ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2009 Математика и механика № 2(6)

УДК 519.216.8

Е.А. Пчелинцев

МАРТИНГАЛЫ В ГИПЕРКОНЕЧНОМ УНИВЕРСУМЕ

В статье рассматривается подход к теории мартингалов с позиций нестандартного анализа. Вводятся определения и приводятся некоторые важные результаты этой теории с доказательствами, часть изложенного материала принадлежит автору. Приводится приложение мартингалов к теории стохастического интегрирования.

Ключевые слова: *гиперконечное вероятностное пространство, случайный процесс, неупреждающий процесс, внутренняя фильтрация, мартингал, стохастический интеграл.*

При изучении самых разных явлений действительности мы сталкиваемся с процессами, изучение которых заинтересовало в свое время математиков и привело их к созданию теории случайных процессов. Теория случайных процессов принадлежит к числу наиболее быстро развивающихся математических дисциплин. Несомненно, что это обстоятельство в значительной мере определяется ее глубокими связями с практикой и широкими приложениями. Среди всего многообразия случайных процессов в стохастическом исчислении выделяется важный класс процессов, которые называются мартингалами. Теория мартингалов является одним из основных инструментов в финансовой и актуарной математике.

В контексте нестандартного анализа теория вероятностей и случайных процессов начала развиваться с появлением конструкции меры Лёба в 1975 г. Сам же нестандартный анализ возник в 1960 г., когда Абрахам Робинсон, специалист по теории моделей, понял, каким образом методы математической логики позволяют оправдать доказательства и вычисления классиков математического анализа XVII и XVIII вв., поставив на строгую основу их рассуждения, использующие актуально бесконечно большие и бесконечно малые величины.

В 1961 г. появилась статья А. Робинсона «Нестандартный анализ» в Трудах Нидерландской академии наук. В статье намечены как основные положения нестандартного анализа, так и некоторые его приложения (например, к аналитической механике). В течение последующих восьми лет вышли в свет три монографии, излагающие нестандартную теорию: в 1962 г.– книга У. Л. Дж. Люксембурга «Нестандартный анализ. Лекции о Робинсоновой теории бесконечно малых и бесконечно больших чисел» [10], в 1966 г.– книга самого А. Робинсона «Нестандартный анализ» [7], в 1969 г.– книга М. Маховера и Дж. Хиршфелда «Лекции о нестандартном анализе» [11].

В настоящее время приложения нестандартного анализа в математике охватывают обширную область от топологии до теории дифференциальных уравнений, теории меры и вероятностей. Однако, как говорилось выше, теория меры и теория вероятностей в рамках нестандартного анализа долгое время не давали новых результатов. Прорыв произошел после выхода в 1975 г. работы Лёба, которая явилась ключом к нестандартному подходу в стохастическом анализе [9] .

В работе рассматривается нестандартный подход к теории мартингалов. Вводятся определения и приводятся некоторые важные результаты с доказательствами.

1. Неупреждающие гиперконечные процессы

Пусть $(\Omega,\mathbf{A},P)$ – гиперконечное вероятностное пространство, $\mathbf{A}$ – внутренняя алгебра всех внутренних подмножеств множества Ω. Пусть $T = \{0 = t_0, t_1,\ldots,t_\xi = 1\}$ – гиперконечная ось времени, где $t_{i+1}-t_i \approx 0$, $\forall i = 0,1,\ldots,\xi-1$.

Определение 1. *Гиперконечным случайным процессом* называется внутреннее отображение

$$X:\Omega\times T\to {}^*\mathbf{R},$$

где T – гиперконечная ось времени, $(\Omega,\mathbf{A},P)$ – некоторое гиперконечное вероятностное пространство [1].

Дадим понятие неупреждаемости. Для $\omega\in\Omega$ и $t\in T$ положим

$$\omega\uparrow t = \langle\omega(s)|s < t\rangle$$

– сужение ω на множество $[0,t)$.

Определение 2. Гиперконечный процесс $X:\Omega\times T\to{}^*\mathbf{R}$ называется *неупреждающим*, если из равенства $\omega\uparrow t = \omega'\uparrow t$ следует, что $X(\omega,t) = X(\omega',t)$ [1].

Введём альтернативное определение неупреждающих процессов: $\forall t\in T$ пусть $\mathbf{A}_t$ – внутренняя алгебра подмножеств множества Ω, порождённая множествами вида $[\omega]_t=\{\omega'\in\Omega|\ \omega'\uparrow t=\omega\uparrow t\}$. Основным свойством $\mathbf{A}_t$ является то, что $\forall t\in T$ внутренняя алгебра $\mathbf{A}_t$ состоит из всевозможных объединений атомарных множеств, т.е. $\boldsymbol{A}_t = \{A\,|\,\exists I, A=\bigcup_{i\in I}[\omega_i]_t, \omega\in\Omega\}$ и при $s<t$ $\mathbf{A}_s\subset \mathbf{A}_t$.

Теорема 1. Процесс X неупреждающий $\Leftrightarrow$ случайная величина $X(\cdot,t)$ является $\mathbf{A}_t$-измеримой $\forall t\in T$.

Доказательство. I. *Необходимость*. По определению процесс X неупреждающий если из $\omega\uparrow t = \omega'\uparrow t$ следует, что $X(\omega,t) = X(\omega',t)$. Рассмотрим множество $[\omega]_t = \{\omega'\in\Omega|\ \omega'\uparrow t = \omega\uparrow t\}$ $\Rightarrow$ $\forall$ ω', $\omega''\in[\omega]_t$ $X(\omega',t) = X(\omega'',t)$, т.е. X – *const* на этом множестве. Таким образом, X – неупреждающий $\Leftrightarrow$ на множестве $[\omega]_t$ X – *const* $\Rightarrow$ $\forall a\in{}^*\mathbf{R}$ $\{\omega\in\Omega\,|\,X(\omega,t)>a\}=\bigcup_{i\in I}[\omega_i]_t\in\boldsymbol{A}_t$, а это и означает по определению измеримого отображения, что случайная величина $X(\cdot,t)$ является $\mathbf{A}_t$ -измеримой $\forall t\in T$.

II. *Достаточность*. По определению случайная величина $X(\cdot,t)$ есть $\mathbf{A}_t$-измеримая $\forall t\in T$, если $\forall a\in{}^*\mathbf{R}$ $\{\omega\in\Omega\,|\,X(\omega,t)>a\}=\bigcup_{i\in I}[\omega_i]_t\in\boldsymbol{A}_t$ $\Rightarrow$ на множестве $[\omega]_t$ X–*const*, $\forall t\in T$, $\forall\omega\in\Omega$ $\Rightarrow$ процесс X неупреждающий. Теорема доказана.

2. Внутренние мартингалы

Пусть $(\Omega,\mathbf{A},P)$ – гиперконечное вероятностное пространство, $T = \{0 = t_0, t_1,\ldots, t_\xi = 1\}$ – гиперконечная ось времени, X: $\Omega\times T\to{}^*\mathbf{R}$ – гиперконечный случайный процесс.

Введем обозначения: $\Delta X(\omega,t_i) = X(\omega,t_{i+1}) - X(\omega,t_i)$ и если $s = t_i$, $t = t_j$, $s < t$, то $\sum_{r=s}^{t} X(\omega,r) = X(\omega,t_i)+\ldots+X(\omega,t_{j-1})$.

Определение 3. *Внутренней фильтрацией* на Ω, параметризованной множеством T, называется набор $(\Omega,\{\mathbf{A}_t\}_{t\in T},P)$, где $\{\mathbf{A}_t\}_{t\in T}$ – возрастающая внутренняя последовательность внутренних алгебр в Ω [1].

Поскольку алгебра **A** состоит из всех внутренних подмножеств множества Ω, то алгебры $\mathbf{A}_t$ есть подалгебры алгебры **A** $\forall t\in T$. Пример внутренней фильтрации был приведён выше, из него становится ясно, что алгебра $\mathbf{A}_t$ – это вместилище информации о стохастической системе к моменту t.

Есть и другой путь описания неупреждающих процессов. Для $\forall t\in T$ введем отношение эквивалентности $\sim_t$ на Ω:

$$\omega\sim_t\omega'\Leftrightarrow\forall A\in\mathbf{A}_t\ (\omega\in A\Leftrightarrow\omega'\in A).$$

Лемма 1. $(\omega\sim_t\omega')\Leftrightarrow([\omega]_t=[\omega']_t)\Leftrightarrow(\omega\uparrow t=\omega'\uparrow t)$.

Доказательство. По определению $(\omega\sim_t\omega')\Leftrightarrow\forall A\in\mathbf{A}_t\ (\omega\in A\Leftrightarrow\omega'\in A)\Leftrightarrow(\omega\in[\omega]_t\Leftrightarrow\omega\in[\omega']_t)\Leftrightarrow([\omega]_t=[\omega']_t)\Leftrightarrow(\omega\uparrow t=\omega'\uparrow t)$. Лемма доказана.

Замечание. Эта лемма говорит об эквивалентности всех определений неупреждаемости.

Из леммы непосредственно следует следующая теорема.

Теорема 2. Внутренний процесс $X{:}\Omega\times T\to{}^*\mathbf{R}$ является неупреждающим $\Leftrightarrow$ из $\omega\sim_t\omega'$ следует, что $X(\omega,t)=X(\omega',t)$.

Перейдем к определению мартингалов.

Определение 4. Внутренний процесс $M{:}\Omega\times T\to{}^*\mathbf{R}$ называется *мартингалом* относительно фильтрации $(\Omega,\{\mathbf{A}_t\}_{t\in T},P)$, если

1) M – неупреждающий;

2) $\forall s,t\in T$, $s<t$ и $\forall A\in\mathbf{A}_s$

$$E(I_A(M_t-M_s))=0. \tag{1}$$

Если заменить равенство (1) неравенством $E(I_A(M_t-M_s))\geq 0$, M будет называться *субмартингалом*, а если заменить (1) противоположным неравенством $E(I_A(M_t-M_s))\leq 0$, процесс будет называться *супермартингалом.*

Теорема 3. (*Критерий мартингала*)**.** Пусть $[\omega]_t$ – класс эквивалентности элементов ω и M – неупреждающий процесс. Тогда M – мартингал тогда и только тогда, когда выполнено

$$\sum_{\tilde{\omega}\in[\omega]_t}\Delta M(\tilde{\omega},t)\cdot P\{\tilde{\omega}\}=0 \tag{2}$$

для всех ω и t.

Доказательство. I. *Необходимость*. Пусть M – мартингал и $\forall A\in\mathbf{A}_s$, $A=[\omega]_s$, $\forall s\in T$ и $\forall\omega\in\Omega\Rightarrow$ (1): $E(I_A(M_t-M_s))$ = (опр. математического ожидания) = $=\sum_{\tilde{\omega}\in[\omega]_s}[M_t(\tilde{\omega})-M_s(\tilde{\omega})]\cdot P\{\tilde{\omega}\}=0$ $\forall s,t\in T$, $s<t$. Тогда положим $s=t_i$, $t=t_{i+1}\Rightarrow$

$$E(I_A(M_t-M_s))=\sum_{\tilde{\omega}\in[\omega]_s}[M_{t_{i+1}}(\tilde{\omega})-M_{t_i}(\tilde{\omega})]\cdot P\{\tilde{\omega}\}=\sum_{\tilde{\omega}\in[\omega]_s}\Delta M(\tilde{\omega},s)\cdot P\{\tilde{\omega}\}=0\,. \tag{3}$$

II. *Достаточность*. Пусть выполнено равенство (3), тогда в силу произвольности s это равенство справедливо и при $s = t_i$, $t = t_{i+1}$ $\Rightarrow$

$$\sum_{\tilde{\omega}\in[\omega]_{t_i}} \Delta M(\tilde{\omega}, t_i)\cdot P\{\tilde{\omega}\} = E(I_A(M_t - M_s)) = 0.$$

Теорема доказана.

Из этой теоремы вытекает следующий результат.

Теорема 4. Пусть X: $\Omega\times T\to{}^*\mathbf{R}$ – неупреждающий процесс, M – мартингал. Тогда процесс $\int XdM$ – мартингал.

Доказательство. По определению стохастического интеграла имеем, что

$$\int_0^t XdM = \sum_{s=0}^{t} X(\omega,s)\Delta M(\omega,s) \overset{\text{обозн.}}{=} Y(\omega,t).$$

Для того чтобы процесс $Y(\omega,t)$ был мартингалом необходимо и достаточно выполнения равенства (2) (следует из предыдущей теоремы). Вычислим $\Delta Y(\omega,t)$= $\Delta\sum_{s=0}^{t} X(\omega,s)\Delta M(\omega,s) = X(\omega,t)\Delta M(\omega,t)$. Рассмотрим согласно (2) $\sum_{\tilde{\omega}\in[\omega]_t} \Delta Y(\tilde{\omega},t)\cdot P\{\tilde{\omega}\} = \sum_{\tilde{\omega}\in[\omega]_t} X(\tilde{\omega},t)\Delta M(\tilde{\omega},t)P\{\tilde{\omega}\}$ = (X – неупреждающий процесс $\Rightarrow$ на множестве $[\omega]_t$ он есть *const* и равен $X(\omega,t)$)= $X(\omega,t)\sum_{\tilde{\omega}\in[\omega]_t} \Delta M(\tilde{\omega},t)P\{\tilde{\omega}\}$ = 0, так как M – мартингал $\Rightarrow$ процесс $\int XdM$ – мартингал, что и требовалось.

Определение 5. Внутренний марковский момент остановки, согласованный с фильтрацией $(\Omega,\{\mathbf{A}_t\}_{t\in T},P)$ – это такое внутреннее отображение $\tau:\Omega\to T$, что $\{\omega\in\Omega|\ \tau(\omega)\le t\}\in\mathbf{A}_t$, $\forall t\in T$ [1].

Лемма 2. Если $\tau(\omega)=t$, то $\tau(\omega')=t$ $\forall\omega'\sim_t\omega$.

Доказательство. Так как $\tau(\omega)$ есть $\mathbf{A}_t$-измеримое внутреннее отображение, то $\forall\omega\in[\omega]_t$ $\tau(\omega) = t$, т. е. является *const*, а по условию $\omega'\in[\omega]_t$ $\Rightarrow$ $\tau(\omega') = t$. Лемма доказана.

Теорема 5. Пусть τ – марковский момент, M – мартингал. Тогда остановленный процесс M_τ, определенный формулой

$$M_\tau(\omega,t) = M(\omega,t\wedge\tau)$$

является мартингалом, где $t\wedge\tau(\omega) = \min\{t, \tau(\omega)\}$.

Доказательство. Рассмотрим $t\wedge\tau(\omega)$ $\Rightarrow$ это либо t, либо $\tau(\omega)$. Имеем, что множество Ω разбито на два непересекающихся подмножества. Так как $\tau(\omega)$ $\mathbf{A}_t$-измеримо, то множество $\{\omega\in\Omega|\ \tau(\omega)\le t\}\in\mathbf{A}_t$, $\forall t\in T$. Множество $\{\omega\in\Omega|\tau(\omega)>t\}$ – дополнение к первому множеству $\Rightarrow$ $\mathbf{A}_t$-измеримо. На этом множестве $M_\tau(\omega,t) = M(\omega,t\wedge\tau) = M(\omega,t)$ – мартингал по условию. Покажем, что $M(\omega,\tau(\omega))$ тоже мартингал. В самом деле, $\forall\omega\in[\omega]_t$ $\tau(\omega)=t_1$, т. е. является *const* $\Rightarrow$ по критерию мартингалов $\sum_{\tilde{\omega}\in[\omega]_{t_1}} \Delta M(\tilde{\omega},t_1)P\{\tilde{\omega}\} = 0$, так как $M(\omega,t_1)$ – мартингал $\Rightarrow M_\tau$ – мартингал. Теорема доказана.

Таким образом, при замене t на случайный марковский момент $\tau(\omega)$ мартингальность процесса сохраняется.

Приведенные результаты дают возможность определения мартингальности у случайных процессов. Мартингалы используются для построения финансовых моделей, в решении задач оптимального потребления и т.д.

3. Броуновское движение

Отвлечемся от теории и рассмотрим конкретный очень важный пример мартингалов – броуновское движение (винеровский процесс).

3.1. Модель Эйнштейна броуновского движения

Броуновское движение – это хаотичное движение микроскопических частиц, взвешенных в газе или жидкости, обусловленное тепловым движением молекул окружающей среды. Это явление впервые было описано в 1827 г. шотландским ботаником Р. Броуном, исследовавшим под микроскопом пыльцу растений в воде, но, по-видимому, еще раньше его наблюдали натуралисты Ж. Бюффон и Л. Спилланцани. Впрочем, они полагали, что имеют дело с движением микроорганизмов. Броуновское движение можно наблюдать и в воздухе, если навести микроскоп на частицы дыма в маленькой, освещаемой сбоку камере.

Последующие опыты показали, что данный эффект не связан ни с микроорганизмами, ни с конвекционными потоками, которые могли бы возникать в среде при ее нагревании светом, и в 1877 г. было высказано предположение, что частицы хаотически движутся потому, что их «бомбардируют» молекулы жидкости или газа. Идея о том, что газы и жидкости состоят из быстро движущихся молекул, обсуждалась учеными на протяжении предшествующих 200 лет, а представление об атомном строении вещества восходит еще к ионийским философам 5 в. до н.э., однако броуновское движение стало первым наглядным экспериментальным подтверждением правильности этих воззрений.

Полное молекулярно-статистическое истолкование броуновского движения было дано лишь в 1905 – 1906 гг. А. Эйнштейном и М. Смолуховским. Их теоретические выводы находились в прекрасном соответствии с экспериментальными фактами. Пусть частица достаточно малых размеров погружена в жидкость. Будем обозначать координату частицы в момент времени t через $x(t)$. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ $x(0) = 0$. Пусть на промежутке $[0,t]$ произошло n столкновений молекул с этой частицей. Обозначим смещение частицы при i-м столкновении через x_i, и через E_i обозначим событие, состоящее в том, что на промежутке $[0,t]$ произошло точно n столкновений молекул с данной частицей. Тогда

$$x(t) = x_1+\ldots+x_n \text{ и } Dx(t)=Dx_1+\ldots+Dx_n.$$

С другой стороны,

$$Dx(t)= D\{x(t)/E_0\}P(E_0)+\ldots+ D\{x(t)/E_n\}P(E_n)+...,$$

где $P(E_n) = e^{-t\lambda}(t\lambda)^n/(n!)$, $\lambda > 0$ и $D\{x(t)/E_n\} = n\sigma^2$. С учетом этого имеем, что

$$Dx(t) = \sum_{n=0}^{\infty} D\{x(t)/E_n\}P(E_n) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n\sigma^2 e^{-t\lambda} \frac{(t\lambda)^n}{n!} = \sigma^2 e^{-t\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(t\lambda)^n}{(n-1)!} = \sigma^2 e^{-t\lambda} t\lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(t\lambda)^{n-1}}{(n-1)!} = \sigma^2 t\lambda,$$

т.е. $Dx(t)=\sigma^2 t\lambda$ пропорционально времени t. А изменение координаты частицы со временем равно $\sigma\sqrt{t}\sqrt{\lambda}$ и пропорционально $\sqrt{t}$.

3.2. Математическая характеристика броуновского движения

Пусть $(\Omega,\mathbf{A},P)$ – вероятностное пространство со считающей мерой P, т.е. $\forall A\subset\Omega$ положим $P(A) = |A|/|\Omega|$.

Определение 6. *Броуновское движение* (*винеровский процесс*) – это отображение

$$b\colon \Omega\times[0,1]\to\mathbf{R},$$

такое, что выполняются следующие условия:

(I) $b(\omega,t)$ – измеримая функция от $\omega\in\Omega$ при всех $t\in[0,1]$;

(II) При $s < t$, $s,t\in[0,1]$ разность $b(\omega,t) - b(\omega,s)$ имеет нормальное распределение со средним 0 и дисперсией $(t - s)$ $\forall\omega\in\Omega$;

(III) Если $s_1 < t_1 \le s_2 < t_2 \le\ldots\le s_n < t_n$, то система случайных величин $b(\omega,t_1) - b(\omega,s_1)$, $b(\omega,t_2) - b(\omega,s_2)$, …, $b(\omega,t_n) - b(\omega,s_n)$, является независимой [4], [6].

Броуновское движение – случайный процесс, который благодаря ряду своих свойств (независимость приращений, непрерывность траекторий, мартингальность и др.) нашёл широкое применение не только в математике, но и во многих других областях знаний.

3.3. Гиперконечная модель броуновского движения

Пусть $(\Omega,\mathbf{A},P)$ – гиперконечное вероятностное пространство. Пусть $T = \{0, \Delta t, 2\Delta t,\ldots,1\}$ – гиперконечная ось времени и $\Omega = \{-1,1\}^T = \{\omega|\ \omega{:}T\to\{-1,1\}$ – внутреннее отображение$\}$. Рассмотрим нестандартный аналог броуновского движения.

Определение 7. Внутреннее отображение $B{:}\Omega\times T\to{}^*\mathbf{R}$, имеющее вид

$$B(\omega,t) = \sum_{s=0}^{t} \omega(s)\cdot\sqrt{\Delta t} = \omega(0)\sqrt{\Delta t} + \omega(\Delta t)\sqrt{\Delta t} + \ldots + \omega(t-\Delta t)\sqrt{\Delta t},\ \forall\omega\in\Omega,\ \forall t\in T,$$

называется *гиперконечным случайным блужданием* [1].

Замечание. $B(\omega,t)$ – координата броуновской частицы в момент $t - \Delta t$, равная сумме всех сдвигов (скачков) частицы в моменты от 0 до $t - \Delta t$, а в каждый момент происходит сдвиг либо на $-\Delta t$, либо на $+\Delta t$ с вероятностью ½.

Теперь положим $b(\omega,{}^0t)={}^0B(\omega,t)$ $\forall\omega\in\Omega$, $\forall t\in T$. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 6. Пусть $(\Omega,L(\mathbf{A}),P)$ – вероятностное пространство Лёба. Тогда $b(\omega,t)$, $\omega\in\Omega$, $t\in[0,1]$, есть броуновское движение [1].

Доказательство. (В отличие от доказательства в [1], данное доказательство дополнено автором). Для доказательства необходимо проверить выполнение опр. 6.

(I) Пространство Лёба задаёт измеримую структуру на Ω. Заметим, что $B(\omega,t)$ – внутреннее отображение $\Rightarrow$ ${}^0B(\omega,t)$ измеримо по Лёбу, т.е. $b(\omega,t)$ измеримо по ω при фиксированном t по мере Лёба $L(P)$.

Докажем условие (III). Пусть $s_1<t_1\le s_2<t_2\le\ldots\le s_n<t_n$. Рассмотрим величины

$$X_1= B(\omega,t_1) - B(\omega,s_1),\ X_2= B(\omega,t_2) - B(\omega,s_2),\ldots,\ X_n= B(\omega,t_n) - B(\omega,s_n).$$

Из опр. 7 следует, что $X_i = \sum\limits_{s=s_i}^{t_i} \omega(s)\sqrt{\Delta t}, i=\overline{1,n}$. Так как, $\omega(s_1),\ldots, \omega(s_n)$ независимы при $s_1<s_2<\ldots<s_n$, то система $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ является *-независимой $\Rightarrow$ эта система S-независима. Тогда система $\{{}^0X_1, {}^0X_2,\ldots, {}^0X_n\}$ независима и, значит, величины

$$b(\omega,t_1) - b(\omega,s_1),\ b(\omega,t_2) - b(\omega,s_2),\ \ldots,\ b(\omega,t_n) - b(\omega,s_n)$$

также являются независимыми [1].

Теперь приступим к доказательству (II) опр. 6. Рассмотрим величину $b(\omega,{}^0t) - b(\omega,{}^0s)$, $s < t$, $s, t\in T$. Найдём её характеристическую функцию (преобразование Фурье).

$$\varphi(z) = \int\limits_{\Omega}\exp(i[b(\omega,{}^0t)-b(\omega,{}^0s)]z)dL(P) = {}^0\!\!\int\limits_{\Omega}\exp(i[B(\omega,t)-B(\omega,s)]z)dP =$$

$$= {}^0\!\!\int\limits_{\Omega}\exp(i[\sum_{u=s}^{t}\omega(u)\sqrt{\Delta t}]z)dP = {}^0\!\!\int\limits_{\Omega}\prod_{u=s}^{t}\exp[i\cdot\omega(u)\sqrt{\Delta t}\cdot z]dP =$$

$$= {}^0(\prod_{u=s}^{t}\int\limits_{\Omega}\exp[i\cdot\omega(u)\cdot\sqrt{\Delta t}\cdot z]dP) = {}^0(\prod_{u=s}^{t}\frac{\exp(i\cdot\sqrt{\Delta t}\cdot z)+\exp(-i\cdot\sqrt{\Delta t}\cdot z)}{2}) =$$

$$= {}^0(\prod_{u=s}^{t}\cos\sqrt{\Delta t}\cdot z) = {}^0(1-\frac{z^2}{2}\Delta t+o(z^4(\Delta t)^2))^{\frac{t-s}{\Delta t}} = \exp(-\frac{{}^0t-{}^0s}{2}\cdot z^2).$$

Имеем, что случайная величина $b(\omega,{}^0t) - b(\omega,{}^0s)$ имеет нормальное распределение со средним 0 и дисперсией ${}^0t - {}^0s$, что и требовалось доказать.

4. Стохастическое интегрирование

4.1. Определение стохастического интеграла

Основная проблема стохастического интегрирования состоит в том, чтобы придать смысл интегралам вида $\int XdY$, где X,Y – некоторые случайные процессы. Первое, что приходит в голову – это рассмотреть интеграл Стильтьеса

$$Z(\omega,t) = \int\limits_0^t X(\omega,s)dY(\omega,s).$$

Однако для того чтобы это имело смысл, траектория $Y(\omega,\cdot)$ должна иметь ограниченную вариацию, а для большинства процессов это не так; например, все траектории броуновского движения имеют неограниченную вариацию почти наверное. Поэтому в стандартной теории этот подход терпит провал. Однако в нестандартном анализе траекторно-стильтьесовское определение в самом деле работает. Введём обозначения

$$\Delta X(\omega,t)= X(\omega,t+\Delta t)-X(\omega,t),$$

$$\sum_{r=s}^{t} X(\omega,t) = X(\omega,s)+...+X(\omega,t-\Delta t),$$

заметим, что слагаемое $X(\omega,t)$ не включается в сумму.

Замечание. Сумма $\sum_{s=0}^{t} X(\omega,s)$ содержит конечное число слагаемых во внутреннем универсуме. Именно поэтому имеет смысл дать траекторно-стильтьесовское определение стохастического интеграла.

Определение 8. Пусть $X,Y:\Omega\times T\rightarrow {}^*\mathbf{R}$ – два гиперконечных процесса. *Стохастическим интегралом* X по Y называется процесс $\int XdY$, определённый формулой

$$(\int XdY)(\omega,t) = \sum_{s=0}^{t} X(\omega,s)\cdot\Delta Y(\omega,s).$$

Видно, что нестандартный стохастический интеграл – это есть сумма Стильтьеса. Этот интеграл определён для всех гиперконечных процессов X и Y, но в такой общности он может не иметь стандартной части, то есть принимать бесконечные значения.

Рассмотрим следующий пример. Пусть $\Omega=\{-1,1\}^T=\{\omega|\ \omega:T\rightarrow\{-1,1\}$ – внутреннее отображение$\}$, $T=\{0,\Delta t,2\Delta t,\ldots,1\}$ и $B:\Omega\times T\rightarrow {}^*\mathbf{R}$ – гиперконечное случайное блуждание. Положим $X(\omega,s)=\omega(s)$. Тогда по определению стохастического интеграла имеем

$$\int_0^t X(\omega,s)dB(\omega,s) = \sum_{s=0}^{t} X(\omega,s)\Delta B(\omega,s) = \sum_{s=0}^{t} \omega(s)\omega(s)\sqrt{\Delta t} = \sum_{s=0}^{t}\sqrt{\Delta t} = \frac{t-0}{\Delta t}\sqrt{\Delta t} = \frac{t}{\sqrt{\Delta t}};$$

полученная величина бесконечно велика для любых не бесконечно малых t. Следовательно, интеграл от конечной функции по броуновскому движению бесконечно велик. Таким образом, возникает задача выделить такие классы процессов X, для которых интеграл имел бы смысл, т.е. мы не должны допускать такие подынтегральные выражения, которые правильно предсказывают («упреждают») поведение процесса B. Для решения этой проблемы подходят неупреждающие процессы.

Определение 9. Пусть $(\Omega,\mathbf{A},P)$ – гиперконечное вероятностное пространство и $F:\Omega\times T\rightarrow {}^*\mathbf{R}$ – $\mathbf{A}$-измеримое внутреннее отображение. Отображение F называется *S- интегрируемым*, если

1) $E(|F|)$ – конечное гипердействительное число;

2) Если $A\in\mathbf{A}$ и $P(A)\approx 0$, то $\int_A |F(\omega)|\,dP \approx 0$ [1].

Предложение 1. Пусть X – неупреждающий процесс, квадратично S-интегрируемый по мере $P\times\lambda$, где λ – равномерная вероятностная мера на T. Тогда $\forall t\in T$ стохастический интеграл $\int_0^t XdB$ почти наверное конечен [1].

Доказательство. Заметим, что $\Delta B(\omega, s) = \omega(s)\sqrt{\Delta t}$. Рассмотрим

$$E((\int_0^t XdB)^2) = E((\sum_{s=0}^t X(s)\Delta B(s))^2) =$$

$$= E(\sum_{s=0}^t X^2(s)\Delta B^2(s)) + 2\sum_{r<s}^t E(X(r)X(s)\Delta B(r)\Delta B(s)).$$

Последняя сумма равна 0, поскольку процесс X по условию является неупреждающим, значит, он определяется $\omega(u)$, $u<s$ и, следовательно, не зависит от $\omega(s)$. $B(r)$, $r<s$ также не зависит от $\omega(s)$, а $\Delta B(\omega, s) = \omega(s)\sqrt{\Delta t}$ зависит от $\omega(s)$ и независимо от того какие значения принимают $X(s)$ и $X(r)$, $\Delta B(r) = \pm\sqrt{\Delta t}$ с вероятностью ½. Так как $\Delta B^2(s)=\Delta t$, то получаем, что

$$E((\int_0^t XdB)^2) = E(\sum_{s=0}^t X^2(s)\Delta t) = \int_\Omega \sum_{s=0}^t X^2(s)\Delta t dP =$$

$$= \sum_{s=0}^t \sum_{\omega\in\Omega} X^2(\omega, s)\Delta t P(\{\omega\}) = \int_{\Omega\times[0,t]} X^2 d(P\times\lambda) < +\infty.$$

Последний интеграл конечен по условию, что и требовалось.

Замечание. 1) Это предложение указывает на то, что мы можем получить разумную теорию интегрирования, если ограничим класс подынтегральных выражений неупреждающими процессами.

2) λ называется равномерной мерой на T, если $\lambda(t_i)=t_{i+1}-t_i$, $i=1,2,\ldots, n-1$ [1].

4.2. Интегрирование по мартингалам

Выше показано, что если B – гиперконечное случайное блуждание и λ – нормированная считающая мера на T, то интеграл $\int XdB$ существует и имеет конечную стандартную часть в случае, если процесс X является неупреждающим и квадратично S-интегрируемым по мере $P\times\lambda$. Для построения дальнейшей теории введем дополнительные определения и результаты теории мартингалов.

Определение 10. *Квадратической вариацией* процесса $X{:}\Omega\times T\to{}^*\mathbf{R}$ называется процесс $[X]{:}\Omega\times T\to{}^*\mathbf{R}$, такой, что

$$[X](\omega, t) = \sum_{s=0}^t \Delta X^2(\omega, s) \ \ [1].$$

Замечание. Квадратическая вариация – неубывающий процесс, поскольку с ростом t сумма $\sum_{s=0}^t \Delta X^2(\omega, s)$ может только возрастать.

Пример. Рассмотрим гиперконечное случайное блуждание $B{:}\Omega\times T\to{}^*\mathbf{R}$, где $T = \{0,\Delta t, 2\Delta t,\ldots,1\}$. Найдем его квадратическую вариацию:

$$[B](\omega, t) = \sum_{s=0}^t \Delta B^2(\omega, s) = \sum_{s=0}^t (\omega(s)\sqrt{\Delta t})^2 = \sum_{s=0}^t \Delta t = \frac{t}{\Delta t}\Delta t = t\,.$$

Видно, что квадратическая вариация устроена проще, чем сам процесс.

Замечание. В теории мартингалов простота квадратической вариации используется для того, чтобы переформулировать задачи и результаты о мартингалах в более простые задачи об их квадратических вариациях.

Лемма 3. Для любого гиперконечного процесса $X{:}\Omega\times T\to{}^*\mathbf{R}$

$$[X](t)=X^2(t)-X^2(0)-2\int_0^t XdX \quad [1].$$

Доказательство. Рассмотрим

$$\Delta[X](t)=\Delta\sum_{s=0}^{t}\Delta X^2(s)=\Delta X^2(t)=(X(t_{i+1})-X(t_i))^2=$$

$$=X^2(t_{i+1})-X^2(t_i)-2X(t_i)(X(t_{i+1})-X(t_i))^2=X^2(t_{i+1})-X^2(t_i)-2\int_{t_i}^{t_{i+1}}XdX.$$

Суммируя по всем $t_i<t$, получаем утверждение леммы. Лемма доказана.

Применим доказанную формулу к мартингалу M:

$$[M](t)=M^2(t)-M^2(0)-2\int_0^t MdM \Rightarrow E(M^2(t))=E(M^2(0)+[M](t)), \qquad (4)$$

так как процесс $\int MdM$ является мартингалом с начальным значением 0 и потому имеет нулевое математическое ожидание.

Замечание. Так как процесс $[M](t)$ возрастает, то $E(M^2(t))$ тоже возрастает с ростом t.

Определение 11. Гиперконечный мартингал M называется λ^2-*мартингалом*, если $E(M^2(t))<+\infty$ $\forall t\in T$ [1].

Из предыдущего замечания $\Rightarrow$ мартингал M является λ^2-*мартингалом*, если число $E(M^2(1))<+\infty$.

Данное определение накладывает условие на величину процесса M. Часто мы можем превратить мартингал в λ^2-*мартингал*, остановив его, прежде чем он станет слишком большим.

Определение 12. Внутренний мартингал M называется *локальным* λ^2-*мартингалом*, если существует такая возрастающая последовательность $\{\tau_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ внутренних марковских моментов, что все процессы M_{τ_n} являются λ^2-мартингалами, причем для почти всех ω справедливо $\tau_n(\omega)=1$ при некотором $n\in\mathbf{N}$. Последовательность $\{\tau_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ называется *локализующей последовательностью* для мартингала M [1].

Сейчас, когда мы переходим к интегрированию по *мартингалам*, условие интегрируемости процесса X будет предполагать не меру $P\times\lambda$, а меру, построенную на основе того мартингала, по которому проводится интегрирование. Для λ^2-*мартингала* M обозначим через υ_M внутреннюю меру на $\Omega\times T$, определяемую по формуле

$$\upsilon_M\{(\omega,t)\}=\Delta M(\omega,t)^2P\{\omega\}.$$

Заметим, что величина $\upsilon_M\{\Omega\times T\}=E([M](1))$ конечна, и для гиперконечного процесса B имеем $\upsilon_M=P\times\lambda$.

Определим два класса интегрируемых процессов.

Определение 13. Пусть M – λ^2-мартингал. Будем говорить, что гиперконечный процесс X принадлежит классу $SL^2(M)$, если он является неупреждающим и квадратично S-интегрируемым относительно меры υ_M.

Пусть M – локальный λ^2- мартингал. Будем говорить, что гиперконечный процесс X принадлежит классу $SL(M)$, если он является неупреждающим и принадлежит $SL^2(M_{\tau_n})$ для всех τ_n из локализующей последовательности для M [1].

Теорема 7. 1) Если M – λ^2-мартингал и X принадлежит классу $SL^2(M)$, то $\int XdM$ – тоже λ^2- мартингал.

2) Если M – локальный λ^2- мартингал и X принадлежит классу $SL(M)$, то $\int XdM$ – тоже локальный λ^2-мартингал [1].

Доказательство. 1) Пусть M – λ^2-мартингал и $X\in SL^2(M)$. Применим к мартингалу $\int XdM$ формулу (4), получаем

$$E\left((\int_0^1 XdM)^2 \right) = E\left(\left[\int_0^1 XdM \right] \right) = E\left(\sum_0^1 X^2 \Delta M^2 \right) = \int_{\Omega\times T} X^2 d\nu_M \; .$$

Последний интеграл конечен по предположению, значит, процесс $\int XdM$ – λ^2-мартингал. Вторая часть теоремы – непосредственное следствие первой. Теорема доказана.

Смысл теоремы состоит в том, что мы получили разумную теорию стохастического интегрирования. Определенный таким образом интеграл обладает следующим важным свойством.

Определение 14. Отображение $f{:}T\to{}^*\mathbf{R}$ называется *S-непрерывным*, если $f(s)\approx f(t)$ при $s\approx t$. Процесс $X{:}\Omega\times T\to{}^*\mathbf{R}$ называется *S-непрерывным*, если почти все его траектории *S-непрерывны* [1], [2].

Теорема 8. Локальный λ^2-мартингал S-непрерывен тогда и только тогда, когда его квадратическая вариация S-непрерывна [1].

Доказательство, ввиду его громоздкости, мы здесь не приводим, отсылая читателя к [1].

Теорема 9. Если M – S-непрерывный локальный λ^2-мартингал и X принадлежит классу $SL(M)$, то процесс $\int XdM$ также S-непрерывен [1].

Доказательство. Достаточно доказать теорему для случая, когда M является λ^2-мартингалом и $X\in SL^2(M)$. Предположим, сначала, что процесс X ограничен по абсолютной величине действительным числом K. Из S-непрерывности процесса M, согласно теореме 8, следует S-непрерывность его квадратической вариации $[M]$. Тогда из выкладки

$$\left[\int XdM \right](t) - \left[\int XdM \right](s) = \sum_s^t X^2 \Delta M^2 \le K^2 \sum_s^t \Delta M^2 = K^2 \left([M](t) - [M](s) \right),$$

где $s\approx t$, и из опр. 14 следует S-непрерывность процесса $[\int XdM]$. Применяя снова теорему 8, получаем S-непрерывность процесса $\int XdM$. Обобщим полученный результат на общий случай $X\in SL^2(M)$. В силу S-интегрируемости процесса X существует такая последовательность $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограниченных S-непрерывных процессов, что ${}^0\int (X - X_n)^2 d\nu_M \to 0$ при $n\to\infty$. Тогда, согласно неравенству Дуба [1],

$$0 \le E\left({}^0\max_{s\le 1}\left(\int_0^s X dM - \int_0^s X_n dM \right)^2 \right) \le 4\cdot {}^0E\left(\left(\int_0^1 (X - X_n) dM \right)^2 \right) = 4\, {}^0\int (X - X_n)^2 d\nu_M \to 0,$$

при $n\to\infty$.

Из стандартной теории меры известно, что найдется такая подпоследовательность $\{X_{nk}\}_{k=1}^{\infty}$, для которой ${}^0\max_{s\le 1}\left(\int_0^s X dM - \int_0^s X_{nk} dM \right)$ сходится к нулю почти наверное. Поскольку каждый из процессов $\int X_{nk} dM$ S-непрерывен, их равномерный предел $\int X dM$ тоже обязан быть S-непрерывным. Теорема доказана.

Таким образом, в заключение следует отметить, что в контексте нестандартного анализа многие понятия и доказательства приобретают более простой вид. Это связано в первую очередь с тем, что работая во внутреннем универсуме, мы имеем дело с конечными и дискретными объектами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Альбеверио С.*, *Фенстад Й.*, *Хеэг-Крон Р.*, *Линдстрём Т.* Нестандартные методы в стохастическом анализе и математической физике. М.: Мир, 1990. 616 с.
2. *Martin Väth*. Nonstandard analysis. Basel-Boston-Berlin: Birkhäuser Verlag, 2007. 252 p.
3. *Imme Van den Berg*, *Victor Neves*. The strength of nonstandard analysis. Wien: Springer-Verlag, 2007. 400 p.
4. *Булинский А.В.*, *Ширяев А.Н.* Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005. 402 с.
5. *Невё Ж.* Математические основы теории вероятностей. М.: Мир, 1969. 309 с.
6. *Липцер Р.Ш.*, *Ширяев А.Н.* Теория мартингалов. М.: Наука, 1986. 512 с.
7. *Robinson A.* Nonstandard analysis. Princeton: Princeton University Press, 1996. 293 p.
8. *Дэвис М.* Прикладной нестандартный анализ. М.: Мир, 1980. 234 с.
9. *Loeb P.A.* Conversion from nonstandard to standard measure spaces and applications in probability theory // Trans. Amer. Math. Soc. 1975. V. 211. P. 113 – 122.
10. *Luxemburg W.A.J.* Nonstandard analysis: Lectures on Robinson's Theory of Infinitesimals and infinitely Large Numbers. Pasadena, 1962. Revised edition. Pasadena 1964.
11. *Machover M.*, *Hirschfeld J.* Lectures on nonstandard analysis. Berlin: Springer, 1969. (Lecture Notes in Mathematics, No. 94.)
12. *Cutland N.J.* Nonstandard measure theory and its applications // Bull. London Math. Soc. 1983. V. 15. Part 6. No. 57. P. 529 – 589.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

ПЧЕЛИНЦЕВ Евгений Анатольевич – студент пятого курса механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: pchelintsev@sibmail.com

Статья принята в печать 25.05.2009 г.