

УДК 512.623

Г.Г. Пестов, Е.А. Фомина

ПОДПОЛЕ В БЕСКОНЕЧНО БЛИЗКИХ К БАЗЕ ЭЛЕМЕНТОВ

В статье доказано, что бесконечно близкие к базе элементы образуют подполе двумерно упорядоченного поля $\langle P, P^u \rangle$.

Ключевые слова: *двумерно упорядоченное поле, бесконечно близкий к базе элемент.*

Основные определения и результаты теории двумерно упорядоченных полей изложены в [1].

Бесконечно близкие к базе элементы

Определение 1. Пусть $\langle P, P^u \rangle$ – двумерно упорядоченное поле с базой P_0 . Элемент $a \in P$ называется бесконечно близким к базе P_0 , если:

$$\forall n \forall r \in P_0 \ r < a \Rightarrow (a - r)^n \in P^u$$

или

$$\forall n \forall r \in P_0 \ r < a \Rightarrow (a - r)^n \in -P^u.$$

Множество бесконечно близких к базе элементов обозначим через B .

Определение 2. Пусть $\langle P, P^u \rangle$ – двумерно упорядоченное поле с базой P_0 . Элемент $a \in P$ называется строго бесконечно близким к базе P_0 , если:

$$\forall n \forall r \in P_0 \ r < a \Rightarrow (a - r)^n \in \overset{o}{P^u} P$$

или

$$\forall n \forall r \in P_0 \ r < a \Rightarrow (a - r)^n \in -\overset{o}{P^u}.$$

Множество строго бесконечно близких к базе элементов обозначим через $\overset{o}{B} = B \setminus P_0$.

Введём следующие обозначения: $B^u = B \cap P^u$; $\overset{o}{B}^u = \overset{o}{B} \cap \overset{o}{P^u}$.

Лемма 1. Пусть $a \in B$. Если:

$$1. \ a \in \overset{o}{P^u}, \text{ то } \forall n \forall r \in P_0 \ r < a \Rightarrow (a - r)^n \in \overset{o}{P^u} \cap P^r.$$

$$2. \ a \in -\overset{o}{P^u}, \text{ то } \forall n \forall r \in P_0, \ r < a \Rightarrow (a - r)^n \in -\overset{o}{P^u} \cap P^r.$$

Доказательство.

1. Пусть $a \in \overset{o}{P^u}$. Согласно определению бесконечно близкого к базе элемента, имеем

$$\forall n \forall r \in P_0 \ r < a \Rightarrow (a - r)^n \in \overset{o}{P^u}.$$

Так как $r < a$, то $\forall r \ (a - r) \in \overset{o}{P^u} \cap P^r$.

Предположим, что при каком-нибудь n^* имеет место

$$(a - r)^{n^*} \in \overset{o}{P^u} \cap -P^r.$$

Тогда имело бы место следующее соотношение:

$$(a-r)^{2n*} \in -\overset{o}{P}^u,$$

что противоречит тому, что a – бесконечно близкий к базе элемент.

2. Случай $a \in -\overset{o}{P}^u$ рассматривается аналогично первому. В доказательстве всюду верхний конус $\overset{o}{P}^u$ нужно заменить на нижний конус $-\overset{o}{P}^u$. Лемма доказана.

Лемма 2. $B + P_0 \subset B$.

Доказательство. Пусть для определённости $a \in B^u, t \in P_0$. Имеем

$$\forall n \forall r \in P_0 \ r < a \Rightarrow (a-r)^n \in P^u,$$

тогда

$$\forall n \forall r, t \in P_0 \ r + t < a + t \Rightarrow ((a+t) - (r+t))^n = (a-r)^n \in P^u.$$

Следовательно, $a + t \in B^u$ и $B^u + P_0 \subset B^u$.

Аналогично доказывается, что $-B^u + P_0 \subset -B^u$. Значит, $B + P_0 \subset B$. Лемма доказана.

Отношение предпорядка в P^u

Пусть $x, y \in P^u$. Если $yx^{-1} \in \overset{o}{P}^u$, то будем говорить, что $y \succ x$ ($x \prec y$).

Лемма 3. Пусть $a \in \overset{o}{P}^u, b \in \overset{o}{B}^u$. Если

$$\forall k_1, k_2 \in P_0 \ k_1 < a, k_2 < b \Rightarrow (b - k_2) \succ (a - k_1),$$

то $\forall n (b - k_2)^n \succ (a - k_1)^n$ и $a \in \overset{o}{B}^u$.

Доказательство. При $n = 1$ по условию $(b - k_2) \succ (a - k_1)$ $a - k_1 \in \overset{o}{P}^u \cap P^r$.
При $n = l$ предположим, что

$$(b - k_2)^l \succ (a - k_1)^l, (a - k_1)^l \in \overset{o}{P}^u \cap P^r.$$

Пусть $n = l + 1$.

$$(b - k_2)^l(a - k_1), (a - k_1)^{l+1} \in \overset{o}{P}^u.$$

Тогда

$$(b - k_2)^{l+1} \succ (b - k_2)^l(a - k_1) \text{ и } (b - k_2)^l(a - k_1) \succ (a - k_1)^{l+1},$$

так как

$$(b - k_2)^{l+1}(b - k_2)^{-l}(a - k_1)^{-1} = (b - k_2)(a - k_1)^{-1} \in \overset{o}{P}^u \text{ (по условию)}$$

и $(b - k_2)^l(a - k_1)(a - k_1)^{-(l+1)} = (b - k_2)^l(a - k_1)^{-l} \in \overset{o}{P}^u$ (по предположению)

Следовательно, $(b - k_2)^{l+1} \succ (a - k_1)^{l+1}$ и, значит,

$$\forall n (b - k_2)^n \succ (a - k_1)^n.$$

А так как $\forall n (b - k_2)^n \in \overset{o}{P}^u$, то и $(a - k_1)^n \in \overset{o}{P}^u$, значит, $a \in \overset{o}{B}^u$, что и требовалось доказать.

Сумма бесконечно близких к базе элементов

Лемма 4. Пусть $a, b \in \overset{o}{B}^u$. Тогда

$$\forall m \forall n \forall k_1, k_2 \in P_0 (k_1 < a, k_2 < b) \Rightarrow (a - k_1)^m (b - k_2)^n \in \overset{o}{P}^u.$$

Доказательство. Так как $a, b \in \overset{o}{B}^u$, то

$$\forall m \forall n \forall k_1, k_2 \in P_0 (k_1 < a, k_2 < b) \Rightarrow ((a - k_1)^m, (b - k_2)^n, (a - k_1)^{2m}, (b - k_2)^{2n} \in \overset{o}{P}^u).$$

Тогда по лемме 3.4.3 [1]

$$(a - k_1)^m (b - k_2)^n \in \overset{o}{P}^u,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 5. Если $a, b \in B$, то $a + b \in B$.

Доказательство. Доказательство достаточно провести для строго бесконечно близких к базе элементов, так как элементы базы P_0 образуют линейно упорядоченное поле. Для доказательства теоремы нужно рассмотреть 4 случая:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } a, b \in \overset{o}{B}^u; & \text{c) } a \in \overset{o}{B}^u, b \in -\overset{o}{B}^u; \\ \text{b) } a, b \in -\overset{o}{B}^u; & \text{d) } a \in -\overset{o}{B}^u, b \in \overset{o}{B}^u. \end{array}$$

Первый случай аналогичен второму, третий – четвёртому.

а) Пусть $a, b \in \overset{o}{B}^u$.

Тогда

$$\forall n \forall k_1 \in P_0 (k_1 < a) \Rightarrow (a - k_1)^n \in \overset{o}{P}^u \cap P^r,$$

$$\forall n \forall k_2 \in P_0 (k_2 < b) \Rightarrow (b - k_2)^n \in \overset{o}{P}^u \cap P^r.$$

Докажем, что

$$\forall n \forall k \in P_0 k < a + b \Rightarrow ((a + b) - k)^n \in \overset{o}{P}^u.$$

Так как $k < a + b$, то найдутся такие $k_1, k_2 \in P_0$, что

$$k_1 < a, k_2 < b; k = k_1 + k_2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} ((a + b) - k)^n &= ((a - k_1) + (b - k_2))^n = \\ &= (a - k_1)^n + C_n^1 (a - k_1)^{n-1} (b - k_2) + \dots + C_n^{n-1} (a - k_1) (b - k_2)^{n-1} + (b - k_2)^n. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$(a - k_1)^n, (b - k_2)^n \in \overset{o}{P}^u;$$

по лемме 4 каждое слагаемое вида

$$C_n^m (a - k_1)^{n-m} (b - k_2)^m$$

принадлежит $\overset{o}{P}^u$.

В силу замкнутости верхнего конуса относительно сложения, имеем

$$((a + b) - k)^n \in \overset{o}{P}^u.$$

Значит, $a + b \in B$.

Аналогично рассматривается случай, когда $a, b \in -B^u$.

2. Пусть теперь $a \in B^u$, $b \in -B^u$. Тогда

$$\forall n \forall k_1 \in P_0 (k_1 < a) \Rightarrow (a - k_1)^n \in \overset{o}{P^u} \cap P^r,$$

$$\forall n \forall k_2 \in P_0 (k_2 < b) \Rightarrow (b - k_2)^n \in -\overset{o}{P^u} \cap P^r.$$

И пусть, для определённости, $a + b \in \overset{o}{P^u}$. Докажем, что

$$\forall n \forall k \in P_0 (k < a + b) \Rightarrow ((a + b) - k)^n \in \overset{o}{P^u}, \text{ где } k = k_1 + k_2.$$

Возможен один из следующих случаев:

а) $(a - k_1) \succ (b - k_2)^{-1}$;

б) $(a - k_1) \prec (b - k_2)^{-1}$.

Пусть для определённости имеет место случай а). Тогда

$$(a + b) - k = (a - k_1) + (b - k_2) = (a - k_1)[1 + (b - k_2)(a - k_1)^{-1}],$$

$$[(a - k_1) + (b - k_2)](a - k_1)^{-1} = [(a + b) - k](a - k_1)^{-1} = 1 + (b - k_2)(a - k_1)^{-1}.$$

Так как $(b - k_2), (a - k_1)^{-1} \in -\overset{o}{P^u} \cap P^r$, то по лемме 3.4.4 [1]

$$(b - k_2)(a - k_1)^{-1} \in -\overset{o}{P^u},$$

$$1 + (b - k_2)(a - k_1)^{-1} \in \overset{o}{P^u}$$

и, следовательно, $[(a + b) - k](a - k_1)^{-1} \in -\overset{o}{P^u}$.

Так как $(a + b) - k, (a - k_1) \in \overset{o}{P^u}$, то для этих элементов определено отношение порядка $\succ$ и, согласно этому определению,

$$(a + b) - k \prec (a - k_1).$$

Следовательно, по лемме 3

$$[(a + b) - k]^n \prec (a - k_1)^n$$

и $a + b \in \overset{o}{B^u}$,

что и требовалось доказать.

Кольцо $P_0[a]$

Рассмотрим кольцо $P_0[a]$, где $a \in B$. Для элементов этого кольца имеет место следующее соотношение [2]:

$$\psi_a(F(a)) = F'(\varphi(a)) = \varphi(F'(a)),$$

где $F(a) \in P_0[a]$.

Другими словами, если $F'(a) > 0$, то $F(a) \in \overset{o}{P^u}$.

Лемма 6. Пусть $a \in \overset{o}{B^u}$; $r, \rho \in P_0, r < a < \rho, a < (r + \rho)/2$. Тогда

$$\forall n (\rho - a)^n \in -\overset{o}{P^u}.$$

Доказательство. Рассмотрим следующее произведение:

$$(a-r)(\rho-a) = -a^2 + a(r+\rho) - r\rho \in P_0[a].$$

Тогда

$$\psi_a(-a^2 + a(r+\rho) - r\rho) = \varphi(-2a + r + \rho) > 0 \Rightarrow$$

$$(a-r)(\rho-a) = (a-r)((\rho-a)^{-1})^{-1} \in \overset{o}{P^u}.$$

Так как $(a-r), (\rho-a)^{-1} \in \overset{o}{P^u}$ $[(\overset{o}{P^u})^{-1} = -\overset{o}{P^u}]$, то $(a-r) \succ (\rho-a)^{-1}$.
Имеем

$$(a-r)^n \succ (\rho-a)^{-n}, (a-r)^n \in \overset{o}{P^u} \Rightarrow$$

$$(\rho-a)^{-n} \in \overset{o}{P^u} \Rightarrow (\rho-a)^n \in -\overset{o}{P^u},$$

что и требовалось доказать.

$\langle B, + \rangle$ – подгруппа $\langle P, + \rangle$

Лемма 7. $B = -B$.

Доказательство. Пусть $a \in \overset{o}{B^u}$. Обозначим $b = -a$. Тогда $k < b \Rightarrow k < -a \Rightarrow -k > a$. Так как a – бесконечно близкий к базе элемент, то по лемме 6 имеем

$$(-k-a)^n \in -\overset{o}{P^u} \Rightarrow (b-k)^n \in -\overset{o}{P^u}.$$

Итак, $k \in P_0, k < b \Rightarrow (b-k)^n \in -\overset{o}{P^u}$. Это значит, что b – бесконечно близко к базе, т.е.

$$-a \in B. \text{ Отсюда } -B = B.$$

Ввиду теоремы 5 и леммы 7 получаем, что аддитивная группа $\langle B, + \rangle$ есть подгруппа группы $\langle P, + \rangle$.

Критерий бесконечной близости к базе

Теорема 8. Элемент $a \in \overset{o}{P^u}$ ($a \in -\overset{o}{P^u}$) является бесконечно близким к базе P_0 элементом тогда и только тогда, когда

$$\forall n \forall \rho \in P_0 (\rho > a) \Rightarrow (\rho-a)^n \in -\overset{o}{P^u} ((\rho-a)^n \in \overset{o}{P^u}).$$

Доказательство. Необходимость доказана в лемме 6.

Достаточность. Пусть $\forall n \forall \rho \in P_0 (\rho > a) \Rightarrow (\rho-a)^n \in -\overset{o}{P^u}$. Докажем, что $a \in \overset{o}{B^u}$. Обозначим $b = -a, \rho_1 = -\rho$.

Так как $\rho > a$, то $b > \rho_1$. Имеем

$$(b-\rho_1)^n = (\rho-a)^n \in -\overset{o}{P^u} \Rightarrow b \in -\overset{o}{B^u} \text{ (по определению)} \Rightarrow a \in \overset{o}{B^u}.$$

Аналогично рассматривается случай $\forall n \forall \rho \in P_0 (\rho > a) \Rightarrow (\rho-a)^n \in \overset{o}{P^u}$.
Теорема доказана.

Обратные элементы

Лемма 9. $(\overset{o}{B})^{-1} = \overset{o}{B}$.

Доказательство. Пусть $a \in \overset{o}{B}^u$, $a > 0$. Выберем $r \in P_0^+$, такое, что $r^{-1} > a^{-1}$.

Если $r^{-1} > a^{-1}$, то $r < a$. Следовательно, $(a-r)^n \in \overset{o}{P}^u$,
 $(r^{-1} - a^{-1})^n = (a-r)^n r^{-n} a^{-n}$,

$$(a-r)a^{-1} = 1 - ra^{-1} \in \overset{o}{P}^u,$$

так как $(\overset{o}{P}^u)^{-1} = -\overset{o}{P}^u$.

$$(a-r), a \in \overset{o}{P}^u \Rightarrow a-r \succ a \Rightarrow (a-r)^n \succ a^n \text{ (лемма 3)} \Rightarrow (a-r)^n a^{-n} \in \overset{o}{P}^u \Rightarrow$$

$$(a-r)^n r^{-n} a^{-n} \in \overset{o}{P}^u.$$

Множитель r^{-n} принадлежит P_0^+ и, значит, не влияет на принадлежность элемента $(a-r)^n a^{-n}$ к данному конусу. Имеем

$$(r^{-1} - a^{-1})^n \in \overset{o}{P}^u.$$

По критерию 8 получаем, что $a^{-1} \in -\overset{o}{B}^u \Rightarrow a^{-1} \in \overset{o}{B}$, что и требовалось доказать.

Произведение бесконечно близких элементов

Лемма 10. Пусть $a, b \in \overset{o}{B}^u \cap P^r$ ($-\overset{o}{B}^u \cap P^r$). Тогда $ab \in B$.

Доказательство. Пусть $k < ab$, тогда найдутся такие $k_1, k_2 \in P_0^+$, что

$$k_1 < a, k_2 < b; k = k_1 k_2.$$

Имеем

$$\begin{aligned} (ab - k)^n &= (ab - k_1 k_2)^n = ((ab - k_1 b) + (k_1 b - k_1 k_2))^n = \\ &= (b(a - k_1) + k_1(b - k_2))^n = \\ &= b^n(a - k_1)^n + C_n^1 b^{n-1} k_1 (a - k_1)^{n-1} (b - k_2) + \dots + k_1^n (b - k_2)^n. \end{aligned} \quad (*)$$

Так как $b \in P^r$, то $\forall n \ b^n \in \overset{o}{P}^u$ ($-\overset{o}{P}^u$) (в данном случае $k_2 = 0$).

По лемме 4 слагаемые вида

$$C_n^m b^{n-m} k_1^m (a - k_1)^{n-m} (b - k_2)^m$$

принадлежат $\overset{o}{P}^u$ ($-\overset{o}{P}^u$). Ввиду замкнутости $\overset{o}{P}^u$ ($-\overset{o}{P}^u$) сумма (*) принадлежит $\overset{o}{P}^u$ ($-\overset{o}{P}^u$). Значит, $ab \in B$, что и требовалось доказать.

Лемма 11. Если $a \in B$, то $a^2 \in B$.

Доказательство.

1. Пусть $a \in \overset{o}{B}^u \cap P^r$ ($-\overset{o}{B}^u \cap P^r$). Тогда, по лемме 10, $a^2 \in B$.

2. Пусть $a \in \overset{o}{B''} \cap -P^r$ ($-\overset{o}{B''} \cap -P^r$). Тогда $-a \in -\overset{o}{B''} \cap P^r$ ($\overset{o}{B''} \cap P^r$). Тогда, по лемме 10,

$$(-a)^2 = a^2 \in B.$$

Лемма доказана.

Теорема 12. Если $a, b \in B$, то $ab \in B$.

Доказательство.

$$ab = \frac{1}{2}((a+b)^2 - (a^2 + b^2)).$$

В силу теоремы 5, лемм 7 и 11, имеем $ab \in B$.

Таким образом, мы доказали, что $\langle B, +, \cdot \rangle$ – подполе двумерно упорядоченного поля $\langle P, +, \cdot \rangle$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пестов Г.Г. Двумерно упорядоченные поля. Томск, 2003.
2. Пестов Г.Г., Фомина Е.А. О сечениях в базе 2-упорядоченного поля // Вестник ТГУ. 2007. № 301. С. 94 – 96.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

ПЕСТОВ Герман Гаврилович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: ppestov@mail.tomsknet.ru

ФОМИНА Елена Анатольевна – аспирантка кафедры математического анализа механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: ef@sibmail.com

Статья принята в печать 20.05.2009 г.