0;\end{cases}\tag{16}$$

$$\begin{cases}\left(\left.\frac{\partial\Delta W_i}{\partial x}\right|_{x_i^q-0}-\left.\frac{\partial\Delta W_i}{\partial x}\right|_{x_i^q+0}\right)\left(-D_i\right)-D_i\left(1-\nu_i\right)\left(\left.\frac{\partial^3 W_i}{\partial x\partial y^2}\right|_{x_i^q-0}-\left.\frac{\partial^3 W_i}{\partial x\partial y^2}\right|_{x_i^q+0}\right)=0,\\ \left(\left.\frac{\partial\Delta W_i}{\partial y}\right|_{y_i^q-0}-\left.\frac{\partial\Delta W_i}{\partial y}\right|_{y_i^q+0}\right)\left(-D_i\right)-D_i\left(1-\nu_i\right)\left(\left.\frac{\partial^3 W_i}{\partial y\partial x^2}\right|_{y_i^q-0}-\left.\frac{\partial^3 W_i}{\partial y\partial x^2}\right|_{y_i^q+0}\right)=0;\end{cases}\tag{17}$$

к которым надо добавить граничные условия

$$W_i\big|_{\Omega_i} = 0, \qquad \left.\frac{\partial W_i}{\partial n_i}\right|_{\partial\Omega_i} = 0\,, \tag{12}$$

а также

$$W_i\big|_{t_H} = W_1(x_i, y_i), \quad W_i\big|_{t_B} = W_2(x_i, y_i)\,. \tag{13}$$

Итак, справедливо

Утверждение 1. *Колебание однородной упругой изотропной пластины пакета плоских пластин с постоянной толщиной* h, *ограниченной прямоугольным контуром с размерами* a, b, *к которой точечно присоединены массы* M_{iq} *в* Q *внутренних точках, и в* l' *внутренних точках она упруго оперта, описывается дифференциальным уравнением* (*9*) *с многоточечными краевыми условиями* (*10*) *и* (*11*) *и граничными условиями* (*12*) *и* (*13*).

Заметим, что функция $W_i(x_i, y_i, t)$ в точках, где прикреплена точечная масса или пластина жестко или упруго оперта, либо упруго защемлена, теряет гладкость согласно условиям (9).

Обсуждение утверждения 1.

Каждой внутренней точке $\left(x_i^q, y_i^q\right)$, где присоединена точечная масса M_{iq} или где она либо упруго, либо жестко оперта или защемлена в направлении α_q, соответствует горизонтальный отрезок $y = y^q$ и вертикальный отрезок $x = x^q$. Вне, этих отрезков пластины для функции $W_i(x_i, y_i, t)$ справедливо дифференциальное соотношение (9), а на указанных отрезках должны выполняться условия «сшивания» (16) и (17). Покажем, что из условии (16) и (17) следует выполнение дифференциального соотношения (9) и на указанных отрезках, кроме точки $\left(x_i^q, y_i^q\right)$.

Лемма 1. Пусть $W(x, y, t)$ удовлетворяет условиям

$$\begin{cases} W_i\left(x_i^q - 0, y_i, t\right) - W_i\left(x_i^q + 0, y_i, t\right) = 0, & \text{допустимых } \forall y_i, t, \\ W_i\left(x_i, y_i^q - 0, t\right) - W_i\left(x_i, y_i^q + 0, t\right) = 0, & \text{допустимых } \forall x_i, t; \end{cases} \tag{18}$$

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial W_i}{\partial x}\right|_{x_i^q - 0} - \left.\dfrac{\partial W_i}{\partial x}\right|_{x_i^q + 0} = 0, & \text{допустимых } \forall y_i, t, \\ \left.\dfrac{\partial W_i}{\partial y}\right|_{y_i^q - 0} - \left.\dfrac{\partial W_i}{\partial y}\right|_{y_i^q + 0} = 0, & \text{допустимых } \forall x_i, t, \end{cases} \tag{19}$$

а также выполняется соотношения (16) и (17). Тогда на указанных отрезках справедливы равенства

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial^2 W_i}{\partial x^2}\right|_{x_i^q - 0} - \left.\dfrac{\partial^2 W_i}{\partial x^2}\right|_{x_i^q + 0} = 0, & \text{допустимых } \forall y_i, t, \\ \left.\dfrac{\partial^2 W_i}{\partial y^2}\right|_{y_i^q - 0} - \left.\dfrac{\partial^2 W_i}{\partial y^2}\right|_{y_i^q + 0} = 0, & \text{допустимых } \forall x_i, t; \end{cases} \tag{20}$$

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial^3 W_i}{\partial x^3}\right|_{x_i^q-0} - \left.\dfrac{\partial^3 W_i}{\partial x^3}\right|_{x_i^q+0} = 0, \quad \text{допустимых } \forall y_i, t, \\ \left.\dfrac{\partial^3 W_i}{\partial y^3}\right|_{y_i^q-0} - \left.\dfrac{\partial^3 W_i}{\partial y^3}\right|_{y_i^q+0} = 0, \quad \text{допустимых } \forall x_i, t. \end{cases} \tag{21}$$

Доказательство леммы 1. Пусть $x = x^q$. Покажем, что из равенства (18) и (19) при выполнений (16) и (17) следуют соотношения (20) и (21). Дважды продифференцируем равенство (18) по y :

$$\left.\frac{\partial^2 W_i}{\partial y^2}\right|_{x_i^q-0} - \left.\frac{\partial^2 W_i}{\partial y^2}\right|_{x_i^q+0} = 0, \qquad \forall y_i, t ,$$

и подставим полученное соотношение в левую часть равенства (16). В результате имеем

$$\left.\left(D_i \Delta W_i - D_i\left(1-\nu_i\right)\frac{\partial^2}{\partial y^2} W_i \right)\right|_{x_i^q-0} - \left.\left(D_i \Delta W - D_i\left(1-\nu_i\right)\frac{\partial^2}{\partial y^2} W_i \right)\right|_{x_i^q+0} =$$

$$= D_i \left.\frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2}\right|_{x_i^q-0} - D_i \left.\frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2}\right|_{x_i^q+0} = 0.$$

Поскольку $D_i \neq 0$, отсюда следует равенство (20).

Чтобы получить равенство (21), дважды продифференцируем (19) по y.

$$\left.\frac{\partial^3 W_i}{\partial x \partial y^2}\right|_{x_i^q-0} - \left.\frac{\partial^3 W_i}{\partial x \partial y^2}\right|_{x_i^q+0} = 0, \quad \forall y_i, t ,$$

и подставим полученное соотношение в левую часть равенства (17). Результат можно записать в виде

$$\left.\left((-D_i)\frac{\partial \Delta W_i}{\partial x} - D_i\left(1-\nu_i\right)\frac{\partial^3 W_i}{\partial x \partial y^2} \right)\right|_{x_i^q-0} - \left.\left((-D_i)\frac{\partial \Delta W_i}{\partial x} - D_i\left(1-\nu_i\right)\frac{\partial^3 W_i}{\partial x \partial y^2} \right)\right|_{x_i^q+0} =$$

$$= -D_i \left.\frac{\partial^3 W_i}{\partial x^3}\right|_{x_i^q-0} + D_i \left.\frac{\partial^3 W_i}{\partial x^3}\right|_{x_i^q+0} = 0.$$

Тем самым равенство (21) полностью доказано.

Аналогичным образом доказываются требуемые соотношения на отрезке $y = y^q$.

В лемме 1 показана непрерывность $W_i\left(x_i, y_i, t\right)$ и её нормальных производных вдоль линии $x_i = x_i^q$ и $y_i = y_i^q$. Из теории уравнений с частными производными [5, с. 249] вытекает выполнение дифференциального соотношения (9) вдоль указанных линии $x_i = x_i^q$ и $y_i = y_i^q$, кроме точки $\left(x_i^q, y_i^q\right)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Базаров М.Б.*, *Сафаров И.И.*, *Шокин Ю.И.* Численное моделирование колебаний диссипативно однородных и неоднородных механических систем. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1996. 189 с.
2. *Треффц Е.* Математическая теория упругости. Л.; М.: Гостехиздат, 1934. 172 с.
3. *Дубровин Б.А.*, *Новиков С.П.*, *Фомин А.Т.* Современная геометрия. М.: Наука, 1979. 760 с.
4. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969. 424 с.
5. *Мизохата С.* Теория уравнений с частными производными. М.: Мир, 1977. 504 с.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

БЕРИКХАНОВА Гульназ Еженхановна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и методики преподавания математики Семипалатинского государственного педагогического института. E-mail: gulnazezhen@mail.ru

ЖУМАГУЛОВ Бакытжан Турсынович – доктор технических наук, профессор, академик НАН РК, ректор Казахского национального университета имени Аль-Фараби.

КАНГУЖИН Балтабек Есматович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа Казахского национального университета имени Аль-Фараби.

Статья принята в печать 08.02.2010 г.