ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2009 Математика и механика № 4(8)

# МАТЕМАТИКА

*Памяти*
*Павла Парфеньевича Куфарева*
*посвящаем*

УДК 517.54

**А.И. Александров, И.А. Александров, Л.С. Копанева, Г.А. Юферова**

## ГИПОТЕЗА БИБЕРБАХА И ГИПОТЕЗА МИЛИНА

Даётся вариант полного решения классической задачи Бибербаха (проблемы коэффициентов для однолистных конформных отображений) средствами, доступными студентам с повышенной математической подготовкой.

**Ключевые слова:** *метод параметрических представлений*, *проблема коэффициентов*, *однолистные конформные отображения*.

### 1. Краткая историческая справка

Исследуя экстремальные метрические свойства класса $S$ голоморфных однолистных отображений

$$f(z) = z + c_2(f)z^2 + \ldots + c_n(f)z^n + \ldots$$

единичного круга $E = \{z \in \boldsymbol{C} : |z| < 1\}$, Л. Бибербах в 1916 г. [1, с. 946] доказал, что $|c_2(f)| \le 2$, $f \in S$, и, принимая во внимание оценки

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \le |f(z)| \le \frac{|z|}{(1-|z|)^2}, \ z \in E,$$

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \le |f'(z)| \le \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}, \ z \in E,$$

равенства в которых, как и в оценке второго коэффициента, достигаются только на функциях Кёбе

$$K_\varphi(z) = \frac{z}{\left(1-e^{i\varphi}z\right)^2} = z + 2e^{i\varphi}z^2 + \ldots + ne^{i(n-1)\varphi}z^n + \ldots, \ 0 \le \varphi < 2\pi,$$

поставил задачу: доказать (или опровергнуть) справедливость неравенства $|c_n(f)| \le n$ при $n \in \boldsymbol{N} \setminus \{1, 2\}$ для класса $f \in S$. Задача привлекла внимание многих специалистов. Было доказано, что для $f \in S$

$|c_3(f)| \le 3$ (Лёвнер, 1923 [2]), $|c_n(f)| < en$, $n = 2, 3, \ldots$ (Литтлвуд, 1924 [3]), $\left|c_3(f) - \alpha c_2^2(f)\right| \le 2e^{-\frac{2\alpha}{1-\alpha}} + 1$, $0 < \alpha < 1$, (Фекете и Сегё, 1933 [4]), $|c_n(f)| < \dfrac{3}{2}en$

(Голузин, 1948 [5]), $|c_n(f)| < \frac{e}{2}n + 1{,}51$ (Базилевич, 1951 [6]), $|c_4(f)| \leq 4$ (Гарабедян и Шиффер, 1955 [7]), $|c_n(f)| \leq 1{,}243n$ (Милин, 1967 [8]), $|c_6(f)| \leq 6$ (Педерсон, 1968 [9], Озава, 1969 [10]), $|c_5(f)| \leq 5$ (Педерсон, Шиффер, 1972 [11]), $|c_n| < \sqrt{\frac{7}{6}}n < 1{,}081n$ (Фитцжеральд, 1972 [12]), $|c_n(f)| \leq 1{,}066$ (Горовиц, 1976 [13]).

Гипотеза (проблема) Бибербаха (она состояла в утверждении, что $|c_n(f)| \leq n$, $f \in S$) в течение десятков лет стимулировала развитие геометрической теории функций и теории решения экстремальных задач на классах конформных отображений. Был разработан ряд специальных методов исследования однолистных отображений. Среди них метод параметрических представлений, метод граничных вариаций, метод внутренних вариаций, метод контурного интегрирования, метод площадей, метод симметризации, метод экстремальных метрик и другие. Они нашли применения в доказательствах указанных выше оценок.

Был получен ряд других результатов, модификаций и новых формулировок предшествовавших и более общих задач, составивших основу построения теории однолистных функций.

В пользу справедливости гипотезы Бибербаха накапливались результаты, относящиеся к подклассам класса $S$.

К. Лёвнер, 1917 г. [14], доказал, что $|c_n(f)| \leq 1$, если $f \in S^0 \subset S$ – отображение круга $E$ на выпуклую область. Р. Неванлинна в 1921 г. [15] установил, что если $f \in S$ и отображает круг $E$ на область, звездную относительно нуля, то $|c_n(f)| \leq n$ и равенство реализуется только для $K_\varphi(z)$. Н.С. Дьедонне, 1931г. [16], доказал, что $|c_n(f)| \leq n$, если $f \in S_n \subset S$ – отображение с вещественными коэффициентами $c_n(f)$, $n = 2,3,\ldots$ Каплан, 1952 г. [17], получил оценку $|c_n(f)| \leq n$ на подклассе $S$ почти выпуклых функций. О функции $f \in S$ говорят, что она почти выпукла, если существует голоморфная в $E$ выпуклая функция $\Phi(z) = a_1z + a_2z^2 + \ldots$ (то есть область $\Phi(E)$ – выпуклая) такая, что $\mathrm{Re}[f'(z)/\Phi'(z)] > 0$ в $E$.

Значительный интерес представляют исследования задач, формулировка которых восходит к проблеме Бибербаха.

И.Е. Базилевич, 1965 г. [18], в числе первых стал исследовать множества значений систем функционалов. На классе Пика $S_p(M) \subset S$, $p \in \boldsymbol{N}$, $M > 1$, функций $f(z) = z + c_{p+1}^{(p)} z^{p+1} + c_{2p+1}^{(p)} z^{2p+1} + \ldots$, отображающих $E$ на область с $p$-кратной симметрией вращения вокруг начала, принадлежащих кругу радиуса $M$, он нашел множество значений $\left(\left|c_{p+1}^{(p)}\right|, \left|c_{2p+1}^{(p)}\right|\right)$ и ряда других функционалов. Эти результаты показывали, насколько усложняются оценки коэффициентов при переходе от $S$ к $S_p(M)$, в частности к $S_1(M)$, чем можно объяснить отсутствие на этих классах гипотезы о коэффициентах, аналогичной гипотезе Бибербаха.

П.П. Куфарев проявил большой интерес к задаче Бибербаха о коэффициентах. К ней он обратился в 1950 г. в работе [19]. В 1954 г. он указывает в [20] эффективный новый подход к её исследованию, объединяющий метод внутренних вариаций и метод параметрических представлений. Годом позже П.П. Куфарев публикует [21] теорему: если функция класса $S$ экстремальна в задаче коэффициентов и отображает единичный круг на область без внешних точек, ограниченную отрезками прямых, то справедлива гипотеза Бибербаха.

Асимптотические результаты для коэффициентов на классе $S$ первым установил В. Хейман [22] в 1955 г. Он доказал, что если $f(z) \in S$, $f(z) \neq K_\varphi(z)$, то отношение $|c_n(f)|/n \to \alpha$ при $n \to \infty$, причем $0 \le \alpha < 1$. Иными словами, для любой функции $f \in S \setminus \{K_\varphi\}$ и числа $\varepsilon > 0$ существует $\alpha(f) \in [0,1)$ такое, что

$$\left| \frac{|c_n(f)|}{n} - \alpha(f) \right| < \varepsilon$$

при $n \ge N(f)$.

Дальнейшие результаты в этом направлении были получены И.М. Милиным [23], И.Е. Базилевичем [24], Н.А. Широковым [25].

На важность совместного рассмотрения тейлоровских коэффициентов $c_n(f)$, $n = 2,3,\ldots$, функции $f \in S$ и её логарифмических коэффициентов $\gamma_n(f)$, то есть тейлоровских коэффициентов функции

$$\ln \frac{f(z)}{z} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n(f) z^n,$$

указали Н.А. Лебедев и И.М. Милин в совместной работе [26] и И.М. Милин в работах [23, 27]. Был разработан «аппарат формального экспоненцирования», позволяющий перенести ограничения логарифмических коэффициентов на тейлоровские коэффициенты однолистных функций, в частности, оценивать коэффициенты степенного ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} D_k z^k = \exp \sum_{k=1}^{\infty} A_k z^k$$

через коэффициенты ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k z^k$. Этот аппарат, примененный к классу $S$, дает оценку

$$|c_n(f)| \le e^{-\boldsymbol{M}_n(f)},$$

где $$M_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{\nu}\left(\frac{1}{k} - k^2|\gamma_k(f)|^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1 - k^2|\gamma_k(f)|^2\right)\frac{n-k}{k}.$$

Очевидно, $\max\limits_{f\in S} M_n(K_\varphi) = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{k} = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - 1$ и достигается на функции $f(z) = z$. Для функции Кёбе $M_n(K_\varphi) = 0$. Таким образом, множеству значений функционала $M_n(f)$ на классе $S$ принадлежит отрезок $\left[0, \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - 1\right]$.

В дальнейшем направление экспоненцирования логарифмических ограничений развивалось в работах А.З. Гриншпана [28, 29], Фитцжеральда [30].

В 1971 г. И.М. Милин [31] пришел к гипотезе о логарифмических коэффициентах на классе $S$:

$$\sum_{\nu=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{\nu} k|\gamma_k(f)|^2 = \sum_{k=1}^{n}(n+1-k)k|\gamma_k(f)|^2 \le \sum_{k=1}^{n}(n+1-k)\frac{1}{k} = \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k=1}^{\nu}\frac{1}{k}$$

более сильной, чем гипотеза Бибербаха. Одновременно наметились новые пути исследования гипотезы Робертсона для нечетных функций

$$f_2(z) = \sqrt{f(z^2)} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(2)}(f_2) z^{2k-1}$$

класса $S$:

$$\sum_{k=1}^{n} \left| c_k^2 (f_2) \right|^2 \le n \quad (n = 2,3,\ldots).$$

Луи де Бранж в 1984 г. [32] доказал справедливость гипотезы Милина: $\min\limits_{f \in S} M_n(f) = 0$, $n = 2,3,\ldots$, и, как следствие, доказал гипотезу Бибербаха.

В данной статье даётся изложение обновленного и технически упрощенного варианта построений и доказательств, приводящих к решению задачи Бибербаха. Статья написана на основании спецкурсов, прочитанных студентам-математикам в Томском университете и с использованием работы И.А. Александрова [33], опубликованной в «Сибирском математическом журнале» в 1987 г., и статьи И.А. Александрова и И.М. Милина [34], опубликованной в журнале «Известия высших учебных заведений. Математика» в 1989 г.

## 2. Функционал Милина

Вместе с функцией

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f) z^k = z + \ldots$$

класса $S$ рассмотрим соответствующую ей в классе $S_2 \subset S$ функцию

$$f_2(z) = z\sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}} = \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k-1}^{(2)}(f_2) z^{2k-1} = z + \ldots.$$

Она отображает круг $E$ на область $f_2(E)$, совпадающую с собой при повороте на угол $\pi$ вокруг начала. Из равенства $f(z^2) = [f_2(z)]^2$, записанного в форме рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{2n} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ c_{2k-1}^{(2)}(f_2) z^{2k-1} \right]^2,$$

где $c_n = c_n(f)$, $c_{2k-1}^{(2)} = c_{2k-1}^{(2)}(f_2)$, сравнением коэффициентов при $z^{2n}$ находим

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} c_{2k-1}^{(2)} c_{2n-2k+1}^{(2)}, \quad n \in \boldsymbol{N} \setminus \{1\}.$$

Отсюда, используя неравенство Коши – Буняковского, имеем

$$|c_n| \le \left( \sum_{k=1}^{n} \left| c_{2k-1}^{(2)} \right|^2 \sum_{k=1}^{n} \left| c_{2n-2k+1}^{(2)} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sum_{k=1}^{n} \left| c_{2k-1}^{(2)} \right|^2.$$

Обозначим через $G_m(f_2)$ среднее значение квадратов модулей начальных коэффициентов функции $f_2(z)$, то есть положим

$$G_m(f_2) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \left| c_{2k-1}^{(2)} \right|^2, \quad m \in \boldsymbol{N}.$$

Видим, что $G_1(f_2) = 1$ и $|c_m(f)| \le m G_m(f_2)$, $m \in \boldsymbol{N}$.

Функция

$$\omega(z)=\frac{1}{2}\ln\frac{f(z)}{z},\quad \ln 1=0,$$

голоморфна в $E$. Её разложение в ряд Тейлора в $E$ имеет вид

$$\omega(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k(\omega)z^k.$$

Числа $\gamma_k(\omega)$ являются одновременно логарифмическими коэффициентами функции $f(z)$, и поэтому мы будем писать $\gamma_k(\omega)=\gamma_k(f)$.

Рассмотрим определенный на классе $S$ вещественный функционал

$$M_m(f)=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\left(1-k^2|\gamma_k(f)|^2\right)\frac{m-k}{k},\ m\in\boldsymbol{N},$$

называемый функционалом Милина. Очевидно, $M_1(f)=0$.

Теорема 1. *Если* $f(z)\in S$, *то последовательность* $\left\{G_m e^{M_m}\right\}_{m=1}^{\infty}$ *монотонно убывает и, поскольку* $G_1(f_2)e^{M_1(f)}=1$, *то* $G_m(f_2)\le e^{-M_m(f)}$, $m\in\boldsymbol{N}$.

► Для функций

$$\varphi(z)=\frac{f_2(z)}{z}=\sum_{k=0}^{\infty}c_{2k+1}^{(2)}z^{2k}$$

и $\omega(z)$ выполняется равенство

$$\omega(z^2)=\frac{1}{2}\ln\frac{f(z^2)}{z^2}=\ln\frac{f_2(z)}{z}=\ln\varphi(z)$$

и, следовательно,

$$z\varphi'(z)=2z^2\varphi(z)\omega'(z^2).$$

Запишем это равенство с использованием рядов. Получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}kc_{2k+1}^{(2)}z^{2k}=\sum_{k=1}^{\infty}c_{2k+1}^{(2)}z^{2k}\sum_{k=1}^{\infty}k\gamma_k z^{2k}.$$

Приравнивая коэффициенты при $z^{2m}$, $m\in\boldsymbol{N}$**,** получим формулу

$$mc_{2m+1}^{(2)}=\sum_{k=1}^{m}k\gamma_k c_{2(m-k)+1}^{(2)}.$$

Согласно неравенству Коши – Буняковского, имеем

$$m\left|c_{2m+1}^{(2)}\right|^2\le G_m\sum_{k=1}^{m}k^2|\gamma_k|^2.$$

Обратимся теперь к построению последовательности, указанной в теореме.

Из совместного рассмотрения неравенства

$$(m-1)\left|c_{2m-1}^{(2)}\right|^2\le G_{m-1}\sum_{k=1}^{m-1}k^2|\gamma_k|^2$$

и равенства

$$mG_m=(m-1)G_{m-1}+\left|c_{2m-1}^{(2)}\right|^2$$

следует неравенство

$$mG_m \le (m-1)G_{m-1} + \frac{G_{m-1}}{m-1}\sum_{k=1}^{m-1} k^2 |\gamma_k|^2 ,$$

то есть
$$G_m \le G_{m-1}\left[1-\frac{1}{m(m-1)}\sum_{k=1}^{m-1}\left(1-k^2|\gamma_k|^2\right)\right].$$

Преобразуем правую часть этого неравенства с помощью неравенства $1 + x \le$ $\le e^x$ $(-\infty < x < \infty)$. Получим

$$G_m \le G_{m-1}\exp\left\{-\frac{1}{m(m-1)}\sum_{k=1}^{m-1}\left(1-k^2|\gamma_k|^2\right)\right\}.$$

Легко убедиться в том, что при любых комплексных числах $a_1,\dots,a_{m-1}$ и $m \in \boldsymbol{N}\setminus\{1,2\}$ имеет место тождество

$$\frac{1}{m(m-1)}\sum_{k=1}^{m-1} a_k = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m-1}\frac{m-k}{k}a_k - \sum_{k=1}^{m-2}\frac{m-1-k}{k}a_k .$$

Положим в нем $a_k = 1 - k^2|\gamma_k|^2$. Тогда будем иметь

$$\frac{1}{m(m-1)}\sum_{k=1}^{m-1}\left(1-k^2|\gamma_k|^2\right) = M_m - M_{m-1},\ m = 2,3,\dots .$$

Значит,

$$G_m \le G_{m-1}\exp\left(M_{m-1}-M_m\right)$$

Из этой оценки следует, что соседние члены последовательности $\left\{G_m e^{M_m}\right\}_{m=1}^{\infty}$ удовлетворяют условию

$$G_m e^{M_m} \le G_{m-1}e^{M_{m-1}},\ m = 2,3,\dots,$$

указывающему на монотонное убывание последовательности. Так как $G_1 = 1$, $M_1 = 0$, то $G_1 e^{M_1} = 1$. Значит, $G_m \le e^{M_m}$, $m \in \boldsymbol{N}$. ◄

**Следствие 1**. *В условиях и обозначениях теоремы* 1

$$\sum_{m=1}^{m}\left|c_{2k-1}^{(2)}\right|^2 \le me^{-M_m(f)},\ m = 2,3,\dots .$$

**Следствие 2**. *Для функции* $f \in S$ *имеет место оценка*

$$|c_n(f)| \le ne^{-M_n(f)},\ n = 2,3,\dots .$$

### 3. Класс $S'$. Производящая функция

Важным подклассом класса $S$ является совокупность $S'$ функций $f(z)$, отображающих круг $E$ на область $D = f(E)$, получающуюся исключением из $\boldsymbol{C}$ жордановой кривой, соединяющей некоторую точку из $\boldsymbol{C}$ с бесконечностью. Очевидно, такая кривая не проходит через нуль. Параметрическое уравнение кривой всегда можно задать в виде $w = \varphi(\tau)$, $0 \le \tau \le \infty$, так, что $\varphi(0) \in \boldsymbol{C}$, $\varphi(\infty) = \infty$, и отображение $w = \Psi(\tau,z)$, $\Psi(0,z) = f(z)$, круга $E$ на область $D(\tau)$ ,получающуюся исключением из $\boldsymbol{C}$ дуги с уравнением $w = \varphi(x)$, $\tau \le x \le \infty$, нормировано условиями $\Psi(\tau,0) = 0$, $\Psi'_z(\tau,0) = e^{\tau}$. Функцию $\Psi(\tau,z)$ называют производящей для функции $f(z)$.

Класс $S'$ плотен в классе $S$ в топологии равномерной сходимости функций на компактах.

В классе $S$ существует функция, на которой функционал Милина получает минимальное значение. Вариационным методом устанавливается её принадлежность к $S'$. Поэтому ограничимся нахождением множества значений и минимума функционала Милина, рассматривая его на классе $S'$.

Пусть $f(z)\in S'$ и $\Psi(\tau,z)$ – присоединенная к ней функция. Эта функция является решением уравнения Лёвнера

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\tau}=z\frac{\partial\Psi}{\partial z}\frac{\mu(\tau)+z}{\mu(\tau)-z},\ \Psi(0,z)=f(z),$$

где $\mu(\tau)$ – точка на границе круга $E$, отображаемая функцией $\Psi(\tau,z)$ в подвижный конец разреза.

Пусть $\gamma_k(\tau)$, $k\in\boldsymbol{N}$, – логарифмические коэффициенты функции $e^{-\tau}\Psi(\tau,z)\in S'$, то есть коэффициенты разложения

$$\frac{1}{2}\ln\frac{\Psi(\tau,z)}{e^{\tau}z}=\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k(\tau)z^k .$$

В частности, при $\tau = 0$

$$\frac{1}{2}\ln\frac{f(z)}{z}=\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k z^k ,$$

где $\gamma_k = \gamma(0) = \gamma_k(f)$.

**Теорема 2**. *Логарифмические коэффициенты* $\gamma_k(\tau)$ *удовлетворяют системе обыкновенных линейных дифференциальных уравнений первого порядка*

$$\gamma_k' = k\gamma_k+2\overline{\mu(\tau)}^k\beta_{k-1}(\tau),\ k\in\boldsymbol{N},$$

*где*
$$\beta_0(\tau)=\frac{1}{2},\ \beta_k(\tau)=\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{k}m\mu^m(\tau)\gamma_m,\ k\in\boldsymbol{N}.$$

Любые первые $n$ уравнений образуют систему обыкновенных линейных дифференциальных уравнений для $\gamma_1(\tau),\ldots,\gamma_n(\tau)$ с начальными условиями $\gamma_1(0)=\gamma_1(f),\ldots,\gamma_n(0)=\gamma_n(f)$.

►Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\ln\frac{\Psi(\tau,z)}{e^{\tau}z}+1=\frac{\Psi'_\tau}{\Psi},\ z\frac{\partial}{\partial z}\ln\frac{\Psi(\tau,z)}{e^{\tau}z}=z\frac{\Psi'_z}{\Psi},$$

то в $E$
$$\frac{\Psi'_\tau}{\Psi}=1+2\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k'(\tau)z^k,\ z\frac{\Psi'_z}{\Psi}=1+2\sum_{k=1}^{\infty}k\gamma_k(\tau)z^k .$$

С учетом этих разложений функций в степенные ряды и разложения

$$\frac{\mu(\tau)+z}{\mu(\tau)-z}=1+2\sum_{k=1}^{\infty}\overline{\mu(\tau)}^k z^k,\ z\in E,$$

имеем в силу уравнения Лёвнера

$$1+2\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k'(\tau)z^k=\left[1+2\sum_{k=1}^{\infty}k\gamma_k(\tau)z^k\right]\left[1+2\sum_{k=1}^{\infty}\overline{\mu(\tau)}^k z^k\right].$$

Отсюда, приравнивая коэффициенты при $z^k$, $k \in \boldsymbol{N}$, в левой и правой частях полученного равенства, приходим к уравнениям, указанным в формулировке теоремы.◀

**Следствие 1**. *В обозначениях теоремы* 2 *имеем*

$$\beta_k(\tau) - \beta_{k-1}(\tau) = k\mu^k(\tau)\gamma_k(\tau), \ k \in \boldsymbol{N}.$$

**Следствие 2**. *Поскольку* $|\mu(\tau)| = 1$, *то*

$$k|\gamma_k(\tau)| = |\beta_k(\tau) - \beta_{k-1}(\tau)|, \ k \in \boldsymbol{N}.$$

**Следствие 3**.

$$\mu^k(\tau)\gamma_k'(\tau) = \beta_k(\tau) + \beta_{k-1}(\tau), k \in \boldsymbol{N}.$$

Действительно, так как $\mu^k(\tau)\gamma'_k = k\,\mu^k(\tau)\gamma'_k + 2\beta_{k-1}(\tau)$, то в силу следствия 1 приходим к следствию 3.

## 4. Функция Бранжа $B_n(\tau)$

Пусть $f \in S'$ и $\Psi(\tau,z)$ – её производящая функция. Фиксируем $n \in \boldsymbol{N}\setminus\{1\}$. Пусть функции $y_{1,n}(\tau),\ldots,y_{n-1,n}(\tau)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$y'_{s,n} + y'_{s-1,n} = (n-s)\,y_{s,n} + (n-s+1)\,y_{s-1,n},\ s = 1,\ldots,n-1,$$

с начальными условиями $y_{s,n}(0) = \dfrac{s}{n-s}$. Здесь и далее будем считать $y_{0,n}(\tau) = 0$.

В нормальной форме введённая система имеет вид

$$y' = -(n-1)y_1,$$

$$y_s' = 2\sum_{j=1}^{s-1}(-1)^{s+j+1}(n-j)y_j - (n-s)y_s,\ s = 2,\ldots,n-1, \qquad (*)$$

и является, очевидно, системой линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Её решение $\{y_{1,n}(\tau),\ldots, y_{n-1,n}(\tau)\}$ существует на $(-\infty, \infty)$ и единственно, если известно его значение в некоторой точке этого промежутка. Обозначим через

$$Y_n\left(\tau, y_1^0,\ldots,y_s^0,\ldots,y_{n-1}^0\right) = \left\{Y_{1,n}\left(\tau, y_1^0\right),\ldots,Y_{s,n}\left(\tau, y_s^0\right),\ldots,Y_{n-1,n}\left(\tau, y_{n-1}^0\right)\right\}$$

решение этой системы, удовлетворяющее начальному условию

$$Y_n\left(0, y_1^0,\ldots,y_s^0,\ldots,y_{n-1}^0\right) = \left\{y_1^0,\ldots,y_s^0,\ldots,y_{n-1}^0\right\}.$$

В дальнейшем потребуются два решения системы, выделяемые из общего решения конкретными начальными условиями:

$$Y_n\left(\tau, \frac{1}{n-1},\ldots,\frac{s}{n-s},\ldots,n-1\right) = \left\{Y_{1,n}\left(\tau,\frac{1}{n-1}\right),\ldots,Y_{s,n}\left(\tau,\frac{s}{n-s}\right),\ldots,Y_{n-1,n}(\tau,n-1)\right\}$$

и

$$Z_n\left(\tau,-1,\ldots,\frac{(-1)^s-1}{2},\ldots,\frac{(-1)^{n+1}-1}{2}\right) =$$

$$= \left\{Z_{1,n}(\tau,-1),\ldots,Z_{s,n}\left(\tau,\frac{(-1)^s-1}{2}\right),\ldots,Z_{n-1,n}\left(\tau,\frac{(-1)^{n-1}-1}{2}\right)\right\}.$$

Легко проверить, что

$$Y'_{s,n}(\tau) = Y'_{s,n}\left(\tau, \frac{s}{n-s}\right) = Z_{s,n}\left(\tau, \frac{(-1)^s - 1}{2}\right) = Z_{s,n}(\tau).$$

Функцию $Y_{s,n}(\tau) = Y_{s,n}\left(\tau, \frac{s}{n-s}\right)$ назовём $(s,n)$-функцией Бранжа.

Введём функцию

$$B_n(\tau) = \sum_{k=1}^{n-1}\left(1 - k^2|\gamma_k(\tau)|^2\right)Y_{n-k,n}(\tau),\ \tau > 0,\ n \in \boldsymbol{N}\setminus\{1\},$$

где $\gamma_k(\tau)$ – логарифмические коэффициенты функции $e^{-\tau}\Psi(\tau,z)$. Назовём её $B_n$-функцией Бранжа.

Отметим, что $B_n(\tau) = 0$ для функции $\dfrac{e^{\tau}z}{\left(1-e^{i\varphi}z\right)^2}$ является производящей функцией для $K_\varphi(z)$. Легко видеть, что между значениями функций $B_n$ в нуле и функционалом Милина $M_n(f)$ устанавливается простая связь:

$$B_n(0) = \sum_{k=1}^{n-1}\left(1 - k^2|\gamma_k(f)|^2\right)\frac{n-k}{k} = nM_n(f).$$

**Теорема 3**. *Производная $B_n$-функции Бранжа представляется формулой*

$$B'_n(\tau) = \sum_{k=1}^{n-1}\left|\gamma'_k(\tau)\right|^2 Y'_{n-k,n}(\tau),\ \tau > 0.$$

► Действительно, дифференцируя $B_n(\tau)$, получаем $B'_n(\tau) = 2K_n(\tau) + L_n(\tau)$, где

$$K_n(\tau) = -\sum_{k=1}^{n-1}k^2\,\mathrm{Re}\left(\overline{\gamma_k}\gamma'_k\right)Y_{n-k,n} \text{ и } L_n(\tau) = \sum_{k=1}^{n-1}\left(1-k^2|\gamma_k|^2\right)Y'_{n-k,n}.$$

Преобразуем $K_n(\tau)$, пользуясь следствиями теоремы 2:

$$K_n(\tau) = \sum_{k=1}^{n-1}k\,\mathrm{Re}\left[\left(\overline{\beta_k} - \overline{\beta_{k-1}}\right)(\beta_k + \beta_{k-1})\right]Y_{n-k,n} =$$

$$= -\sum_{k=0}^{n-1}k\left(|\beta_k|^2 - |\beta_0|^2\right)Y_{n-k,n} + \sum_{k=0}^{n-1}k\left(|\beta_{k-1}|^2 - |\beta_0|^2\right)Y_{n-k,n}.$$

Так как $Y_{0,n}(\tau) = 0$, то

$$\sum_{k=1}^{n-1}k\left(|\beta_{k-1}|^2 - |\beta_0|^2\right)Y_{n-k,n} = \sum_{k=1}^{n-1}(k+1)\left(|\beta_{k-1}|^2 - |\beta_0|^2\right)Y_{n-k-1,n}$$

и, значит,

$$K_n(\tau) = \sum_{k=1}^{n-1}\left(|\beta_k|^2 - |\beta_0|^2\right)\left[-kY_{n-k,n} + (k+1)Y_{n-k-1,n}\right].$$

Пользуясь дифференциальными уравнениями для $Y_{s,n}$, представим $K_n(\tau)$ в виде

$$K_n(\tau) = \sum_{k=1}^{n-1}\left(|\beta_k|^2 - |\beta_0|^2\right)\left[Y'_{n-k,n} + Y'_{n-k-1,n}\right]$$

и окончательно

$$K_n(\tau)=\sum_{k=1}^{n-1}\left(|\beta_k|^2+|\beta_{k-1}|^2-2|\beta_0|^2\right)Y'_{n-k,n} .$$

Теперь преобразуем $L_n(\tau)$. С учетом следствия 3 теоремы 2 имеем

$$L_n(\tau)=\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-|\beta_k-\beta_{k-1}|^2\right)Y'_{n-k,n}$$

и, следовательно,

$$L_n(\tau)=\sum_{k-1}^{n-1}\left[1-|\beta_k|^2-|\beta_{k-1}|^2+2\operatorname{Re}\left(\overline{\beta_k}\beta_{k-1}\right)\right]Y'_{n-k,n} .$$

Суммируя $2K_n(\tau)$, $L_n(\tau)$ и учитывая, что $4|\beta_0|^2=1$, получаем

$$B'_n(\tau)=\sum_{k=1}^{n-1}\left[|\beta|^2+|\beta_{k-1}|^2+2\operatorname{Re}\left(\overline{\beta_k}\beta_{k-1}\right)\right]Y'_{n-k,n}=\sum_{k=1}^{n-1}|\beta_k+\beta_{k-1}|^2\,Y'_{n-k,n} .$$

В силу следствия 3 теоремы 2 и равенства $|\mu(\tau)|=1$ имеем $|\beta_k+\beta_{k-1}|=|\gamma'_k|$. Этим замечанием завершаем вывод формулы для $B_n(\tau)$. ◄

## 5. Функции $Y_{s,n}(\tau)$, $Z_{s,n}(\tau)$

Найдем общее решение системы (*). Соответствующая её числовая матрица $A_n=\|c_{i,j}\|$, $1\le i, j\le n-1$, составленная из коэффициентов при $y_i$, в правых частях уравнений системы (*), имеет своими элементами $c_{i,j}=2(-1)^{s+j+1}(n-j)$ при $j<s$, $c_{j,j}=-(n-j)$, $c_{i,j}=0$ при $j>s$ и, следовательно, является нижней левой треугольной матрицей. Её характеристические значения $\lambda_r$, $r=1,\dots,n-1$, легко находятся: $\lambda_r=n-r$.

Будем искать частное решение системы (*), соответствующее характеристическому значению $\lambda_r$, $r=1,\dots,n-1$, в виде матрицы-столбца

$$\gamma^{(r)}=\left\{\gamma_1 e^{-(n-r)\tau},\dots,\gamma_{n-1}e^{-(n-r)\tau}\right\}^T ,$$

где $\gamma_{1,r},\dots,\gamma_{n-1,r}$ – некоторые постоянные. Не умаляя общности решения, можно считать, что $\gamma_{r,r}=1$. Из (*) для $\gamma_{s,r}$ получаем систему линейных однородных алгебраических уравнений

$$(1-r)\gamma_{s,r}=0 ,$$

$$2\sum_{j=1}^{s-1}(-1)^{s+j+1}(n-j)\gamma_{j,s}+(s-r)\gamma_{s,r}=0 ,\ s=2,\dots,n-1.$$

Найдем её решение. Легко видеть, что $\gamma_{s,r}=0$, если $s<r$. Считая $r+1\le s\le n-1$, имеем

$$2(-1)^s\sum_{j=1}^{s-2}(-1)^j(n-j)\gamma_{j,r}+(s-1-r)\gamma_{s-1,r}=0 ,$$

$$2(-1)^{s+1}\sum_{j=1}^{s-1}(-1)^j(n-j)\gamma_{j,r}+(s-r)\gamma_{s,r}=0 .$$

Складывая левую и правую части этих уравнений, получаем рекуррентную формулу

$$(s-r)\gamma_{s,r}+(2n-s-r+1)\gamma_{s-1,r}=0,$$

позволяющую найти $\gamma_{s,r}$, если известно $\gamma_{s-1,r}$. Последовательно применяя её и имея в виду, что $\gamma_{r,r} = 1$, находим

$$\gamma_{s,r} = (-1)^{s-r} \frac{(2n-2r)!}{(s-r)!(2n-s-r)!} = (-1)^{s-r} \binom{2n-2r}{s-r}.$$

Таким образом, характеристическому значению $\lambda_r = n - r$, $r = 1,\ldots, n-1$, матрицы $A_n$ соответствует частное решение $\gamma^{(r)}(\tau)$ системы (*):

$$\gamma^{(r)}(\tau) = \left\{\gamma_1^{(r)},\ldots,\gamma_{n-1}^{(r)}(\tau)\right\}^T,$$

где

$$Y_s^{(r)}(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } s = 1,\ldots,r-1, \\ e^{-(n-r)\tau} & \text{при } s = r, \\ (-1)^{s-r}\dbinom{2n-2r}{s-r} e^{-(n-r)\tau} & \text{при } s = r+1,\ldots,n-1 \end{cases}$$

или, что то же самое,

$$\gamma^{(r)}(\tau) = (-1)^{s-r}\binom{2n-2r}{s-r} e^{-(n-r)\tau},\ s = 1,\ldots,n-1.$$

Обозначая через $C_{r,n}$ , $r = 1,\ldots, n-1$, произвольные постоянные, представим общее решение системы (*) в виде $\{\gamma_{1,n}(\tau),\ldots, \gamma_{n-1,n}(\tau)\}^{\mathrm{T}}$, где

$$\gamma_{s,n}(\tau) = \sum_{r=1}^{n-1} (-1)^{s-r}\binom{2n-2r}{s-r} C_{r,n} e^{-(n-r)\tau},\ s = 1,\ldots,n-1,$$

или, что то же самое,

$$\gamma_{s,n}(\tau) = \sum_{r=1}^{s} (-1)^{s-r}\binom{2n-2r}{s-r} C_{r,n} e^{-(n-r)\tau},\ s = 1,\ldots, n-1.$$

Для получения функций $Y_{s,n}(\tau)$ остаётся найти $C_{r,n}$, такие, что $\gamma_{s,n}(0) = s/(n-s)$, $s = 1,\ldots, n-1$, то есть решить систему линейных неоднородных алгебраических уравнений

$$\sum_{r=1}^{s} (-1)^{s-r}\binom{2n-2r}{s-r} C_{r,n} = \frac{s}{n-s},\ s = 1,\ldots, n-1.$$

Последовательно решая уравнения, находим

$$C_{r,n} = \frac{1}{n-r}\binom{2n-2r}{r-1},\ r = 1,\ldots, n-1.$$

Итак, $(s,n)$-функция Бранжа имеет вид

$$Y_{s,n}(\tau) = \sum_{r=1}^{s} \frac{(-1)^{s-r}}{n-r}\binom{2n-2r}{s-r}\binom{2n-2r}{r-1} e^{-(n-r)\tau}.$$

Отметим, что $\lim\limits_{\tau\to\infty} Y_{s,n}(\tau) = 0$. Дифференцированием $Y_{s,n}(\tau)$ приходим к функции

$$Z_{s,n} = -\sum_{r=1}^{s} (-1)^{s-r}\binom{2n-2r}{s-r}\binom{2n-r}{r-1} e^{-(n-r)\tau}.$$

Функции $Y_{s,n}(\tau)$, $Z_{s,n}(\tau)$ являются многочленами относительно $e^{-\tau}$ без свободного члена. Покажем, что они являются частными (вырожденными) случаями обобщенных гипергеометрических рядов Гаусса.

Заменяя в сумме, представляющей $Z_{s,n}(\tau)$, индекс суммирования $r$ на $j$ по формуле $r = s - j$, получаем

$$Z_{s,n} = -e^{-(n-s)\tau} \sum_{j=0}^{s-1} (-1)^{s-r} \binom{2n-2s+2j}{j} \binom{2n-s+j}{s-j-1} e^{-j\tau} .$$

Пусть $m = n - s + 1$, $k = s - 1$ и $(a)_n$ – символ Похгаммера, то есть

$$(a)_0 = 1,\ (a)_j = a(a+1)\ldots(a+j-1),\quad j \in \boldsymbol{N} .$$

Учитывая, что

$$\binom{a}{n} = \frac{(a-n+1)_n}{n!},\ a, n \in \boldsymbol{N} ,$$

представим $Z_{s,n}(\tau)$ в виде

$$Z_{s,n}(\tau) = -e^{-(n-s)\tau} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \frac{(2m+j+1)_j\,(2m+2j)_{k-j}}{j!(k-j)} e^{-j\tau} .$$

Для дальнейших преобразований суммы, стоящей справа, воспользуемся формулами

$$(-k)_j (k-j)! = (-1)^j k!,$$

$$(2m+j-1)_j\,(2m+2j)_{k-j} = \frac{(2m)_{k+j}\left(m-\frac{1}{2}\right)_j}{\left(m+\frac{1}{2}\right)_j (2m-1)_j} .$$

После выполнения несложных операций получим, что

$$Z_{s,n}(\tau) = -\frac{e^{-(n-s)\tau}}{k!} \sum_{j=0}^{k} \frac{(2m)_{k+j}\,(-k)_j \left(m-\frac{1}{2}\right)_j}{\left(m+\frac{1}{2}\right)_j (2m-1)_j} \frac{e^{-j\tau}}{j!} =$$

$$= -\frac{e^{-(n-s)\tau}}{k!} (2m)_k\ {}_3F_2 \left[ \begin{matrix} 2m+k, -k, m-\frac{1}{2} \\ m+\frac{1}{2}, 2m-1 \end{matrix} ; e^{-\tau} \right] .$$

Напомним, что использованные здесь обозначения – частный случай обозначения специальных рядов Гаусса:

$${}_pF_q \left[ \begin{matrix} a_1, \ldots a_p \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix} ; z \right] = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a_1)_j \ldots (a_p)_j}{(b_1)_j \ldots (b_p)_j} \frac{z^j}{j!} ,$$

где $p$ и $q$ – натуральные числа, $a_1, \ldots, a_p$, $b_1, \ldots, b_q$ – постоянные. Ряд в правой части этой формулы называют гипергеометрическим рядом, если $p = 2$, $q = 1$, и обобщённым гипергеометрическим рядом, если $p \geq 3$, $q \geq 2$. Ряд обрывается и превращается в конечную сумму, если среди параметров числителя $a_1, \ldots, a_p$, есть хотя бы один, равный натуральному числу, умноженному на $-1$.

Аналогичные проведенным выше преобразования приводят к представлению $Y_{s,n}$-функции Бранжа в виде

$$Y_{s,n}(\tau)=\frac{e^{-(n-s)\tau}}{(m-1)k!}(2m)_k\ {}_4F_3\left[\begin{matrix}2m+k,-k,m-\frac{1}{2},m-1\\ m+\frac{1}{2},2m-1,m\end{matrix};e^{-\tau}\right].$$

## 6. Функции $k(\tau,z)$ и $K(z)$

Пусть $f(z)\in S'$ и $\Psi(\tau,z)$ – её производящая функция. В области $\Psi(\tau,E)$ определена функция $f(\tau,w)$, обратная к $\Psi(\tau,z)$ при фиксированном $\tau$. Для неё

$$\frac{\partial F(\tau,w)}{\partial\tau}=-F(\tau,w)\frac{\mu(\tau)+F(\tau,w)}{\mu(\tau)-F(\tau,w)},\ f(0,w)=f^{-1}(w).$$

Функция $\zeta(\tau,z)=f(\tau,\Psi(0,z))$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению Лёвнера

$$\frac{d\zeta}{d\tau}=-\zeta\frac{\mu(\tau)+\zeta}{\mu(\tau)-\zeta},\ \zeta(0,z;\mu)=z\in E,$$

с зависящим от параметра $z$ решением. Оно, рассматриваемое как функция начального условия, конформно отображает единичный круг в единичный круг, причем $\zeta(\tau,0;\mu)=0$, $\zeta'_z(\tau,0;\mu)=e^{-\tau}$.

Поскольку предел

$$\lim_{\tau\to\infty}e^{\tau}\zeta(\tau,z;\mu)=z+\ldots$$

отличен от постоянной, то по известной теореме об однолистности предельной функции для семейства однолистных отображений указанная функция принадлежит классу $S$.

**Лемма 1**. *При* $\mu(\tau)=-1$ *решением уравнения Левнера является функция*

$$\zeta(\tau,z;-1)=k(\tau,z)=\frac{\left(1-\sqrt{1+4e^{-\tau}K(z)}\right)^2}{4e^{-\tau}K(z)},\ 0<\tau<\infty,$$

*где*

$$K(z)=K_0(z)=\frac{z}{(1-z)^2},$$

*при этом* $K(k(\tau,z))=e^{-\tau}K(z)$.

► В уравнении

$$\frac{d\zeta}{d\tau}=-\zeta\frac{1-\zeta}{1+\zeta}$$

переменные разделяются. Интегрированием получаем $\ln\zeta-2\ln(1-\zeta)=-\tau+\ln C$, где $C$ – постоянная. Её находим из условия $\zeta(0,z;-1)=z$. Имеем после потенцирования $K(k(\tau,z))=e^{-\tau}K(z)$. Для завершения доказательства остается решить алгебраическое уравнение относительно $\zeta$ и выбрать ветвь квадратного корня.◄

Отметим следующие свойства функции $k(\tau,z)$.

Функция $k(\tau,z)$ при фиксированном $\tau$, $0 < \tau < \infty$, реализует однолистное конформное отображение круга $E$ на единичный круг с исключенным прямолинейным отрезком от точки –1 до точки $-e^{\tau}\left(1-\sqrt{1-e^{-\tau}}\right)^2$.

Функция $k(\tau,z)$ продолжается на границу круга $E$ и дугу этой окружности с концами в точках $\left(\sqrt{1-e^{-\tau}} \pm ie^{-\tau/2}\right)^2$, содержащую точку –1, отображает на указанный отрезок.

Существует предел произведения $e^{\tau}k(\tau,z)$ при $\tau \to \infty$ и $z \in E$. Выполнив вычисления, находим

$$\lim_{\tau\to\infty} e^{\tau} k(\tau,z) = K(z).$$

Разложение $k(\tau,z)$ по степеням $z$ дается формулой [35]

$$k(\tau,z) = e^{-\tau}\sum_{l=1}^{\infty} j\, {}_2F_1\left[\begin{matrix}1+l, 1-l\\ 3\end{matrix}; e^{-\tau}\right] z^l .$$

Более сильный результат

$$k^m(\tau,z) = e^{-m\tau}\sum_{l=m}^{\infty} j\binom{l+m-1}{2m-1} {}_2F_1\left[\begin{matrix}m+l, m-l\\ 2m+1\end{matrix}; e^{-\tau}\right] z^l, \ m \in \boldsymbol{N},$$

получен Г.А. Юферовой [36].

**Теорема 4**. *Соседние члены последовательности* $\left\{\dfrac{dk^m(\tau,z)}{d\tau}\right\}_{m=1}^{\infty}$, $z \in E$, *связаны между собой дифференциальным соотношением*

$$\frac{d}{d\tau}\left[\frac{1}{m+1}\frac{dk^{m+1}(\tau,z)}{d\tau} + \frac{1}{m}\frac{dk^m(\tau,z)}{d\tau}\right] = \frac{dk^{m+1}(\tau,m)}{d\tau} - \frac{dk^m(\tau,z)}{d\tau}.$$

► Полагая $k = k(\tau,z)$, умножим равенство

$$\frac{dk}{d\tau} = -k\frac{1-k}{1+k}$$

на $mk^{m-1}$ и на $(m+1)k^m$. Получим

$$\frac{1}{m}\frac{dk^m}{d\tau} = -k^m\frac{1-k}{1+k}, \quad \frac{1}{m+1}\frac{dk^{m+1}}{d\tau} = -k^{m+1}\frac{1-k}{1+k}.$$

Складывая эти равенства, будем иметь

$$\frac{1}{m+1}\frac{dk^{m+1}}{d\tau} + \frac{1}{m}\frac{dk^m}{d\tau} = -k^m\frac{1-k}{1+k}(1+k) = k^{m+1} - k^m.$$

Для окончания доказательства теоремы остаётся выполнить дифференцирование по $\tau$ полученного равенства.◄

Представим разложение общего члена последовательности $\left\{\dfrac{dk^m(\tau,z)}{d\tau}\right\}_{m=1}^{\infty}$ по степеням $z$ в виде

$$\frac{dk^m(\tau,z)}{d\tau} = m\sum_{j=m}^{\infty}\Gamma_j^{(m)}(\tau) z^j, \ m \in \boldsymbol{N}, \ z \in E.$$

Из теоремы 4 выводим:

**Следствие**. *При* $m = 1,2,\ldots$ *имеет место равенство*

$$\frac{d}{d\tau}\Gamma_j^{(m+1)}(\tau)+\frac{d}{d\tau}\Gamma_j^{(m)}(\tau)=(m+1)\Gamma_j^{(m+1)}(\tau)-m\Gamma_j^{(m)}(\tau).$$

Действительно,

$$\frac{d}{d\tau}\left[\sum_{j=m}^{\infty}\Gamma_j^{(m+1)}(\tau)z^j+\sum_{j=m}^{\infty}\Gamma_j^{(m)}(\tau)z^j\right]=(m+1)\sum_{j=m}^{\infty}\Gamma_j^{(m+1)}(\tau)z^j-m\sum_{j=m}^{\infty}\Gamma_j^{(m)}(\tau)z^j.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $z$, в силу единственности разложения голоморфной функции в степенной ряд, получаем указанное соотношение.

Отметим, что коэффициенты $\Gamma_j^{(m)}(\tau)$ в точке $\tau = 0$ принимают значения

$$\Gamma_{m+k}^{(m)}(0)=\begin{cases} -1, \text{ если } k=0,\\ (-1)^k\,2, \text{ если } k=1,2,\ldots\end{cases}$$

## 7. Последовательность $\{W_m(\tau,z)\}_{m=0}^{\infty}$

Образуем определенную в $(0, \infty)\times E$ последовательность $\{W_m(\tau,z)\}_{m=0}^{\infty}$, полагая

$$W_0(\tau,z)=-K(z)\frac{d\ln k(\tau,z)}{d\tau},\ W_{m+1}(\tau,z) = k(\tau,z)\ W_m(\tau,z),\ m = 0,1,\ldots .$$

Легко видеть, что

$$W_m(\tau,z) = k^m(\tau,z)\ W_0(\tau,z),\ m = 1,2,\ldots,$$

то есть
$$W_m(\tau,z)=-\frac{K(z)}{m}\frac{dk^m(\tau,z)}{d\tau}=e^{-m\tau}z^{m+1}+\ldots .$$

Последовательность $\left\{K(z)k^m(\tau,z)\right\}_{m=0}^{\infty}$ изучалась в работах [37, 38] независимо от исследований Ванштейна [39] последовательности $\left\{\frac{K(z)}{m}\frac{dk^m(\tau,z)}{d\tau}\right\}_{m=1}^{\infty}$, ставших нам известными позднее. Результаты этих исследований используются в дальнейшем изложении решения задачи Бибербаха как менее сложные в сравнении [40, 41].

Начальный элемент $W_0(\tau,z) = z + \ldots$ этой последовательности представляет собой отображение круга $E$ на плоскость с тремя прямолинейными, не проходящими через нуль разрезами. Два из них лежат на мнимой оси, симметричны относительно нуля и имеют концы в точках $\pm i\frac{e^{\tau}}{2}$ соответственно, а третий лежит на вещественной оси и начинается в точке

$$-\frac{e^{-2\tau}\left(1-\sqrt{1-e^{-\tau}}\right)^2}{1-e^{2\tau}\left(1-\sqrt{1-e^{-\tau}}\right)^4}.$$

**Лемма 2**. *Разложение* $W_0(\tau,z)$ *по степеням* $z$ *имеет вид*

$$W_0(\tau)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]}e^{-2k\tau}\binom{m+2k+1}{4k+1}{}_2F_1\left[\begin{matrix}2k+2+m,2k-m\\4k+3\end{matrix};e^{-\tau}\right]z^{m+1}=z+\dots .$$

► Пользуясь тем, что $k(\tau,z)$ – решение уравнения Лёвнера с управляющей функцией $\mu(\tau)=-1$, и леммой 1, имеем

$$W_0(\tau,z)=-K(z)\frac{d\ln k(\tau,z)}{d\tau}=K(z)\frac{1-k(\tau,z)}{1+k(\tau,z)}=\frac{e^{\tau}k(\tau,z)}{1-k^2(\tau,z)}=z+\dots .$$

Раскладывая в ряд функцию

$$W_0(\tau,z)=\frac{e^{\tau}k(\tau,z)}{1-k^2(\tau,z)},\ \zeta\in E,$$

сначала получим $$W_0(\tau,z)=e^{\tau}\sum_{l=0}^{\infty}lk^{2l+1}(\tau,z)$$

и затем воспользуемся разложением $k^m(\tau,z)$ по степеням $z$. Получим

$$W_0(\tau,z)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-2k\tau}\sum_{m=2k+1}^{\infty}\binom{m+2k}{4k+1}{}_2F_1\left[\begin{matrix}2k+1+m,2k+1-m\\4k+3\end{matrix};e^{-\tau}\right]z^m .$$

Меняя порядок суммирования, приходим к формуле, указанной в лемме.◄

Коэффициенты разложения $W_0(\tau,z)$ по степеням $z$ можно записать, пользуясь полиномами Лежандра и гипергеометрическими функциями ${}_3F_2$. Поскольку

$$W_0(\tau,z)=K(z)\frac{1-k(\tau,z)}{1+k(\tau,z)}\ ,\ k(\tau,z)=\frac{\left(1-\sqrt{1+4e^{-\tau}K(z)}\right)^2}{4e^{-\tau}K(z)},$$

то, подставляя $k=k(\tau,z)$ в $W_0(\tau,z)$, получим

$$W_0(\tau,z)=\frac{K(z)}{\sqrt{1-4e^{-\tau}K(z)}}=\frac{z}{(1-z)\sqrt{1-2(1-2e^{-\tau})z+z^2}} .$$

Учитывая, что многочленами Лежандра $P_m(t)$ являются коэффициенты разложения в ряд функции [42, с.396, формула 6.821]

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tz+z^2}}=\sum_{m=0}^{\infty}P_m(t)z^m\ ,\ t\in[-1,1],$$

по целым положительным степеням $z$, получаем после выполнения несложных вычислений

$$W_0(\tau,z)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{m-1}P_k\left(1-2e^{-\tau}\right)z^m=\sum_{m=1}^{\infty}m\,{}_3F_2\left[\begin{matrix}1+m,1-m,\frac{1}{2}\\1,\frac{3}{2}\end{matrix};e^{-\tau}\right]z^m .$$

**Теорема 4′**. *Соседние члены последовательности связаны между собой дифференциальным соотношением*

$$\frac{d}{d\tau}W_{m+1}(\tau,z)+\frac{d}{d\tau}W_m(\tau,z)=(m+1)W_{m+1}(\tau,z)-mW_m(\tau,z) .$$

► Достаточно умножить доказанное в теореме 4 соотношение на $K(z)$ и учесть, что

$$W_m(\tau,z) = -\frac{K(z)}{m}\frac{dk^m(\tau,z)}{d\tau} . ◄$$

Функция $W_m(\tau,z)$, $m = 0,1,\ldots$, голоморфна относительно $z$ в круге $E$ и, согласно теореме Тейлора, раскладывается в степенной ряд

$$W_m(\tau,z) = \sum_{l=0}^{\infty} Q_{l,m}(\tau)z^l = \sum_{l=m+1}^{\infty} Q_{l,m}(\tau)z^l ,$$

равномерно сходящийся внутри $E$.

Представим соотношение, указанное в теореме 4′, в виде рядов. Получим

$$\sum_{l=0}^{\infty}\frac{d}{d\tau}Q_{l,m+1}(\tau)z^l + \sum_{l=0}^{\infty}Q_{l,m}(\tau)z^l = (m+1)\sum_{l=0}^{\infty}Q_{l,m+1}(\tau)z^l - m\sum_{l=0}^{\infty}Q_{l,m}z^l .$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $z$ в левой и правой частях этого равенства, получим

$$\frac{d}{d\tau}Q_{l,m+1}(\tau) + \frac{d}{d\tau}Q_{l,m}(\tau) = (m+1)Q_{l,m+1}(\tau) - mQ_{l,m}(\tau) ,$$

$$l = m + 1,\ m + 2,\ldots;\ \ m = 0,\ 1,\ldots \qquad (**)$$

Подсчитаем значения $Q_{l,m}(0)$. Так как

$$\sum_{l=0}^{\infty}Q_{l,m}(0)z^l = W_m(0,z) = \frac{z^{m+1}}{1-z^2} = \sum_{j=0}^{\infty} z^{m+1+2j} ,$$

то $Q_{l,m}(0) = 0$ при $l \leqslant m$ и

$$Q_{l,m}(0) = \frac{1-(-1)^{l-m}}{2},\ l = m + 1,\ m + 2,\ldots .$$

**Теорема 5**. *Справедливо равенство*

$$Z_{s,n}(\tau) = -\,Q_{n,n-s}(\tau),\ \ n \in \boldsymbol{N}\setminus\{1\},\ s = 1,\ldots,n-1.$$

► Фиксируем $n \in \boldsymbol{N}\setminus\{1\}$. Сделаем в системе (**) для $Q_{l,m}(\tau)$ замену индекса $m$ на $s$ по формуле $m = n - s$, $s = 1,2,\ldots,n - 1$. Получим для функций $Q_{n,n-s}(\tau)$ систему дифференциальных уравнений

$$Q'_{n,n-s+1}(\tau) + Q'_{n,n-s}(\tau) = (n - s + 1)Q_{n,n-s+1}(\tau) - (n - s)Q_{n,n-s}(\tau),$$

$$l = n - s + 1,\ \ n - s + 2,\ldots$$

с начальными условиями

$$Q_{1,n-s}(0) = 0 \text{ при } l \le n - s,\ Q_{l,n-s}(0) = \frac{1-(-1)^{l-n+s}}{2} \text{ при } l \ge n - s.$$

Выделим из этой системы те уравнения, для которых $l = n$. Получим

$$Q'_{n,n-s+1}(\tau) + Q'_{n,n-s}(\tau) = (n - s + 1)Q_{n,n-s}(\tau) - (n - s)Q_{n,n-s}(\tau).$$

При $\tau = 0$ функция $Q_{n,n-s}(\tau)$ принимает значения

$$Q_{n,n-s}(0) = \frac{1-(-1)^{s}}{2},\ s = 1,\ldots,n-1.$$

Введем функцию

$$Z_{s,n}(\tau) = -\,Q_{n,n-s}(\tau),\ s = 1,\ldots,n-1.$$

Она удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$Z'_{s,n}(\tau) + Z'_{s-1,n}(\tau) = -\,(n-s)Z_{s,n}(\tau) + (n-s+1)Z_{s-1,n}(\tau),\ s = 1,\ldots,n-1,$$

с начальным условием

$$Z_{s,n}(0) = \frac{-1+(-1)^s}{2},$$

совпадающей с системой, полученной в (**) для производных $(s,n)$-функций Бранжа. В силу известной теоремы единственности решения системы дифференциальных уравнений получаем

$$Y'_{s,n}\left(\tau, \frac{s}{n-s}\right) = Z_{s,n}\left(\tau, \frac{1-(-1)^s}{2}\right) = -Q_{n,n-s}(\tau). ◄$$

## 8. Неравенства для коэффициентов функции $W_m(\tau,z)$

Функция

$$H_\gamma(z) = \frac{z}{1-2\cos\gamma z + z^2}$$

отображает круг $E$ на плоскость, разрезанную по вещественной оси от точки $-1/(4\cos^2(\gamma/2))$ до $-\infty$ и от точки $1/(4\sin^2(\gamma/2))$ до $+\infty$. Образуем семейство функций $H_0(k(\tau,z))$, полагая

$$\cos\gamma = 1 - e^{-\tau} + e^{-\tau}\cos\theta,\ \ 0 < \tau < \infty.$$

**Лемма 3**. *Справедливо функциональное соотношение*

$$H_\theta(k(\tau,z)) = e^{-\tau}H_\gamma(z),\ 0 < \tau < \infty,\ \ z \in E.$$

► К обеим частям равенства

$$\frac{1}{k(\tau,z)} - 2 + k(\tau,z) = e^\tau\left(\frac{1}{z} - 2 + z\right),$$

следующего из леммы 1, прибавим $2 - 2\cos\theta$. Получим

$$\frac{1}{k(\tau,z)} - 2\cos\theta + k(\tau,z) = e^\tau\left[\frac{1}{z} - 2\left(1 - e^{-\tau} + e^{-\tau}\cos\theta\right) + z\right],$$

то есть равенство

$$\frac{1}{H_\theta(k(\tau,z))} = e^\tau\frac{1}{H_\gamma(z)},$$

приводящее к утверждению леммы. ◄

**Лемма 4**. *Имеет место формула*

$$H_\gamma(z) = W_0(\tau,z) + 2\sum_{m=1}^{\infty} W_m(\tau,z)\cos m\theta.$$

► Действительно,

$$H_\gamma(z) = e^\tau H_\theta(k(\tau,z)) = \frac{e^\tau k}{1-k^2}\frac{1-k^2}{1-2\cos\theta k + k^2} = \frac{e^\tau k}{1-k^2}\operatorname{Re}\frac{1+e^{i\theta}k}{1-e^{i\theta}k}.$$

Если $|\zeta| < 1$, то

$$\mathrm{Re}\frac{1+e^{i\theta}\zeta}{1-e^{i\theta}\zeta} = 1 + 2\sum_{m=1}^{\infty} \zeta^m \cos m\theta\,,$$

причем ряд равномерно сходится внутри $E$. Значит,

$$H_\gamma(z) = W_0(\tau, z)\left(1 + 2\sum_{m=1}^{\infty} k^m(\tau, z)\cos m\theta\right) =$$

$$= W_0(0, z) + 2\sum_{m=1}^{\infty} W_m(\tau, z)\cos m\theta\,. \blacktriangleleft$$

**Следствие**. *Для суммы членов последовательности* $\{W_m(\tau, z)\}_{m=0}^{\infty}$ *имеем*

$$2\sum_{m=1}^{\infty} W_m(\tau, z) = K(z) - W_0(\tau, z) = K(z)\left[1 + \frac{d\ln k(\tau, z)}{d\tau}\right] = 2K(z)\frac{k(\tau, z)}{1 + k(\tau, z)}\,.$$

Для доказательства следствия достаточно применить лемму 4 при $\theta = 0$ ($\gamma = 0$) и определение $W_0(\tau,z)$.

Разложим функцию $H_\gamma(z)$ в ряд по степеням $z$. Поскольку

$$W_m(\tau, z) = \sum_{l=0}^{\infty} Q_{l,m}(\tau) z^l\,,$$

то
$$H_\gamma(z) = \sum_{l=0}^{\infty} Q_{l,0}(\tau) z^l + 2\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} Q_{l,m}(\tau) z^l \cos m\theta\,.$$

Меняя в двойной сумме порядок суммирования и объединяя члены с одинаковыми степенями $z$, получаем

$$H_\gamma(z) = \sum_{m=1}^{\infty}\left[Q_{m,0}(\tau) + 2\sum_{l=1}^{m-1} Q_{m,l}(\tau)\cos l\theta\right] z^m\,.$$

Для коэффициентов указанного разложения функции $H_\gamma(z)$ можно дать другое представление, использующее многочлены Чебышева второго рода

$$U_m(t) = \frac{\sin\left((m+1)\arccos t\right)}{\sin t}\,,\ m = 0, 1, \ldots, -1 \le t \le 1.$$

Производящей функцией для этих многочленов является функция

$$\frac{1}{1 - 2tz + z^2} = \sum_{m=0}^{\infty} U_m(t) z^m\,,$$

и поэтому $H_\gamma(z)$ можно представить в виде ряда по степеням $z$:

$$H_\gamma(z) = \sum_{m=1}^{\infty} U_{m-1}(\cos\gamma) z^m\,.$$

Сравнивая два указанных представления $H_\gamma(z)$, получим

$$Q_{m,0}(\tau) + 2\sum_{l=1}^{\infty} Q_{m,l}(\tau)\cos l\theta = U_{m-1}(\cos\gamma)\,,\ m = 0, 1, \ldots\,.$$

Теперь мы обратимся к доказательству неравенств $Q_{l,m}(\tau) > 0$. Будем использовать многочлены Лежандра $P_m(t)$ и многочлены Гегенбауэра $C_m^p(t)$, определяемые как коэффициенты разложения по степеням $z$ производящей функции [42, с. 406]

$$\frac{1}{\left(1-2tz+z^2\right)^p}=\sum_{n=0}^{\infty}C_m^p(t)z^m\ ,\ p>0,\ -1\le t\le 1.$$

Заметим, что $U_m(t)=C_m^1(t)$, $P_m(t)=C_m^{\frac{1}{2}}(t)$.

**Лемма 5**. *Имеет место функциональное соотношение*

$$U_n\left(xy+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\zeta\right)=\sum_{j=0}^{n}A_{j,n}P_j(\zeta),$$

где
$$A_{j,n}=D_{j,n}\left(1-x^2\right)^{\frac{j}{2}}\left(1-y^2\right)^{\frac{j}{2}}C_{n-j}^{j+1}(x)C_{n-j}^{j+1}(y)$$

и
$$D_{j,n}=\frac{4^j(n-j)!(j!)^2(2j+1)}{(n-j+1)!}.$$

► Вывод этой формулы как разложения Фурье функции $U_n$ по полиномам Лежандра $P_n(\zeta)$ приведен в [43]. Здесь мы воспользуемся функциональным соотношением [42, с. 407, формула 6.923]

$$C_n^p\left(\cos\psi\cos\theta+\sin\psi\sin\theta\cos\varphi\right)=$$

$$=\frac{\Gamma(2p-1)}{[\Gamma(p)]^2}\sum_{k=0}^{n}\frac{2^{2k}(n-k)![\Gamma(p+k)]^2}{\Gamma(2p+n+k)}(2p+2k-1)\times$$

$$\times\sin^k\psi\sin^k\theta C_{n-k}^{p+k}(\cos\psi)C_{n-k}^{p+k}(\cos\theta)C_k^{p-\frac{1}{2}}(\cos\varphi)$$

($\psi$, $\theta$, $\varphi$ – действительные, $p\neq 1/2$), составляющим содержание «теоремы сложения» для полиномов Гегенбауэра, доказанной в [44]. Положим $x=\cos\psi$, $y=\cos\theta$, $\zeta=\cos\varphi$, $p=1$. Выполнив простые действия, приходим к соотношению, указанному в лемме.◄

**Теорема 6**. *Коэффициенты* $Q_{l,m}(\tau)$, $0<\tau<\infty$, *в разложении* $W_m(\tau,z)$ *по степеням* $z$ *неотрицательны*.

► Положим в лемме 5 $x=y=\sqrt{1-e^{-t}}$, $\zeta=\cos\theta$. Учитывая, что $\cos\gamma=1-e^{-\tau}+$ $+e^{-\tau}\cos\theta$, получим

$$U_n(\cos\gamma)=\sum_{j=0}^{n}D_{j,n}e^{-j\tau}\left[C_{n-j}^{j+1}\sqrt{1-e^{-\tau}}\right]^2P_j(\cos\theta),$$

где коэффициенты при $P_j(\cos\theta)$, очевидно, неотрицательны. Воспользуемся формулой [42, с. 394, формула 6.8.12.(4)]

$$P_j(\cos\theta)=\sum_{l=0}^{j}\frac{(2l)!(2j-2l)!}{4^j(l!)^2(l-j)!}\cos(j-2l)\theta,$$

убеждаемся, что правая часть в представлении $U_n(\cos\gamma)$ – многочлен относительно косинуса дуг, кратных $\theta$, с положительными коэффициентами. Но это значит, что в представлении $U_n(\cos\gamma)$ все коэффициенты неотрицательны. ◄

## 9. Завершение доказательства гипотезы Бибербаха

**Теорема 7**. *Множество значений функционала Милина $M_n(f)$, $n = 2,3,\dots$, на классе $S'$ совпадает с отрезком* $\left[0, \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-1\right]$.

► В силу ранее сказанного в доказательстве нуждается только утверждение, что

$$\min_{f\in S'} M_n(f) = 0 .$$

Так как $M_n(f) = nB_n(0)$, то достаточно убедиться в том, что функция Бранжа $B_n(\tau)$ в точке $\tau = 0$ принимает неотрицательное значение для любой непрерывной управляющей функции $\mu(\tau)$, $0 < \tau < \infty$. Производная $B'_n(\tau)$ представима формулой

$$B'_n(\tau) = \sum_{k=1}^{n-1} |\gamma'_k(\tau)|^2\, Y'_{n-k,n}(\tau),\ 0 < \tau < \infty.$$

Ее можно также представить в силу теоремы 5 в виде

$$B'_n(\tau) = -\sum_{k=1}^{n-1} |\gamma'_k(\tau)|^2\, Q_{n,k}(\tau) .$$

Поскольку, как указано в теореме 6, все $Q_{n,k}(\tau) > 0$ и, как отмечено ранее, $\lim_{\tau\to\infty} B_n(\tau) = 0$, то $B_n(\tau) > 0$, $n = 2, 3,\dots$, на полуоси $0 < \tau < \infty$. Следовательно, $B_n(0) \geq 0$.

**Следствие 1**. *На классе $S$ однолистных функций в круге* $\{z \in \boldsymbol{C} : |z| < 1\}$ *функций*

$$f(z) = z + c_2(f)z^2 + \dots + c_n(f)z^n + \dots$$

*для функционала Милина справедлива точная оценка*: $M_n(f) \geq 0$. *В ней знак равенства реализуется для функций Кебе $K_\varphi(z)$.*

Действительно, в силу плотности класса $S'$ в $S$ теорема 7 распространяется на класс $S$.

**Следствие 2**. *На классе $S$ имеет место точная оценка* $|c_n(f)| \leq n$, $n \in \boldsymbol{N}\setminus\{1\}$ .

Действительно, в теореме 1 доказано неравенство

$$|c_n(f)| \leq n e^{-M_n(f)} ,$$

которое вместе с теоремой 7 доказывает справедливость гипотезы Бибербаха.

## 10. Точные оценки производных однолистных функций

Из оценки $|c_2(f)| \leq 2$ на классе функций $f(z) \in S$ выводятся как прямое её следствие неравенства

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2} ,$$

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3} .$$

Во всех случаях равенство имеет место только для функции Кёбе.

В работе [45] доказана теорема об оценках $\left|f^{(n)}(z)\right|, n = 2,3,...,$ на классе $S$, следующая из оценки $|c_n(t)| \leq n$ на этом классе.

**Теорема 8**. *Если* $f(z) \in S$ , *то*

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \le n!\frac{n+|z|}{(1-|z|)^{n+2}},\ n \in \boldsymbol{N} \setminus \{1\}.$$

*Знак равенства в оценках реализуется только на функциях Кёбе*

$$K_{\varphi}(z) = \frac{z}{\left(1-e^{i\varphi}z\right)^2},\ 0 \le \varphi \le 2\pi,$$

*при* $\varphi = -\arg z$.

Нижняя оценка $\left|f^{(n)}(z)\right|$, $n \ge 2$, тривиальна, поскольку $f(z) = z \in S$ .

Марти [46] при изучении задачи о максимуме модуля коэффициентов функций класса $S$ использовал предложенный им простой тип вариаций и указал соотношения между соседними коэффициентами экстремальной функции в этой задаче. Предполагая, что справедлива гипотеза Бибербаха, Марти сформулировал теорему 8.

## 11. Доказательство гипотезы Робертсона

В 1932 г. Литтлвуд и Пэли [47] доказали равномерную ограниченность коэффициентов функций класса $S_2$, то есть коэффициентов нечетных функций

$$f_2(z) = z + c_3^{(2)}(f_2)z^3 + c_5^{(2)}(f_2)z^5 + \ldots \in S,$$

и заметили, что несомненно $\left|c_{2k+1}^{(2)}\right| \le 1$ . Хотя уже в следующем году Фекете и Сеге [4] построили опровергающий пример, доказав точное неравенство

$$\left|c_3^{(2)}(f_2)\right| \le \frac{1}{2} + e^{-\frac{2}{3}} = 1{,}013\ldots,$$

эта гипотеза долгое время являлась хорошей ловушкой для ложных доказательств гипотезы Бибербаха.

В 1936 г. Робертсон [48] предположил, что справедливо более сильное утверждение: сумма квадратов модулей первых $n$ коэффициентов функций класса $S_2$ не превосходит $n$:

$$\sum_{k=1}^{n}\left|c_{2k-1}^{(2)}(f_2)\right|^2 \le n,\ n \in \boldsymbol{N} \setminus \{1\}.$$

Поскольку гипотеза Милина $M_n(f) \ge 0$ справедлива, то из неравенства

$$C_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|c_{2k-1}^{(2)}(f_2)\right|^2 \le e^{-M_n(f)},$$

установленного в ходе доказательства теоремы 1, следует справедливость гипотезы Робертсона.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bieberbach L.* Uber die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln, sitzungsber // Preuss. Akad. Wiss. Phys. Math. Kl. 1916. V. 138. P. 940 – 955.
2. *Lowner K.* Untersuchungen uber schlichte konforme Abbildung des Einheitskreises // Math. Ann. 1923. V. 89. P. 103 – 121.
3. *Littlewood J.E.* On inequalities of the theory of functions // Proc. London Math. Soc. 1925. V. 23. P. 481 – 519.

4. *Fekete* Eine Bemerkung uber ungerade Funktionen / Fekete, Szego // J. London Math. Soc. 1933. V. 8. P. 85 – 89.
5. *Голузин Г.М.* О коэффициентах однолистных функций // Матем. сб. 1948. Т. 22(64):3. С. 373 – 380.
6. *Базилевич И.Е.* О теоремах искажения и коэффициентах однолистных функций // Матем. сб. 1951. Т. 28(70):1. С. 147 – 164.
7. *Garabedian P.R.*, *Shiffer M.A.* A proof of the Bieberbach conjecture for the fourth coefficient // J. Ration. Mech. Anal. 1955. V. 4. P. 427 – 465.
8. *Милин М.М.* Оценка коэффициентов однолистных функций // ДАН СССР. 1965. Т. 160. № 4. С. 769 – 771.
9. *Pederson R.N.* A proof of the Bieberbach conjecture for the sixth coefficient // Arch. Ration. Mech. and Anal. 1968. V. 31. P. 331 – 351.
10. *Ozawa M.* An elementary proof of the Bieberbach conjecture for the sixth coefficient // Kodai Math. Semin. Repts. 1969. V. 21. P. 129 – 132.
11. *Pederson R.N.*, *Shiffer M.A.* A proof of the Bieberbach conjecture for the fifth coefficient // Arch. Ration. Mech. and Anal. 1972. V. 45. P. 161 – 193.
12. *Fitzgerald C.H.* Exponentiation of certain quadratic inequalities for schlicht functions // Bull. Amer. Math. Soc. 1972. V. 78. P. 209 – 210.
13. *Horoviz D.* A refinement for coefficient estimates of univalent functions // Proc. Amer. Math. Soc. 1976. V. 54. P. 176 – 178.
14. *Lowner K.* Untersuchungen uber die Verzerrung bei konformen Abbildung des Einheitskreises $|z| < 1$, die durch Funktionen mit nicht verschwinden der Ableitung geliefert warden // Leipziger Berichter. 1917. V. 69. P. 89 – 106.
15. *Nevanlinna R.* Uber die Konforme Abbildung von Sterngebieten // Ofvers Finska Vet. Soc. Forh. 1921. V. 53(A). № 6.
16. *Dieudonne* Sur les functions univalentes // C.R. 1931. V. 192. P. 1148 – 1150.
17. *Kaplan W.* Close-to-convex schlicht functions // Michigan Math. J. 1952. V. 1. № 2. P. 169 – 185.
18. *Базилевич И.Е.* Области начальных коэффициентов ограниченных однолистных функций p-кратной симметрии // Матем. сб. 1957. Т. 43. № 4. С. 409 – 488.
19. *Куфарев П.П.* Одно замечание об экстремальных задачах теории однолистных функций // Ученые записки Томского университета. 1950. Т. 14. С. 3 – 4.
20. *Куфарев П.П.* Об одном свойстве экстремальных областей задачи коэффициентов // ДАН СССР. 1954. Т. 97. № 3. С. 391 – 393.
21. *Куфарев П.П.* Одно замечание к задаче коэффициентов // Ученые записки Томского университета. 1955. Т. 25. С. 15 – 18.
22. *Хейман К.* Многолистные функции / К. Хейман. М.: ИЛ, 1960.
23. *Милин И.М.* Однолистные функции и ортонормированные системы. М.: Наука, 1971. 256 с.
24. *Базилевич И.Е.* О дисперсии коэффициентов однолистных функций // Матем. сб. 1965. Т. 68(110):4. С. 549 – 560.
25. *Широков Н.А.* Теорема регулярности Хеймана // Зап. научн. семин. ЛОМИ АН СССР. 1972. Т. 24. С. 182 – 200.
26. *Лебедев Н.А.*, *Милин И.М.* Об одном неравенстве // Вестник Ленинградского университета. 1965. Т. 19. С. 157, 158.
27. *Милин И.М.* О коэффициентах однолистных функций // ДАН СССР. 1967. Т. 176. № 5. С. 1015 – 1018.
28. *Гриншпан А.З.* Коэффициенты неравенства для конформных отображений с гомеоморфным продолжением // Сибирский матем. журнал. 1985. Т. 26. № 1. С. 49 – 65.
29. *Гриншпан А.З.* Однолистные функции и регулярно измеримые отображения // Сибирский матем. журнал. 1986. Т. 27. № 6. С. 50 – 64.
30. *Fitzgerald C.N.* Quadratic inequalities and coefficient estimates for schlicht function // Arch. Rational. Mech. and Anal. 1972. V. 46. № 5. P. 356 – 368.
31. *Милин И.М.* Однолистные функции и ортонормированные системы. М.: Наука, 1971.

32. *Branges L*. A proof of the Bieberbach conjecture // LOMI preprintes. E. 5 – 84. P. 1 – 21.
33. *Александров И.А*. Доказательство Л. де Бранжа гипотезы И.М. Милина и гипотезы Л. Бибербаха // Сибирский матем. журнал. 1987. Т. 28. № 2. С. 7 – 20.
34. *Александров И.А*., *Милин И.М.* О гипотезе Бибербаха и логарифмических коэффициентах однолистных функций // Изв. вузов. Математика. 1989. Т. 8 (327). С. 3 – 15.
35. *Садритдинова Г.Д*. Области с разрезами и свойства управляющих функций в уравнении Левнера // Тез. докл. Междунар. конф. по матем. и механике. Томск: ТГУ, 2003.
36. *Юферова Г.А*. Уравнение Левнера и ортогональные многочлены // Вестник ТГУ. 2007. № 298. С. 121 – 124.
37. *Александров И.А., Александров А.И., Касаткина Т.В.* Функционал Милина и полиномы де Бранжа // Актуальные проблемы современной математики. Новосибирск: НИИ МИОО, 1997. – Т. 3. С. 13 – 18.
38. *Александров И.А*. Производящая функция для полиномов де Бранжа // Теория функций и ее применения: Тез. докл. школы-конференции, 15 – 22 июня 1995 г., г. Казань. 1995. С. 4 – 6.
39. *Weinstein L*. The Bieberbach conjecture // Intern. Math. Res. Notices. 1991. V. 5. P. 61 – 64.
40. *Wilf H.* A footnote on two proof of the Bieberbach conjecture – de Branges Theorem // Bull. London Math. Soc. 1994. V. 26. P. 61 – 63.
41. *Koef W*., *Schmersau D*. Weinstain's functions and the Askey – Gasper indentity // URL: http://www.opus.kobv.de/zib/volltexte/1996/217/ps/SC-96-06.ps.
42. *Градштейн И.С*., *Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физико-математическая литература, 1951.
43. *Александров И.А*., *Юферова Г.А*. Формула суммирования для полиномов Чебышева и ее применение // Вестник ТГУ. Математика и механика. 2009. № 2(6). С. 5 – 13.
44. *Уиттекер Е.Т*., *Ватсон Г.Н*. Курс современного анализа // ГТТН. М.; Л., 1934. Ч. 2.
45. *Александров А.И*., *Александров И.А*. Точные оценки производных однолистных функций // Исследования по математическому анализу и алгебре. Вып. 3. Томск: ТГУ, 2001. С. 12 – 16.
46. *Marty F.* Sur le module des coefficients de Maclaurin d'une function univalente // Compt rend. Acad. Sci. 1934. V. 198. P. 1569 – 1571.
47. *Littlewood J.E*., *Paley R.E.* A proof the an odd schlicht function has bounded coefficients // J. London Math. Soc. 1932. V. 5. Pt. 3. № 27. P. 167 – 169.
48. *Robertson M.S.* A mark on the odd schlicht functions // Bull. Amer. Math. Soc. 1936. № 6. P. 366 – 370.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

**АЛЕКСАНДРОВ Игорь Александрович** – доктор физико-математических наук, чл.-корр. РАО, профессор, заведующий кафедрой математического анализа механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: ma@math.tsu.ru.
**АЛЕКСАНДРОВ Александр Игоревич** – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории математического анализа научно-исследовательской части Томского государственного университета. E-mail: aai@igrem.ru.
**КОПАНЕВА Лидия Сергеевна** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математического анализа механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: ma@math.tsu.ru.
**ЮФЕРОВА Галина Александровна** – кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры высшей математики и математической физики факультета естественных наук и математики Томского политехнического университета. E-mail: galaOk@gmail.com.

Статья принята в печать 11.11.2009 г.