УДК 512.541

С.Я. Гриншпон, Т.А. Ельцова

СВЯЗЬ ДЕЛИМЫХ И РЕДУЦИРОВАННЫХ ГРУПП С ГОМОМОРФНОЙ УСТОЙЧИВОСТЬЮ

В статье исследуется связь делимых и редуцированных групп с гомоморфной устойчивостью. Рассматривается также гомоморфная устойчивость относительно периодических групп.

Ключевые слова: *гомоморфный образ*, *группа гомоморфизмов*, *делимая группа*, *редуцированная группа.*

При изучении групп гомоморфизмов абелевых групп и исследовании вполне характеристических подгрупп интерес представляет следующий вопрос: в каких случаях объединение (теоретико-множественное) гомоморфных образов группы A в группе B является подгруппой группы B.

Группа A называется *гомоморфно устойчивой относительно группы B*, если объединение гомоморфных образов группы A в группе B является подгруппой группы B, то есть если $\bigcup\limits_{\gamma\in \mathrm{Hom}(A,B)} \mathrm{Im}\gamma$ – подгруппа группы B.

В [1] и [2] решен вопрос о гомоморфной устойчивости прямых сумм абелевых групп, получено полное описание гомоморфно устойчивых вполне разложимых и жестких групп. Также исследована гомоморфная устойчивость произвольных абелевых групп относительно прямых произведений. В [3] доказаны результаты о гомоморфной устойчивости вполне транзитивных групп. В [4] исследована гомоморфная устойчивость прямых произведений абелевых групп.

В настоящей статье исследуется гомоморфная устойчивость делимых и редуцированных групп, а также гомоморфная устойчивость относительно делимых и редуцированных групп. Рассматривается также гомоморфная устойчивость относительно периодических групп. Везде далее в этой статье под группой будем понимать аддитивно записанную абелеву группу.

Рассмотрим гомоморфную устойчивость относительно периодических групп. Обозначим через $T(A)$ – периодическую часть группы A. Будем говорить, что A – *группа с нулевой характеристикой*, если выполняется одно из двух условий: 1) A – непериодическая группа и фактор-группа $A/T(A)$ содержат хотя бы один элемент нулевой характеристики; 2) A – периодическая группа.

Теорема 1. Всякая группа с нулевой характеристикой гомоморфно устойчива относительно любой периодической группы.

Доказательство. I. Пусть B – периодическая группа, A – непериодическая группа с нулевой характеристикой, $H = \bigcup\limits_{\alpha\in \mathrm{Hom}(A,B)} \mathrm{Im}\,\alpha$ и $h_1, h_2 \in H$, $h_1 - h_2 \neq 0$. Рассмотрим в группе $A/T(A)$ элемент $a + T(A)$, имеющий характеристику $(0,0,\ldots,0,\ldots)$. Обозначим через $\langle a + T(A)\rangle_*$ подгруппу, сервантно порожденную в группе $A/T(A)$ элементом $a + T(A)$. Так как $\chi(a + \mathrm{T}(A)) = (0,0,\ldots,0,\ldots)$, то $\langle a + T(A)\rangle_* = \langle a + T(A)\rangle$. $\langle a + T(A)\rangle$ – бесконечная циклическая группа, и поэтому существует $\beta \in \mathrm{Hom}(\langle a + T(A)\rangle, \langle h_1 - h_2\rangle)$ такой, что $\beta(\langle a + T(A)\rangle) = h_1 - h_2$. $\langle h_1 - h_2\rangle$ как ограниченная группа является алгебраически компактной группой. Так как алгебраически компактные группы сервантно инъективны, то существует гомоморфизм $\overline{\beta}$ группы $A/T(A)$ в группу $\langle h_1 - h_2\rangle$, продолжающий гомоморфизм β. $\overline{\beta}$ можно рассматривать как гомоморфизм группы $A/T(A)$ в группу B.

Пусть φ – естественный эпиморфизм группы A на группу $A/T(A)$ и $\gamma = \overline{\beta}\varphi$. Имеем $\gamma \in \mathrm{Hom}(A, B)$ и $\gamma(a) = \overline{\beta}(a + T(A)) = \beta(a + T(A)) = h_1 - h_2$. Значит, $h_1 - h_2 \in H$. Следовательно, группа A гомоморфно устойчива относительно группы B.

II. Пусть A и B – периодические группы. Так как $\mathrm{Hom}(A,B) \cong \prod_p \mathrm{Hom}(A_p, B_p)$, где A_p, B_p – p-компоненты групп A и B соответственно, то, не умаляя общности, можно считать, что A и B – p-группы. Пусть $H = \bigcup_{\alpha \in Hom(A,B)} \mathrm{Im}\,\alpha$, $h_1, h_2 \in H$ и $h_1 - h_2 \neq 0$. Запишем группу A в виде $A = D \oplus C$, где D – делимая часть группы A, C – редуцированная группа.

а) Рассмотрим сначала случай, когда C – неограниченная группа. Известно, что неограниченная редуцированная p-группа имеет циклические прямые слагаемые сколь угодно больших порядков [5, с.142]. Выберем в группе C циклическое прямое слагаемое $\langle c\rangle$ такое, что $o(c) \geq o(h_1 - h_2)$. Имеем $C = C_1 \oplus \langle c\rangle$ и $A = D \oplus C_1 \oplus \langle c\rangle$. Существует гомоморфизм β группы $\langle c\rangle$ в группу $\langle h_1 - h_2\rangle$, такой, что $\beta(c) = h_1 - h_2$. Пусть π – группы A на прямое слагаемое $\langle c\rangle$ и $\gamma = \beta\pi$. Можно рассматривать γ как гомоморфизм группы A в группу B. Имеем $\gamma(c) = h_1 - h_2$ и, значит, $h_1 - h_2 \in H$.

б) Пусть C – ограниченная группа и $D = 0$. Всякая ограниченная p-группа является прямой суммой циклических p-групп [5, с.107]. Группу A ($A = C$) можно записать в виде $A = \langle c\rangle \oplus A_1$, где $o(c) = p^m$ и $p^m A_1 = 0$ (то есть p^m – наибольший порядок циклических прямых слагаемых в разложении группы A). Так как гомоморфизмы не увеличивают порядок элемента, то $o(h_1 - h_2) \leq p^m$, и поэтому $o(c) \geq o(h_1 - h_2)$. Проведя рассуждения, аналогичные вышеприведенным (см. случай а)), получаем, что существует $\gamma \in \mathrm{Hom}(A, B)$ такой, что $\gamma(c) = h_1 - h_2$.

в) Пусть теперь C – ограниченная группа и $D \neq 0$. Запишем группу B в виде $B = D_1 \oplus C_1$, где D_1 – делимая часть группы B, C_1 – редуцированная группа. Если $D_1 = 0$, то $\mathrm{Hom}(A, B) = \mathrm{Hom}(C, C_1)$ и мы находимся в ситуации случая б).

Пусть $D_1 \neq 0$. Запишем элемент $h_1 - h_2$ в виде $d_1 + c_1$, где $d_1 \in D_1$, $c_1 \in C_1$. Выберем в группе D элемент d такой, что $o(d) \geq o(d_1)$. Учитывая инъективность группы D_1, получаем, что существует гомоморфизм φ_1 группы D в группу D_1 такой, что $\varphi_1 d = d_1$. Запишем группу C в виде $C = \langle c\rangle \oplus C_1$, где $o(c) = p^m$ и $p^m C_1 = 0$. Имеем $o(c) \geq o(c_1)$, и поэтому существует гомоморфизм $\varphi_2 \in \mathrm{Hom}(C, C_1)$ такой, что $\varphi_2(c) = c_1$.

Пусть π_1, π_2 – проекции группы A на прямые слагаемые D и C соответственно, и пусть $\gamma = \varphi_1\pi_1 + \varphi_2\pi_2$. Имеем $\gamma \in \mathrm{Hom}(A, B)$ и $\gamma(d + c) = d_1 + c_1 = h_1 - h_2$. Значит, $h_1 - h_2 \in H$.

Итак, любая периодическая группа A гомоморфно устойчива относительно группы B.

Следствие 2. Всякая периодическая группа гомоморфно устойчива относительно любой группы.

Доказательство. Пусть A – периодическая группа, B – произвольная группа. Для всякого гомоморфизма $\eta\in\mathrm{Hom}(A, B)$ имеем $\mathrm{Im}\eta \subset T(B)$, где $T(B)$ – периодическая часть группы B, и поэтому η можно рассматривать как гомоморфизм группы A в периодическую группу $T(B)$. Остается применить предыдущую теорему.

Теперь рассмотрим гомоморфную устойчивость делимых групп. Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Всякая делимая группа гомоморфно устойчива относительно любой группы.

Доказательство. Пусть A – делимая группа, B – произвольная группа.

По теореме 23.1 [5, с.124] группа A есть следующая прямая сумма:

$$A = \underset{r_0(A)}{\oplus} Q \oplus \underset{p}{\oplus}\left[\underset{r_p(A)}{\oplus} Z\left(p^{\infty}\right)\right].$$

Используя лемму 5 и теорему 1 из [2] получаем, что группа A гомоморфно устойчива относительно любой группы.

При рассмотрении гомоморфной устойчивости относительно делимых групп получаем такой результат.

Теорема 4. Всякая абелева группа гомоморфно устойчива относительно любой делимой группы.

Доказательство. Пусть A – произвольная абелева группа, D – произвольная делимая группа.

Если A – периодическая группа, то по следствию 2 группа A гомоморфно устойчива относительно группы D.

Пусть A – непериодическая группа. Тогда она является либо группой без кручения, либо смешанной.

Рассмотрим $\bigcup\limits_{\alpha\in\mathrm{Hom}(A,D)} \mathrm{Im}\,\alpha$. Обозначим это объединение через H, то есть $H = \bigcup\limits_{\alpha\in\mathrm{Hom}(A,D)} \mathrm{Im}\,\alpha$.

Рассмотрим вначале делимую группу D без кручения.

Пусть $h_1, h_2 \in H$, $h_1 \neq h_2$. Тогда существуют гомоморфизмы α_1, α_2 группы A в группу D и элементы a_1, a_2 группы A, такие, что $h_1 = \alpha_1 a_1$, $h_2 = \alpha_2 a_2$. Рассмотрим разность $h_1 - h_2$. Обозначим ее через h, то есть пусть $h_1 - h_2 = h$, $h \neq 0$. Имеем $h \in D$. Так как D – группа без кручения, то $o(h) = \infty$. В группе A существует элемент a, такой, что его порядок также равен бесконечности, то есть $o(a) = \infty$. Рассмотрим циклическую группу $\langle a\rangle$, порожденную элементом a, и гомоморфизм $\xi:\langle a\rangle \to D$, такой, что $\mathrm{Im}\langle a\rangle = \langle h\rangle$ и $\xi(a) = h$. По теореме Бэра [5, с. 119, теорема 21.1] группа D – инъективная, и, следовательно, существует гомоморфизм η: $A \to D$, делающий следующую диаграмму коммутативной.

$$\begin{array}{ccc} \langle a\rangle & \xrightarrow{i} & A \\ \downarrow\xi & \swarrow\eta & \\ D & & \end{array},$$

где i – естественное вложение группы $\langle a\rangle$ в группу A и $i(a) = a$. Тогда имеем, с одной стороны, $\eta\; i(a) = \xi(a) = h$, с другой – $\eta\; i(a) = \eta(i(a)) = \eta(a)$. Таким образом, существуют гомоморфизм η группы A в группу D и элемент a группы A, такие, что $h_1 - h_2 = h = \eta\, a \in H$. Следовательно, группа A гомоморфно устойчива относительно группы D.

Пусть теперь группа D не является группой без кручения, то есть она либо периодическая, либо смешанная.

Пусть $h_1, h_2 \in H$, $h_1 \neq h_2$. Тогда существуют гомоморфизмы α_1, α_2 группы A в группу D и элементы a_1, a_2 группы A, такие, что $h_1 = \alpha_1 a_1$, $h_2 = \alpha_2 a_2$. Пусть $h = h_1 - h_2$, $h \neq 0$.

Пусть a ненулевой элемент группы A бесконечного порядка. Рассмотрим гомоморфизм γ группы $\langle a\rangle$ в группу $\langle h\rangle$, такой, что $\gamma\, a = h$. Тогда гомоморфизм γ можно рассматривать как гомоморфизм группы $\langle a\rangle$ в группу D. Существует гомоморфизм η: $A \to D$, такой, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} \langle a\rangle \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\gamma"'] & A \arrow[dl, "\eta"] \\ D & \end{tikzcd} .$$

Значит, $\eta\, a = \gamma\, a = h$, то есть $h \in \operatorname{Im}\eta$ и поэтому группа A гомоморфно устойчива относительно группы D.

При рассмотрении гомоморфной устойчивости относительно редуцированных групп получаем следующий результат.

Предложение 5. Если группа A гомоморфно устойчива относительно группы B, то группа A гомоморфно устойчива относительно редуцированной части группы B.

Доказательство. Пусть группа A гомоморфно устойчива относительно группы B. Группа B представима в виде прямой суммы своей делимой части D и редуцированной части R: $B = D \oplus R$. Используя теорему 2 из [2], получаем, что группа A гомоморфно устойчива относительно редуцированной части группы B.

Для групп без кручения справедлива теорема.

Теорема 6. Группа без кручения A гомоморфно устойчива относительно группы B тогда и только тогда, когда группа A гомоморфно устойчива относительно редуцированной части группы B.

Доказательство. Необходимость следует из предложения 5. Докажем достаточность.

Пусть A и B – произвольные группы. Имеем $B = D \oplus R$, где D – делимая часть группы B, R – ее редуцированная часть. Пусть группа A гомоморфно устойчива относительно редуцированной части группы B.

Возьмем элементы c и d из объединения $\bigcup\limits_{\alpha\in \operatorname{Hom}(A,B)} \operatorname{Im}\alpha$. Тогда существуют гомоморфизмы β и γ группы A в группу B и элементы a и b группы A, такие, что $c = \beta a$, $d = \gamma b$.

Пусть π_1, π_2 – проекции группы B на прямые слагаемые R и D соответственно. Тогда $\pi_1\beta$, $\pi_1\gamma$ есть гомоморфизмы группы A в группу R – редуцированную часть группы B, а $\pi_2\beta$, $\pi_2\gamma$ – гомоморфизмы группы A в группу D – делимую часть группы B. Тогда $c = \beta a = \pi_1\beta a + \pi_2\beta a$, $d = \gamma b = \pi_1\gamma b + \pi_2\gamma b$. Следовательно, $c - d = (\pi_1\beta a - \pi_1\gamma b) + (\pi_2\beta a - \pi_2\gamma b)$. Так как $\pi_1\beta a - \pi_1\gamma\, b$ есть элемент группы R, а группа A гомоморфно устойчива относительно группы R, то существуют гомоморфизм λ группы A в группу R и элемент g группы A, такие, что $\pi_1\beta a - \pi_1\gamma b = \lambda g$

(если $\pi_1\beta a - \pi_1\gamma b = 0$, то $\lambda = 0$, а в качестве элемента g берем любой ненулевой элемент группы A).

Существует гомоморфизм $\xi:\langle g\rangle \to D$, такой, что $\xi\, g = \pi_2\beta\, a - \pi_2\gamma\, b$. В силу инъективности группы D гомоморфизм ξ можно продолжить до гомоморфизма η группы A в группу D. Следовательно, $c - d = \lambda\, g+\eta\, g$. Так как гомоморфизмы λ и η можно рассматривать как гомоморфизмы группы A в группу B (D и R – подгруппы группы B), то $c - d = (\lambda+\eta)\, g$, где $\lambda+\eta \in \mathrm{Hom}(A, B)$. Следовательно, группа A гомоморфно устойчива относительно группы B.

Теперь рассмотрим гомоморфную устойчивость редуцированных групп. Получена следующая теорема.

Теорема 7. Если редуцированная часть группы A гомоморфно устойчива относительно группы B, то группа A гомоморфно устойчива относительно группы B.

Доказательство. Пусть A и B – произвольные группы и $A = R \oplus D$, где R – редуцированная часть группы A, D – делимая часть группы A. Пусть R гомоморфно устойчива относительно группы B. По теореме 3 группа D гомоморфно устойчива относительно группы B. Тогда группа A гомоморфно устойчива относительно группы B [2, теорема 1].

Для групп без кручения справедлив следующий критерий.

Теорема 8. Группа без кручения A гомоморфно устойчива относительно группы B тогда и только тогда, когда редуцированная часть группы A гомоморфно устойчива относительно группы B.

Доказательство. Достаточность следует из теоремы 7. Докажем необходимость.

Пусть A и B – произвольные группы и A гомоморфно устойчива относительно группы B.

Представим группы в виде прямых сумм своих редуцированных частей R, R_1 и делимых частей D, D_1: $A = R \oplus D$ и $B = R_1 \oplus D_1$. Используя теорему 2 из [2], получаем, что группа A гомоморфно устойчива относительно R_1. Рассмотрим $\mathrm{Hom}(A, R_1)$.

Так как $\mathrm{Hom}(D, R_1) = 0$, то существует изоморфное отображение φ группы $\mathrm{Hom}(A, R_1)$ на группу $\mathrm{Hom}(R, R_1)$ [5, с. 213]. Если $\alpha \in \mathrm{Hom}(A, R_1)$, то $\varphi(a) = \alpha|_R$. Отсюда $\bigcup\limits_{\alpha\in\mathrm{Hom}(A,R_1)} \mathrm{Im}\,\alpha = \bigcup\limits_{\beta\in\mathrm{Hom}(R,R_1)} \mathrm{Im}\,\beta$. Так как, в силу гомоморфной устойчивости группы A относительно группы R_1, $\bigcup\limits_{\alpha\in\mathrm{Hom}(A,R_1)} \mathrm{Im}\,\alpha$ – подгруппа группы R_1, то и $\bigcup\limits_{\beta\in\mathrm{Hom}(R,R_1)} \mathrm{Im}\,\beta$ – подгруппа группы R_1. Следовательно, группа R гомоморфно устойчива относительно группы R_1.

По теореме 6 группа R гомоморфно устойчива относительно группы B.

Из предложения 5 и теоремы 7 вытекает

Следствие 9. Если редуцированная часть группы A гомоморфно устойчива относительно группы B, то A гомоморфно устойчива относительно редуцированной части группы B.

Доказательство. Пусть редуцированная часть группы A гомоморфно устойчива относительно группы B. Тогда по теореме 7 группа A гомоморфно устойчива относительно группы B. Следовательно, по предложению 5 группа A гомоморфно устойчива относительно редуцированной части группы B.

Из теорем 6 и 8 вытекает

Следствие 10. Группа без кручения A гомоморфно устойчива относительно группы B тогда и только тогда, когда редуцированная часть группы A гомоморфно устойчива относительно редуцированной части группы B.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гриншпон С.Я.*, *Ельцова Т.А.* Гомоморфно устойчивые абелевы группы // Вестник ТГУ. 2003. № 280. С. 31 – 33.
2. *Гриншпон С.Я.*, *Ельцова Т.А.* Гомоморфные образы абелевых групп // Фундаментальная и прикладная математика. 2007. Т. 13. № 3. С. 17 – 24.
3. *Гриншпон С.Я.*, *Ельцова Т.А.* Гомоморфная устойчивость и вполне транзитивность абелевых групп // Вестник ТГУ. 2007. № 298. С. 114 – 116.
4. *Гриншпон С.Я.*, *Ельцова Т.А.* Гомоморфная устойчивость прямых произведений абелевых групп // Вестник ТГУ. Математика и механика. 2008. № 1(2). С. 32 – 36.
5. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1974. Т.1. 335 с.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

ГРИНШПОН Самуил Яковлевич – профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: grinshpon@math.tsu.ru

ЕЛЬЦОВА Тамара Александровна – старший преподаватель кафедры высшей математики отделения фундаментального образования Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники. E-mail: yeltsova@sibmail.com

Статья принята в печать 30.04.2009 г.