

УДК 517.54

П.И. Сижук, Т.П. Сижук

ЗВЕЗДООБРАЗНЫЕ И ПОЧТИ ВЫПУКЛЫЕ ОКРЕСТНОСТИ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

Находятся достаточные условия звездообразности порядка α и почти выпуклости окрестностей мероморфных в единичном круге функций, имеющих простой полюс в центре круга.

Ключевые слова: звездообразные окрестности, мероморфные функции, почти выпуклые окрестности.

Пусть Σ – класс мероморфных в единичном круге $E = \{z : |z| < 1\}$ функций с лорановским разложением вида

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k. \quad (1)$$

В работе [1] введено понятие δ -окрестности регулярной функции в E . Распространим это понятие на мероморфные функции класса Σ . Назовём δ -окрестностью $N_\delta(f)$ функции $f(z)$ из Σ с разложением (1) множество функций

$$g(z) = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k \quad (2)$$

из Σ , для которых $\sum_{k=1}^{\infty} k |a_k - b_k| \leq \delta$, где $\delta > 0$.

Рассмотрим вопрос о достаточных условиях звездообразности и почти выпуклости окрестностей функций $f(z) \in \Sigma$.

1. Обозначим через Σ^* класс звездообразных однолистных в E функций $f(z)$ из Σ , т.е. функции $w = f(z) \in \Sigma$, отображающих круг E на однолистные области, дополнение которых до всей w -плоскости есть звездообразная область относительно точки $w = 0$ [2, с.62]. Известно, что функции класса Σ^* характеризуются неравенством

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} < 0, \quad z \in E.$$

Следуя М. Робертсону [3], назовём число

$$\alpha = \inf_{z \in E} \operatorname{Re} \left\{ - \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\}$$

порядком звездообразности функции $f(z) \in \Sigma^*$. Множество всех функций $f(z)$, звездообразных порядка α , $0 \leq \alpha < 1$, в E , обозначим через $\Sigma^*(\alpha)$, так что

функции класса $\Sigma^*(\alpha)$ характеризуются неравенством

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} < -\alpha, \quad z \in E. \quad (3)$$

По аналогии с определением свёртки Адамара для регулярных в E функций определим свёртку Адамара для мероморфных в E функций $f(z)$ и $g(z)$ из класса Σ :

$$f(z) * g(z) = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k z_k,$$

где a_k и b_k ($k=1, 2, \dots$) – коэффициенты разложений (1) и (2). Легко проверить наличие у свёртки Адамара следующих свойств:

$$1^0. \mu f(z) * h(z) + \nu g(z) * h(z) = h(z) * [\mu f(z) + \nu g(z)],$$

где μ и ν – постоянные.

$$2^0. z(f(z) * g(z))' = zf'(z) * g(z) = f(z) * zg'(z).$$

Теорема 1. Если $f(z) \in \Sigma$ и $|z(f(z) * h_\theta(z))| \geq c > 0$ в E , где

$$h_\theta(z) = \frac{1}{z} + \frac{e^{-i\theta}}{2(1-\alpha)} \left[(1 + e^{i\theta} - 2\alpha e^{i\theta}) \frac{z}{1-z} + (1 - e^{i\theta}) \frac{z}{(1-z)^2} \right], \quad (4)$$

$$0 \leq \theta < 2\pi, \text{ то } N_\delta(f) \subset \Sigma^*(\alpha), \quad \delta = \frac{c(1-\alpha)}{(1+\alpha)}.$$

Доказательство. Характеристическое условие (3) принадлежности классу $\Sigma^*(\alpha)$ функции $f(z)$ из Σ равносильно неравенству

$$-\frac{zf'(z)}{f(z)} \neq \frac{1 + (1-2\alpha)e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}}, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad z \in E.$$

Запишем это неравенство в виде

$$[1 + (1-2\alpha)e^{i\theta}]f(z) + (1 - e^{i\theta})zf'(z) \neq 0.$$

Отсюда, учитывая свойство 2^0 свёртки Адамара и равенство

$$f(z) = \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{1-z} \right) * f(z),$$

приходим к неравенству

$$[1 + (1-2\alpha)e^{i\theta}] \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{1-z} \right) * f(z) + (1 - e^{i\theta}) \left(-\frac{1}{z} + \frac{z}{(1-z)^2} \right) \neq 0,$$

равносильному характеристическому условию (3). Используя свойство 1^0 свёртки Адамара и формулу (4), представим последнее неравенство в форме $z(f(z) * h_\theta(z)) \neq 0$. Следовательно,

$$f(z) \in \Sigma^*(\alpha) \Leftrightarrow f(z) \in \Sigma \quad \text{и} \quad z(f(z) * h_\theta(z)) \neq 0, \quad z \in E. \quad (5)$$

По формуле (4) получим разложение

$$h_{\theta}(z) = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k, \quad (6)$$

в котором

$$c_k = \frac{k+1-(k-1+2\alpha)e^{i\theta}}{2(1-\alpha)e^{i\theta}}, \quad k=1,2,\dots,$$

так что

$$|c_k| \leq \frac{k+\alpha}{1-\alpha}, \quad k=1,2,\dots \quad (7)$$

Пусть удовлетворяющая условиям теоремы функция $f(z)$ имеет в E разложение (1), а функция $g(z) \in N_{\delta}(f)$ и имеет разложение (2). Тогда с учётом (6) будем иметь

$$\begin{aligned} |z(g(z) * h_{\theta}(z))| &\geq |z(f(z) * h_{\theta}(z))| - |z((f(z) - g(z)) * h_{\theta}(z))| \geq \\ &\geq c - \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| |a_k - b_k|, \quad z \in E. \end{aligned} \quad (8)$$

В силу неравенств (7) запишем

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| |a_k - b_k| \leq \frac{1}{1-\alpha} \left(\sum_{k=1}^{\infty} k |a_k - b_k| + \alpha \sum_{k=1}^{\infty} |a_k - b_k| \right).$$

Приняв к этому во внимание неравенства

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k - b_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} k |a_k - b_k| \leq \delta,$$

получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| |a_k - b_k| \leq \frac{\delta(1+\alpha)}{1-\alpha},$$

что вместе с (8) влечёт

$$|z(g(z) * h_{\theta}(z))| > c - \frac{\delta(1+\alpha)}{1-\alpha}.$$

Откуда при $\delta = \frac{c(1-\alpha)}{(1+\alpha)}$ следует неравенство

$$|z(g(z) * h_{\theta}(z))| > 0,$$

означающее в соответствии с (5), что $g(z) \in \Sigma^*(\alpha)$. Теорема доказана.

2. Обозначим через $\Sigma(\alpha)$, $0 \leq \alpha < 1$, класс функций $g(z)$ из Σ , для каждой из которых существует функция $f(z) \in \Sigma^*(\alpha)$ (зависящая от $f(z)$), такая, что

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{zg'(z)}{f(z)} \right\} < 0, \quad z \in E. \quad (9)$$

Ввиду включения $\Sigma^*(\alpha) \subset \Sigma^*$, функции класса $\Sigma(\alpha)$ почти выпуклы в круге E [4].

Теорема 2. Если $f(z) \in \Sigma^*(\alpha)$ и $|zf(z)| \geq m > 0$ в E , то $N_\delta(f) \subset \Sigma(\alpha)$, где $\delta = \alpha m$.

Доказательство. Для функций $f(z)$ и $g(z)$ из Σ справедливо неравенство

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{zg'(z)}{f(z)} \right\} \leq \operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} + \left| \frac{z(f'(z) - g'(z))}{f(z)} \right|, \quad z \in E, \quad (10)$$

а с учётом их разложений (1) и (2) оценка

$$|z^2(f'(z) - g'(z))| < \sum_{k=1}^{\infty} k |a_k - b_k|, \quad z \in E. \quad (11)$$

Считая, что $f(z) \in \Sigma^*(\alpha)$ и $g(z) \in N_\delta(f)$, из (10) и (11) с учётом (3) получим

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{zg'(z)}{f(z)} \right\} < -\alpha + \frac{\delta}{|zf(z)|}, \quad z \in E,$$

что при $|zf(z)| \geq m > 0$ в E и $\delta = \alpha m$ влечёт неравенство (9), т.е. $g(z) \in \Sigma(\alpha)$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ruschevych Stephan.* Neighborhoods of univalent functions // Proc. Amer. Math. Soc. 1981. V. 81. No. 4. P. 521 – 527.
2. *Александров И.А.* Методы геометрической теории функций. Томск: Томский государственный университет, 2001. – 220 с.
3. *Robertson M.S.* On the theory of univalent functions // Ann. Math. 1936. V. 37. P. 374 – 408.
4. *Libera R.J. and Robertson M.S.* Meromorphic close-to-convex functions // Michigan. Math. J. 1961. V. 8. P. 167 – 175.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

СИЖУК Пётр Иванович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа Ставропольского государственного университета. E-mail: sv.petrovich@gmail.com

СИЖУК Татьяна Петровна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа Ставропольского государственного университета. E-mail: sv.petrovich@gmail.com

Статья принята в печать 30.04.2009 г.