

УДК 512.541

А.Р. Чехлов

О СВОЙСТВАХ ЦЕНТРАЛЬНО И КОММУТАТОРНО ИНВАРИАНТНЫХ ПОДГРУПП АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

Получено описание вышеназванных подгрупп в ряде классов абелевых групп.

Ключевые слова: центрально инвариантная подгруппа, коммутаторно инвариантная подгруппа, кольцо эндоморфизмов, скобка Ли эндоморфизмов.

Пусть A – абелева группа. Тогда $E(A)$ обозначает кольцо ее эндоморфизмов, $C = Z(E(A))$ – центр кольца $E(A)$, $r(A)$ – ранг, если не оговорено противное, то A_p – ее компонента, а $t(A)$ – периодическая часть, $A^1 = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} nA$. Если a – элемент порядка p^k , то через $e(a) = k$ обозначим его экспоненту. Положим $A[p^k] = \{a \in A \mid p^k a = 0\}$, причем если A – p -группа, то $A[p^\infty] = A$. Запись $H \leq A$ означает, что H – подгруппа в A ; $H \leq \text{fi } A$, что H – вполне инвариантная подгруппа в A , т.е. $fH \subseteq H$ для каждого $f \in E(A)$; $H \leq \text{ci } A$, что H – центрально инвариантная подгруппа в A , т.е. $fH \subseteq H$ для каждого $f \in C$. Если $f: A \rightarrow B$ – гомоморфизм, то $f|H$ – ограничение f на $H \subseteq A$. Если B, G – группы и X – непустое подмножество B , то через $\text{Hom}(B, G)X$ обозначим подгруппу в G , порожденную всеми подмножествами fX , где $f \in \text{Hom}(B, G)$. Через 1_A обозначим тождественный эндоморфизм группы A , через $o(a)$ – порядок элемента $a \in A$. Если A – группа без кручения и $a \in A$, то $t(a)$ – тип элемента a ; а если A – однородная группа без кручения, то $t(A)$ – ее тип. $\mathbb{N}$ – множество всех натуральных чисел, $\mathbb{Z}$ – аддитивная группа (или кольцо) целых чисел, $\mathbb{Q}$ – аддитивная группа (или поле) всех рациональных чисел, $\hat{\mathbb{Z}}_p$ – группа (или кольцо) целых p -адических чисел, P – множество всех простых чисел.

Если $\varphi \in E(A)$ и $H \leq \text{ci } A$, то $\varphi H \leq \text{ci } A$ и $\varphi^{-1}H = \{a \in A \mid \varphi a \in H\} \leq \text{ci } A$. В частности, все эндоморфные образы группы A , а также ядра ее эндоморфизмов являются ci -подгруппами в A . Нетрудно проверить, что если $H \leq \text{fi } B$ и $B \leq \text{ci } A$, то $H \leq \text{ci } A$; если $H \leq \text{ci } A$, $H \leq B$ и $B/H \leq \text{fi } A/H$, то $B \leq \text{ci } A$.

Следующий пример показывает, что необязательно из $H \leq \text{ci } B$ и $B \leq \text{fi } A$ следует $H \leq \text{ci } A$.

Пример 1. Пусть $S = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, A – редуцированная группа без кручения с условием $E(A) \cong S$ (такая группа найдется согласно известному результату Корнера о счетных кольцах [1, теорема 29.2]). Пусть далее $0 \neq a \in A$ и $B = E(A)a$. Тогда $B \leq \text{fi } A$. Так как элементы кольца S – целые алгебраические числа и A – группа без кручения, то все ее ненулевые эндоморфизмы являются мономорфизмами. Поэтому $B \cong S^+$. Поскольку $S^+ \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, то $C(E(B)) \cong \mathbb{Z}$. Следовательно, $\langle a \rangle \leq \text{ci } B$. Однако $\langle a \rangle$ не является ci -подгруппой в A .

Отметим также следующие свойства.

1) Пусть $A = \bigoplus_{j \in J} A_j$ ($A = \prod_{j \in J} A_j$), $e_j: A \rightarrow A_j$ – соответствующие проекции. Тогда если $\alpha \in C$, то $\alpha' = e_j \alpha e_j \in Z(E(A_j))$.

Действительно, из $e_j = e_j^2$ следует, что $\alpha e_j = \alpha e_j^2 = e_j \alpha e_j$. Если теперь $\varphi \in E(A_j)$, то продолжим φ до эндоморфизма $\bar{\varphi}$ группы A (полагая $\bar{\varphi} = 0$ на дополнительном к A_j прямом слагаемом). Тогда $\varphi = (e_j \bar{\varphi} e_j) | A_j$. По условию $\bar{\varphi} \alpha = \alpha \bar{\varphi}$. Откуда $(e_j \bar{\varphi} e_j)(e_j \alpha e_j) = (e_j \alpha e_j)(e_j \bar{\varphi} e_j)$. Рассматривая это равенство на A_j , получаем $\varphi \alpha' = \alpha' \varphi$, т.е. $\alpha' \in Z(E(A_j))$.

Напомним, что если $A = B \oplus G$, то $E(A)$ можно рассматривать как кольцо матриц вида $r = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$, где $\alpha \in E(B)$ и $\beta \in E(G)$, а $\gamma \in \text{Hom}(G, B)$ и $\delta \in \text{Hom}(B, G)$.

Ясно, что если $r \in C$, то $\gamma = 0$ и $\delta = 0$. Несложно проверяется следующее свойство.

2) Если $A = B \oplus G$, то $r = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \in C$ тогда и только тогда, когда $\alpha \in Z(E(B))$,

$\beta \in Z(E(G))$ и $\varphi \alpha = \beta \varphi$, $\psi \beta = \alpha \psi$ для любых $\varphi \in \text{Hom}(B, G)$, $\psi \in \text{Hom}(G, B)$.

3) Если $B = \varphi A$ для некоторого $\varphi \in E(A)$ и $H \leq \text{ci } B$, то $H \leq \text{ci } A$.

Пусть $b = \varphi a \in B$, $\alpha \in C$ и $f \in E(B)$. Тогда $\alpha f(b) = \alpha(f\varphi)a = (f\varphi)\alpha a = f(\varphi \alpha a) = f\alpha(\varphi a) = f\alpha b$, т.е. $(\alpha | B)f = f(\alpha | B)$. Значит, $\alpha H \subseteq H$.

4) Пусть $A = \bigoplus_{j \in J} A_j$ и $H_j \leq \text{ci } A_j$ для каждого $j \in J$. Тогда $H = \bigoplus_{j \in J} H_j \leq \text{ci } A$.

Вытекает из 2).

5) Пусть $A = \bigoplus_{j \in J} A_j$, $e_j: A \rightarrow A_j$ – соответствующие проекции и $H \leq \text{ci } A$. Тогда $\bigoplus_{j \in J} e_j H \leq \text{ci } A$.

6) Пусть $A = \bigoplus_{j \in J} A_j$ и $A_j \leq \text{fi } A$ для каждого $j \in J$. Подгруппа H является ci -подгруппой в A тогда и только тогда, когда $H = \bigoplus_{j \in J} H_j$, где $H_j \leq \text{ci } A_j$ для каждого $j \in J$.

Необходимость. Если $e_j: A \rightarrow A_j$ – соответствующие проекции, то в данном случае $e_j \in C$ для каждого $j \in J$. Откуда $H_j = e_j H = H \cap A_j$. Условие $H_j \leq \text{ci } A_j$ вытекает из 2). Достаточность следует из 4).

Поскольку в p -группе центр ее кольца эндоморфизмов изоморфен либо кольцу Z_{p^k} (если группа ограничена и p^k служит верхней точной гранью порядков ее элементов), либо $\hat{Z}_p$ (в противном случае) [1, теорема 19.7], то в периодической группе любая ее подгруппа является ci -подгруппой. Согласно [2, предложение 2], центр кольца эндоморфизмов нередуцированной группы без кручения A изоморфен подкольцу поля $\mathbf{Q}$, порожденному всеми такими числами $1/p$, что $pA = A$. Поэтому всякая подгруппа такой группы является ci -подгруппой.

Если A – сепарабельная группа без кручения, то обозначим через $\Omega(A)$ множество типов всех прямых слагаемых ранга 1 группы A . Типы $s, t \in \Omega(A)$ будем считать эквивалентными, если существуют такие $r_1, \dots, r_n \in \Omega(A)$, что типы r_i, r_{i+1} сравнимы для всех $i = 0, \dots, n$, где $r_0 = s, r_{n+1} = t$. Если теперь $\Omega(A) = \bigcup_{k \in K} \Omega_k$ – раз-

биение множества $\Omega(A)$ на классы эквивалентности, то $A = \bigoplus_{k \in K} A_k$, где A_k – сепарабельные группы, $\Omega(A_k) = \Omega_k$, слагаемые A_k вполне инвариантны в A , причем центр $Z(E(A_k))$ изоморфен некоторому подкольцу поля $\mathbf{Q}$ [1; § 19, упр. 7]. Легко видеть, что $pZ(E(A_k)) = Z(E(A_k))$ в точности тогда, когда $pA_k = A_k$.

Теорема 1. Если $A = \bigoplus_{k \in K} A_k$ – сепарабельная группа без кручения, где $\Omega(A) = \bigcup_{k \in K} \Omega_k$ – разбиение множества $\Omega(A)$ на классы эквивалентности, то подгруппа H группы A является ее ci -подгруппой в точности тогда, когда $H = \bigoplus_{k \in K} H_k$, где $H_k = A_k \cap H$ и $pH_k = H_k$ для каждого простого числа p со свойством $pA_k = A_k$.

Доказательство. Вытекает из свойства 6).

Из теоремы 1 в частности следует, что у делимой группы без кручения каждая ее ci -подгруппа является прямым слагаемым.

Теорема 2. Если все ci -подгруппы группы A являются ее fi -подгруппами, то кольцо $E(A)$ коммутативно.

Доказательство. Пусть $0 \neq a \in A$ и $\varphi \in E(A)$. Поскольку $Ca \leq \text{fi } A$, то $\varphi a = \alpha a$ для некоторого $\alpha \in C$. Имеем $(\varphi - \alpha)a = 0$. Поэтому $Ca \subseteq \text{Ker}(\varphi - \alpha)$. Следовательно, $\varphi | Ca = \alpha | Ca$. Если теперь $\psi \in E(A)$ и $\beta \in C$ – такой, что $\psi | Ca = \beta | Ca$, то $(\varphi\psi - \psi\varphi) | Ca = (\alpha\beta - \beta\alpha) | Ca = 0$. Откуда $\varphi\psi = \psi\varphi$ в силу произвольности a .

Если R – кольцо, то операция $a \circ b = ab - ba$ (где $a, b \in R$) называется коммутированием, а элемент $[a, b] = ab - ba$ – коммутатором a и b . Приведем простую лемму

Лемма 1. В кольце R операция коммутирования ассоциативна тогда и только тогда, когда любой коммутатор кольца R лежит в его центре.

Доказательство. Необходимость. Имеем

$$[[a, b], c] = abc - bac - cab + cba, [a, [b, c]] = abc - acb - bca + cba.$$

Приравнявая правые части, получаем $0 = bac + cab - acb - bca = [[c, a], b]$. Откуда $[c, a] \in Z(R)$ в силу произвольности элемента b . Достаточность очевидна.

Подгруппу $H \leq A$ назовем коммутаторно инвариантной, кратко ki -подгруппой, если $[\varphi, \psi]h \in H$ для любых $h \in H$ и $\varphi, \psi \in E(A)$. Ясно, что если $H \leq \text{ki } A$, то $\alpha H \leq \text{ki } A$ для любого $\alpha \in Z(E(A))$.

Лемма 2. Пусть $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$, $\pi_i: A \rightarrow A_i$ – соответствующие проекции и $H \leq A$. Тогда:

1) $H \leq \text{ki } A$ в том и только в том случае, когда $\text{Hom}(A_i, A_j)\pi_i H \subseteq H \cap A_j$ и $[\varphi_i, \psi_i]\pi_i H \subseteq H \cap A_i$ для любых $\varphi_i, \psi_i \in E(A_i)$, где $i, j \in I$ и $j \neq i$;

2) если $B_i \leq \text{ki } A_i$, то $B = \bigoplus_{i \in I} B_i \leq \text{ki } A$ в том и только в том случае, когда $\text{Hom}(A_i, A_j)B_i \subseteq B_j$ для всех $i, j \in I$, где $j \neq i$;

3) если $A_i \leq \text{fi } A$ и $B_i \leq A_i$, то $B = \bigoplus_{i \in I} B_i \leq \text{ki } A$ в том и только в том случае, когда $B_i \leq \text{ki } A_i$ для всех $i \in I$;

4) ki -подгруппа H группы A являются ее fi -подгруппой в том и только в том случае, когда $\pi_i H = H \cap A_i$ и $H \cap A_i \leq \text{fi } A_i$ для каждого $i \in I$.

Доказательство. 1) *Необходимость.* Пусть $f \in \text{Hom}(A_i, A_j)$, $G_i = \bigoplus_{j \in I \setminus \{i\}} A_j$ и $\theta_i: A \rightarrow G_i$ – проекция. Продолжим f до $\bar{f} \in E(A)$, полагая $\bar{f}|_{A_i} = f$, $\bar{f}|_{G_i} = 0$. Тогда если $a_i + g_i \in H$ ($a_i \in A_i$, $g_i \in G_i$), то $[\bar{f}, \pi_i](a_i + g_i) = fa_i \in H \cap A_j$. Необходимость включения $[\varphi_i, \psi_i]\pi_i H \subseteq H \cap A_i$ очевидна.

Достаточность. Пусть $G_i = \bigoplus_{j \in I \setminus \{i\}} A_j$, $\theta: A \rightarrow G_i$ – проекция, $1 - \theta = \pi$, где $\pi = \pi_i$, $\alpha, \beta \in E(A)$ и $a = \pi h$ для некоторого $h \in H$. Тогда

$$\begin{aligned} [\alpha, \beta]a &= [(\pi + \theta)\alpha, (\pi + \theta)\beta]a = [\pi\alpha, \pi\beta]a + [\pi\alpha, \theta\beta]a + [\theta\alpha, \pi\beta]a + [\theta\alpha, \theta\beta]a = \\ &= [\pi\alpha, \pi\beta]a + (\pi\alpha\theta\beta - \pi\beta\theta\alpha)a + (\theta\alpha\pi\beta + \theta\alpha\theta\beta - \theta\beta\pi\alpha - \theta\beta\theta\alpha)a. \end{aligned}$$

Учитывая свойства подгруппы H , получаем

$$[\pi\alpha, \pi\beta]a \in [\pi\alpha, \pi\beta]\pi H \subseteq H \cap A_j,$$

$$(\pi\alpha\theta\beta - \pi\beta\theta\alpha)a \in \text{Hom}(G_i, A_i)\theta H = \sum_{j \in I \setminus \{i\}} \text{Hom}(A_j, A_i)\pi_j H \subseteq H \cap A_i,$$

$$\text{и} \quad (\theta\alpha\pi\beta + \theta\alpha\theta\beta - \theta\beta\pi\alpha - \theta\beta\theta\alpha)a \in \text{Hom}(A_i, G_i)\pi H =$$

$$= \sum_{j \in I \setminus \{i\}} \text{Hom}(A_i, A_j)\pi H \subseteq \sum_{j \in I \setminus \{i\}} (H \cap A_j).$$

Поскольку $h = \pi_1 h + \dots + \pi_n h$ для некоторого $n \in \mathbf{N}$ ($\pi_j = \pi_{i_j}$, $i_j \in I$, $j = 1, \dots, n$), то

$$[\alpha, \beta]h \in H.$$

2) – 4) вытекают из 1).

Из леммы 2, п. 1) непосредственно вытекает, что ki -прямые слагаемые вполне инвариантны.

С помощью леммы 2 легко строятся примеры ki -подгрупп, не являющиеся fi -подгруппами.

Пример 2. Пусть $o(a) = p$, $o(b) = p^3$, $A = \langle a \rangle \oplus \langle b \rangle$ и $H = \langle a + pb \rangle$. Для подгруппы H выполнены условия п. 1) леммы 2, поэтому $H \leq \text{ki } A$. Однако $H \not\leq \text{fi } A$.

Доказательство следующей леммы проверяется непосредственно.

Лемма 3. Пусть $H \leq \text{ki } A$. Тогда:

1) если B – прямое слагаемое группы A и π – проекция A на B , то $H \cap B$, $\pi H \leq \text{ki } B$;

2) если $A = \bigoplus A_i$, $\pi_i: A \rightarrow A_i$ – соответствующие проекции и $\underline{H} = \bigoplus (H \cap A_i)$, $\overline{H} = \bigoplus (\pi_i H)$, то $\underline{H}, \overline{H} \leq \text{ki } A$, $\underline{H} \leq H \leq \overline{H}$ и $\underline{H} = \overline{H}$, если и только если $H = \bigoplus (H \cap A_i)$;

3) если $A = B \oplus G$, где $G \leq \text{fi } A$ и $H \leq \text{ki } B$, то $H \oplus \text{Hom}(B, G)H \leq \text{ki } A$.

Несложно проверяется, что если $H \leq \text{fi } G$ и $G \leq \text{ki } A$, то $H \leq \text{ki } A$; если $H \leq \text{ki } G$ и $G \leq \text{fi } A$, то $H \leq \text{ki } A$. Как показывает следующий пример, может случиться так, что $H \leq \text{ki } G$, $G \leq \text{ki } A$, но $H \not\leq \text{ki } A$.

Пример 3. Пусть $o(a) = p$, $o(b) = p^3$, $o(c) = p^8$, $A = \langle a \rangle \oplus \langle b \rangle \oplus \langle c \rangle$, $x = a + pb$, $y = p^2 c$ и $G = \langle x \rangle \oplus \langle y \rangle$. Если $\pi_a: A \rightarrow \langle a \rangle$, $\pi_b: A \rightarrow \langle b \rangle$, $\pi_c: A \rightarrow \langle c \rangle$ – проекции, то $\pi_a(G) = \langle a \rangle$, $\pi_b(G) = \langle pb \rangle$, $\pi_c(G) = \langle p^2 c \rangle$. Поэтому

$$\text{Hom}(\langle a \rangle, \langle b \rangle)(\pi_a(G)) = \langle p^2 b \rangle \subseteq G \cap \langle b \rangle = \langle p^2 b \rangle,$$

$$\text{Hom}(\langle a \rangle, \langle c \rangle)(\pi_a(G)) = \langle p^7 c \rangle \subseteq G \cap \langle c \rangle = \langle p^2 c \rangle, \text{Hom}(\langle b \rangle, \langle a \rangle)(\pi_b(G)) = 0 \subseteq G \cap \langle a \rangle,$$

$$\text{Hom}(\langle b \rangle, \langle c \rangle)(\pi_b(G)) = \langle p^6 c \rangle \subseteq G \cap \langle c \rangle = \langle p^2 c \rangle,$$

$$\text{Hom}(\langle c \rangle, \langle a \rangle)(\pi_c(G)) = 0 \subseteq G \cap \langle a \rangle, \text{Hom}(\langle c \rangle, \langle b \rangle)(\pi_c(G)) = \langle p^2 b \rangle \subseteq G \cap \langle b \rangle = \langle p^2 b \rangle.$$

Следовательно, по лемме 2 $G \leq \text{ki } A$. Если теперь $\pi_x: G \rightarrow \langle x \rangle$, $\pi_y: G \rightarrow \langle y \rangle$ – проекции, а $H = \langle x + p^2 y \rangle$, то

$$\text{Hom}(\langle x \rangle, \langle y \rangle)(\pi_x(H)) = \langle p^4 y \rangle \subseteq H \cap \langle y \rangle = \langle p^4 y \rangle$$

и $\text{Hom}(\langle y \rangle, \langle x \rangle)(\pi_y(H)) = 0 \subseteq H \cap \langle x \rangle = 0$.

Следовательно, $H \leq \text{ki } G$. Однако $H = \langle a + pb + p^4 c \rangle \not\leq \text{ki } A$, поскольку $\text{Hom}(\langle a \rangle, \langle b \rangle)(\pi_a(H)) = \langle p^2 b \rangle \not\subseteq H$.

Приведем несколько простых и легко проверяемых свойств коммутаторов.

$$1) - [\varphi, \psi] = [-\varphi, \psi] = [\varphi, -\psi] = [\psi, \varphi];$$

$$2) [\alpha, \varphi + \psi] = [\alpha, \varphi] + [\alpha, \psi], [\alpha + \beta, \varphi] = [\alpha, \varphi] + [\beta, \varphi];$$

3) $\varphi^n[\varphi, \psi] = [\varphi, \varphi^n \psi]$, $\psi^n[\varphi, \psi] = [\psi^n \varphi, \psi]$, $[\varphi, \psi]\varphi^n = [\varphi, \psi\varphi^n]$, $[\varphi, \psi]\psi^n = [\varphi\psi^n, \psi]$ для любого $n \in \mathbf{N}$;

$$4) [[\alpha, \beta], \gamma] + [[\beta, \gamma], \alpha] + [[\gamma, \alpha], \beta] = 0, [\alpha, [\beta, \gamma]] + [\beta, [\gamma, \alpha]] + [\gamma, [\alpha, \beta]] = 0;$$

$$5) [[\alpha, \beta], \gamma] = [\alpha\beta, \gamma] - [\beta\alpha, \gamma], [\alpha, [\beta, \gamma]] = [\alpha, \beta\gamma] - [\alpha, \gamma\beta];$$

$$6) [\alpha, \beta]\varphi = \alpha[\beta, \varphi] + [\alpha\varphi, \beta], [\alpha, \beta]\varphi = [\alpha, \beta\varphi] + \beta[\varphi, \alpha];$$

$$7) \varphi[\alpha, \beta] = [\varphi, \alpha]\beta + [\alpha, \varphi\beta], \varphi[\alpha, \beta] = [\varphi\alpha, \beta] + [\beta, \varphi]\alpha.$$

Свойства 2), 5) отражают тот факт, что если в кольце $\langle R, +, \cdot \rangle$ операцию умножения заменить операцией коммутирования, то получится лиево кольцо $\langle R, +, \circ \rangle$ [3; глава II, § 2.3].

Теорема 2. В группе A каждая ее подгруппа является ki -подгруппой тогда и только тогда, когда $E(A)$ – коммутативное кольцо.

Доказательство. Необходимость. Из леммы 2 следует, что прямые слагаемые группы A вполне инвариантны, поэтому ее p -компоненты A_p являются коциклическими. Значит, для каждого $m \in \mathbf{N}$ имеет место разложение $A = A_{p_1} \oplus \dots \oplus A_{p_m} \oplus B_m$, где $B_m[p_j] = 0$ при $j = 1, \dots, m$ и $(p_1 \dots p_m)B_m = B_m$. Отсюда следует, что периодичность A влечет коммутативность кольца $E(A)$. Если a – элемент конечного порядка, то $a \in A_{p_1} \oplus \dots \oplus A_{p_m}$ для некоторого m , а поскольку кольцо $E(A_{p_1} \oplus \dots \oplus A_{p_m})$ коммутативно, то $[\varphi, \psi]a = 0$ для любых $\varphi, \psi \in E(A)$.

Пусть теперь a – элемент бесконечного порядка. Имеем $[\varphi, \psi]a \in \langle a \rangle$. Поэтому $[\varphi, \psi]a = na$ для некоторого $n \in \mathbf{Z}$, $\varphi[\varphi, \psi]a = n\varphi a$. А так как $\varphi[\varphi, \psi] = [\varphi, \varphi\psi]$, то $n\varphi a \in \langle a \rangle$, т.е. $n\varphi a = sa$ для некоторого $s \in \mathbf{Z}$. Аналогично $n\psi a = ka$, где $k \in \mathbf{Z}$. Можно считать, что $a \in B_m$, где m – такое натуральное, что B_m не содержит элементов, порядки которых делятся на простые делители числа n . Поэтому равенство $n^2[\varphi, \psi]a = 0$ влечет $[\varphi, \psi]a = 0$, это доказывает коммутативность $E(A)$. Достаточность очевидна.

Лемма 4. Если $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$, где $|I| > 1$, и для каждого A_i найдется A_j ($j \neq i$) со свойством $A_i \cong A_j$, то все ki -подгруппы группы A являются вполне инвариантными.

Доказательство. Если $H \leq \text{ki } A$, то в данном случае $H = \bigoplus (H \cap A_i)$. Действительно, если π – проекция A на A_i и $\pi h = a \neq 0$ для некоторого $h \in H$, то при условии, что $\varphi: A_i \rightarrow A_j$ и $\psi: A_j \rightarrow A_i$ – взаимно обратные изоморфизмы, в силу леммы 2 имеем $b = \varphi a \in H \cap A_j$ и $a = \psi b \in H \cap A_i$. Аналогично показывается, что $fa \in H \cap A_i$ для любого $f \in E(A_i)$. Этого в силу леммы 2, п. 4) достаточно для вполне инвариантности H .

Из леммы 4 вытекает, что в делимой группе $D = \iota(D) \oplus D_0$ каждая ki -подгруппа H либо является периодической вполне инвариантной подгруппой в D , либо имеет вид $H = \iota(D) \oplus H_1$ для некоторой подгруппы $0 \neq H_1 \leq D_0$, причем $H_1 = D_0$, если группа D_0 разложима.

Если D – делимая часть p -группы $A = B \oplus D$, $H \leq \text{ki } A$, $\theta: A \rightarrow D$ – проекция и $r(D) > 1$, то из доказательства леммы 4 следует, что $H \cap D = \theta H$. Если же $r(D) = 1$, то возможен случай, когда $H \cap D \neq \theta H$. Например, если $B = \langle b \rangle$ – циклическая группа, $e(b) = k \geq 1$, $d \in D$ и $e(d) = n \geq 2k$, то $H = \langle b+d \rangle \leq \text{ki } A$. Однако $\theta H = \langle d \rangle \neq H \cap D = \langle p^k d \rangle$. Подобная ситуация рассматривается в следующей лемме.

Лемма 5. Пусть $A = B \oplus D$, где B – редуцированная, а D – делимая группа, $\pi: A \rightarrow B$ – проекция и $H \leq A$. Тогда:

1) если πH – периодическая группа и $D \cong \mathbf{Q}$, то $H \leq \text{ki } A$ если и только если $[\varphi, \psi]H \subseteq H \cap B$ для любых $\varphi, \psi \in E(A)$;

2) если $D = \bigoplus_{p \in \Pi} D_p$ – такая периодическая группа, что $r(D_p) = 1$ для каждого $p \in \Pi$ (Π – некоторое множество простых чисел), то $H \leq \text{ki } A$ если и только если $[\varphi, \psi]H \subseteq (H \cap B) \oplus (H \cap D)$ для любых $\varphi, \psi \in E(A)$;

3) если A – p -группа и H – ее неограниченная ki -подгруппа, то $D \subseteq H$.

Доказательство. 1) Необходимость. Поскольку $D \leq \text{fi } A$ и $E(D)$ – коммутативное кольцо, то $[\varphi, \psi]H = [\varphi, \psi](\pi H)$. Следовательно, $[\varphi, \psi]H$ – периодическая группа и, значит, она содержится в $H \cap B$. В частности, в такой группе A все подгруппы $H \subseteq D$ являются ki -подгруппами в A . Достаточность очевидна.

2) Необходимость. Поскольку $D \leq \text{fi } A$ и $E(D)$ – коммутативное кольцо, то $[\varphi, \psi]H = [\varphi, \psi](\pi H)$. Пусть $h = b+d \in H$, где $b \in B$, $d \in D$ и $\theta = 1 - \pi$. Имеем

$$\begin{aligned} [\varphi, \psi](b+d) &= [\varphi, \psi]b = [(\pi+\theta)\varphi, (\pi+\theta)\psi]b = \\ &= [\pi\varphi, \pi\psi]b + [\pi\varphi, \theta\psi]b + [\theta\varphi, \pi\psi]b + [\theta\varphi, \theta\psi]b. \end{aligned}$$

Здесь, согласно лемме 2, п. 1), каждое из 4 слагаемых принадлежит подгруппе H . Первое содержится в $H \cap B$, а остальные в $H \cap D$ (учесть, что $\pi\theta\psi b = 0$ и $\pi\theta\theta\psi b = 0$). Достаточность очевидна.

3) Если πH – неограниченная подгруппа в B , то $\text{Hom}(B, D)\pi H = D$ и, значит, $D \subseteq H$ по лемме 2, п. 1). Если же $p^n(\pi H) = 0$ для некоторого $n \in \mathbf{N}$, то $p^n H$ – неограниченная подгруппа в D . Поскольку всякая собственная подгруппа в Z_{p^∞} ограничена, то условие $D \cong Z_{p^\infty}$ сразу влечет, что $D \subseteq H$. Если же $r(D_0) > 1$, то D является прямой суммой групп, изоморфных Z_{p^∞} . Поэтому $D \subseteq H$ по доказательству леммы 4.

Легко проверить, что если H – периодическая подгруппа группы A , D – делимая группа, то $\text{Hom}(A, D)H = \bigoplus D_p[p^{m_p}]$, где $m_p = \sup \{e(h) \mid h \in H_p\}$. Здесь $m_p = 0$, если $H_p = 0$ и, значит, $D_p[p^{m_p}] = 0$. Если же $0 \neq H$ – непериодическая подгруппа группы A , то $\text{Hom}(A, D)H = D$.

Теорема 3. Пусть $A = B \oplus D$, где $D = \iota(D) \oplus D_0$ – делимая часть группы A и $H \leq A$. Тогда $H \leq \text{ki } A$ в том и только в том случае, когда H совпадает с одной из следующих подгрупп:

1) $H = F \oplus (\oplus_p D_p[p^{k_p}])$, где F – периодическая ki -подгруппа группы B и $k_p \geq \sup \{e(b) \mid b \in F_p\}$;

2) $H = G \oplus (\oplus_{p \in \Pi_1} D_p[p^{k_p}])$, где G – периодическая ki -подгруппа в группе $B \oplus (\oplus_{p \in \Pi} D_p)$ такая, как в лемме 5, п. 2), $k_p \geq \sup \{e(g) \mid g \in G_p\}$ и $\Pi_1 \cap \Pi = \emptyset$;

3) $H = C \oplus D$, где $C \leq \text{ki } B$;

4) $H = E \oplus \iota(D)$, $r(D_0) = 1$ и E – ki -подгруппа в группе $B \oplus D_0$ такая, как в лемме 5, п. 1).

Доказательство. Необходимость. Если $\pi: A \rightarrow B$, $\theta_p: A \rightarrow D_p$, $\theta_0: A \rightarrow D_0$ – проекции, то

$$(H \cap B) \oplus (\oplus_p (H \cap D_p)) \oplus (H \cap D_0) \leq H \leq \pi H \oplus (\oplus_p (\theta_p H)) \oplus (\theta_0 H).$$

Так как $\text{Hom}(B, D)\pi H \subseteq H \cap D$ (лемма 2), то непериодичность подгруппы πH влечет равенство $H \cap D = D$ (см. абзац перед теоремой 3), т.е. $D \subseteq H$. Аналогично, если $\theta_0 H \neq 0$, то из $\text{Hom}(D_0, \iota(D))(\theta_0 H) = \iota(D) = H \cap \iota(D)$ следует, что $\iota(D) \subseteq H$. А из леммы 4 при условии $\theta_0 H \neq 0$ и $r(D_0) > 1$ вытекает включение $D_0 \subseteq H$. Для доказательства 3) осталось заметить, что если $D \subseteq H$, то $H = C \oplus D$, где $C = H \cap B \leq \text{ki } B$ по лемме 3. Если же $\iota(D) \subseteq H$ и $\theta_0 H \neq 0$, но $D_0 \not\subseteq H$, то $r(D_0) = 1$ и $H = E \oplus \iota(D)$, где $E = H \cap (B \oplus D_0) \leq \text{ki } (B \oplus D_0)$, что доказывает 4).

Ввиду включения $\text{Hom}(B, D)\pi H \subseteq H \cap D$ условие $\theta_0 H = 0$ влечет периодичность группы πH . Поскольку $\text{Hom}(B, D_p)\pi H \subseteq H \cap D_p$, то $D_p[p^{m_p}] \subseteq H \cap D_p$, где $m_p = \sup \{e(b) \mid b \in (\pi H)_p\}$. Заметим, что если D_p – разложимая группа, то из леммы 4 следует, что $\theta_p H = D_p[p^{k_p}] = H \cap D_p$ для некоторого $k_p \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$ ($k_p \geq m_p$). Если $\theta_p H = H \cap D_p$ для каждого простого p , то $H = F \oplus (\oplus_p D_p[p^{k_p}])$, где $F = B \cap H = \pi H \leq \text{ki } B$, это доказывает 1). В противном случае, пусть Π_1 – множество всех простых p с условием $\theta_p H = H \cap D_p$, а $\Pi = \{p \in P \setminus \Pi_1 \mid D_p \neq 0\}$. Тогда $H = G \oplus (\oplus_{p \in \Pi_1} D_p[p^{k_p}])$, где $G = H \cap (B \oplus (\oplus_{p \in \Pi} D_p)) \leq \text{ki } (B \oplus (\oplus_{p \in \Pi} D_p))$, это доказывает 2).

Достаточность. Вытекает из леммы 3, п. 3).

Отметим, что соответствующая теорема для вполне инвариантных подгрупп доказана в [4, теорема 1.4].

Напомним, что группа без кручения A называется *вполне транзитивной*, если для любых ее элементов $a, b \neq 0$ условие на их характеристики $\chi_A(a) \leq \chi_A(b)$ влечет существование $f \in E(A)$ со свойством $fa = b$. Для группы без кручения A обозначим через $\tau(A)$ – множество типов $\iota(a)$ всех ее ненулевых элементов a ; если t – некоторый тип, то множество всех элементов группы A типа $\geq t$ образует чистую подгруппу $A(t)$. Если A – однородная группа без кручения, то $\iota(A)$ – ее тип, равный типу любого $0 \neq a \in A$.

Теорема 4. Пусть для вполне транзитивной группы без кручения A существует такое разложение $A = \oplus_{i \in I} A_i$, что для каждого $i \in I$ найдется $j \in I \setminus \{i\}$ со свойством $\tau(A_i) = \tau(A_j)$. Тогда каждая ki -подгруппа H группы A является fi -подгруппой.

Доказательство. Пусть $a_1 + \dots + a_n \in H$, где $a_k \in A_{i_k}$ ($k = 1, \dots, n$). По условию $\iota(a_1) \in \tau(A_j)$ для некоторого $j \in I \setminus \{i_1\}$. Следовательно, в A_j найдется элемент b со свойством $\chi_A(a_1) = \chi_A(b)$. Так как $\varphi(a_1) = b$ и $\psi(b) = a_1$ для некоторых $\varphi, \psi \in E(A)$, то по лемме 2, п. 1) $b \in H$ и, значит, $a_1 \in H$. Итак, $H = \bigoplus (H \cap A_i)$. Если теперь $f \in E(A_i)$ и $a \in A_i$, то по условию найдется $b \in A_j$ ($j \in I \setminus \{i\}$) со свойством $\chi(b) = \chi(fa)$. Опять в силу вполне транзитивности из леммы 2, п. 1) следует, что $b \in H$ и $fa \in H$. Этого в силу леммы 2, п. 4) достаточно для вполне инвариантности подгруппы H в A .

В частности, из теоремы 4 следует, что всякая чистая ki -подгруппа однородной вполне транзитивной разложимой группы совпадает с самой группой.

Теорема 5. *В разложимой редуцированной сепарабельной группе без кручения A все ki -подгруппы являются вполне инвариантными тогда и только тогда, когда для каждого прямого слагаемого B ранга 1 группы A в дополнительном прямом слагаемом найдется прямое слагаемое G ранга 1, изоморфное B .*

Доказательство. Необходимость. Допустим, что в $\Omega(A)$ (см. теорему 1) все типы несравнимы. Тогда $A = \bigoplus_{i \in \Omega(A)} A_i$, где $r(A_i) = 1$ и типы групп A_i несравнимы. В этом случае кольцо $E(A)$ коммутативно и каждая подгруппа группы A будет ki -подгруппой, однако A имеет не вполне инвариантные подгруппы. Допустим теперь, что $B \oplus G$ – прямое слагаемое в A , $r(B) = r(G) = 1$ и $\iota(B) < \iota(G)$. Поскольку A редуцированная, то $pB \neq B$ и $pG \neq G$ для некоторого простого p . Если $b \in B$, $g \in G \setminus pG$ и $A = B \oplus C$ ($G \subseteq C$), то пусть $H = \langle pb + g \rangle + E$, где $E = \text{Hom}(B, C) \langle pb \rangle$. Тогда $E = C(\chi(pb)) \leq \text{fi } C$. Если θ – проекция A на C , то так как в C нет прямых слагаемых, изоморфных B , $\text{Hom}(C, B)\theta H = 0$. Следовательно, по лемме 2 $H \leq \text{ki } A$. Однако $g \notin H$ и, значит, $\theta H \not\subseteq H$, т.е. $H \not\leq \text{fi } A$.

Достаточность. Пусть $h \in H \leq \text{ki } A$. Тогда $h = a_1 + \dots + a_n$, где $a_i \in A_i$, $r(A_i) = 1$ и A_i – прямые слагаемые в A . Поскольку для каждого A_i в дополнительном прямом слагаемом найдется прямое слагаемое $A_j \cong A_i$, то так же, как в теореме 4, следует, что $a_i \in H$ и, кроме того, $f(a_i) \in H$ для каждого $f \in E(A)$, т.е. $f(h) \in H$ и, значит, $H \leq \text{fi } A$.

Теорема 6. *В редуцированной алгебраически компактной группе без кручения A каждая ее ki -подгруппа является вполне инвариантной тогда и только тогда, когда все p -адические компоненты группы A разложимы.*

Доказательство. Необходимость. Группа A представима в виде $A = \prod A_p$, где каждая p -адическая компонента A_p является p -адической алгебраически компактной группой. Можно считать, что $A_p \leq A$. Пусть $B = \prod_{p \in \Pi_1} A_p$ – прямое произведение всех неразложимых групп A_p . Тогда кольцо $E(B)$ коммутативно, а так как $B \leq \text{fi } A$, то каждая подгруппа группы B будет ki -подгруппой в A . Поскольку B содержит не вполне инвариантные подгруппы, то это доказывает необходимость.

Достаточность. Пусть $h \in H \leq \text{ki } A$, $f \in E(A)$, $h = (\dots, a_p, \dots)$, где $a_p \in A_p$. Запишем A_p в виде $A_p = B_p \oplus G_p$, где $a_p \in B_p$, $G_p \neq 0$. Тогда $A = B \oplus G$, где $B = \prod B_p$. Имеем $f(a) = b + g$, где $b = (\dots, b_p, \dots) \in B$, $g = (\dots, g_p, \dots) \in G$. По лемме 2 $g \in H \cap G$. Осталось показать, что $b \in H$. Так как каждая A_p – однородная вполне транзитив-

ная группа, то найдутся $\varphi_p, \psi_p \in E(A_p)$ со свойствами $\varphi_p(b_p) \in H \cap G_p$ и $\psi_p(\varphi_p(b_p)) = b_p$. Если теперь $\varphi = (\dots, \varphi_p, \dots)$, $\psi = (\dots, \psi_p, \dots)$, то $\varphi \in \text{Hom}(B, G)$, $\psi \in \text{Hom}(G, B)$. По лемме 2 $\varphi b \in H \cap G$ и $b = \psi(\varphi b) \in H \cap B$.

Приведем следующий полезный результат

Лемма 6 [5, лемма 9.5]. Пусть $A = B \oplus C$ – прямое разложение с проекциями π, θ . Если разложению $A = B \oplus C_1$ соответствуют проекции π_1, θ_1 , то $\pi_1 = \pi + \pi\varphi\theta$, $\theta_1 = \pi - \pi\varphi\theta$ для некоторого эндоморфизма φ группы A . Обратно, для всяких эндоморфизмов π_1, θ_1 приведенного выше вида имеет место разложение $A = B \oplus \theta_1 A$.

Если $A = B \oplus C$, то в [5, теорема 9.6] доказано, что пересечение всех дополнительных прямых слагаемых к B в группе A есть максимальная вполне инвариантная подгруппа группы A , не пересекающаяся с B .

Теорема 7. Пусть $A = B \oplus C$.

1) Наименьшая ki -подгруппа группы A , содержащая C , является $\bar{fi}$ -подгруппой и совпадает с:

а) $\text{Hom}(C, B)C \oplus C$;

б) суммой G всех дополнительных прямых слагаемых к B в группе A .

2) Наибольшая ki -подгруппа группы A , содержащаяся в C , является $\bar{fi}$ -подгруппой и совпадает с:

а) $K = \bigcap_{\varphi \in \text{Hom}(C, B)} \text{Ker } \varphi$;

б) пересечением N всех дополнительных прямых слагаемых к B в группе A .

Доказательство. 1) п. а) вытекает из леммы 2, п. 1). Поскольку $C \subseteq G$, то $G = (B \cap G) \oplus C$. Если C_1 – дополнительное прямое слагаемое к B , то из леммы 6 следует, что $C + C_1 = \varphi(C) \oplus C$ для некоторого гомоморфизма $\varphi: C \rightarrow B$. Откуда

$$G = \left(\sum_{\varphi \in \text{Hom}(C, B)} \varphi(C) \right) \oplus C = \text{Hom}(C, B)C \oplus C,$$

что ввиду а) доказывает б).

2) Вполне инвариантность подгруппы K следует из ее определения. Если теперь $X \leq ki A$ и $X \subseteq C$, то ввиду леммы 2, п. 1) $X \subseteq \text{Ker } \varphi$ для каждого $\varphi \in \text{Hom}(C, B)$. Поэтому $X \subseteq K$, что доказывает а).

Согласно замечанию перед теоремой N является $\bar{fi}$ -подгруппой в A , поэтому $N \subseteq K$. Если $A = B \oplus C_1$, то $K = (K \cap B) \oplus (K \cap C_1)$, где $K \cap B = 0$, поэтому $K \subseteq C_1$ и, значит, $K \subseteq N$.

Лемма 7. Пусть A – неограниченная p -группа. Тогда если $0 \neq H \leq ki A$, то $H \cap p^n A \neq 0$ для каждого $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Пусть D – делимая часть группы A . Тогда если $A = C \oplus D$ и $h = c + d \in H[p]$, где $c \in C$, $d \in D$, то в силу инъективности группы D отображение $c \rightarrow d$ продолжается до гомоморфизма $C \rightarrow D$. Согласно лемме 2, п. 1) $d \in H \cap D$. Осталось заметить, что $D \subseteq p^n A$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Предположим теперь, что группа A редуцированная. Допустим, что $\pi H \neq 0$, где π – проекция на некоторое циклическое прямое слагаемое $\langle a \rangle$. Тогда для всякого элемента c экспоненты $e(c) = n + 1 \geq k = e(a)$, принадлежащего дополнительному прямому слагаемому C , отображение $a \rightarrow p^{n+1-k}c$ продолжается до гомоморфизма $\langle a \rangle \rightarrow C$. Согласно той же лемме 2, п. 1), отсюда следует, что $H \cap (p^n C) \neq 0$. Допустим те-

перь, что $\pi H = 0$ для каждого циклического прямого слагаемого группы A и соответствующей проекции π . Тогда если B – базисная подгруппа группы A , то для каждого n имеет место разложение $A = B_1 \oplus \dots \oplus B_n \oplus A_n$, где $B_n = 0$ или является прямой суммой циклических групп одного и того же порядка p^n , а $A_n = (\oplus_{i=n+1}^{\infty} B_i) + p^n A$. В силу предположения $H \subseteq A_n$. Хорошо известно, что $p^n A$ – существенная подгруппа в A_n [5; § 32, упр. 9]. Откуда $H \cap p^n A \neq 0$.

Из леммы 7 следует, что в неограниченной сепарабельной p -группе нет минимальных ki -подгрупп. Действительно, если H – минимальная ki -подгруппа, то $H = H \cap p^n A$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Откуда $H = H \cap (\bigcap_n p^n A) = 0$. Если p -длина редуцированной p -группы равна $\sigma + 1$ и $p^\sigma A$ – неразложимая группа, то $p^\sigma A$ – минимальная ki -подгруппа. Если же p -группа нередуцированная и D – ее делимая часть, то $D[p]$ – минимальная ki -подгруппа.

Если A – ограниченная p -группа, $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_m$, где A_i – прямые суммы некоторого числа циклических групп порядка p^{k_i} , $k_1 < \dots < k_m$, то $A_m[p]$ – минимальная ki -подгруппа. Если $H \leq ki A$, то $nH \leq ki A$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Отсюда следует, что редуцированные группы без кручения, а также группы без кручения с неразложимой делимой частью (см. лемму 5, п. 1)) не имеют минимальных ki -подгрупп. У нередуцированной группы без кручения с разложимой делимой частью D подгруппа D будет минимальной ki -подгруппой.

Покажем, что если A – неограниченная редуцированная p -группа, то у нее нет максимальных ki -подгрупп (воспользуемся идеей доказательства А.П. Дика соответствующего утверждения для fi -подгрупп). Действительно, если H – максимальная ki -подгруппа, $y \in A \setminus H$, $e(y) = k$, то $H + A[p^k] = A$. Пусть теперь $\langle x \rangle$ – такое прямое слагаемое группы A , что $e(y) = m > k$. Тогда $x = h + a$ для некоторых $h \in H$, $a \in A[p^k]$. Так как $p^k x = p^k h \neq 0$, то $\langle h \rangle$ – прямое слагаемое группы A , $A = \langle h \rangle \oplus C$. Если $y = g + c$ для некоторых $g \in \langle h \rangle$ и $c \in C$, то $p^k y = p^k g + p^k c = 0$. Поэтому $e(c) < k$, значит, $\langle c \rangle$ является гомоморфным образом группы $\langle h \rangle$. По лемме 2, п. 1) $\langle c \rangle \subseteq H \cap C$ и, следовательно, $y \in H$. Противоречие.

Если A – ограниченная p -группа и $p^k A = 0$, где $k \geq 2$ и $p^{k-1} A \neq 0$, то $A[p^{k-1}]$ – наибольшая ki -подгруппа. Действительно, если $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_m$, где A_i – прямые суммы некоторого числа циклических групп порядка p^{k_i} , $k_1 < \dots < k_m = k$, то $A[p^{k-1}] = (A_1 \oplus \dots \oplus A_{m-1}) \oplus p A_m$. Поэтому из леммы 2, п. 1) следует, что всякая ki -подгруппа, строго содержащая $A[p^{k-1}]$, совпадает с A . Пусть теперь $H \leq ki A$ и $h \in H \setminus A[p^{k-1}]$. Тогда $e(h) = k$ и, значит, $\langle h \rangle$ – прямое слагаемое в A , $A = \langle h \rangle \oplus B$. Имеем $\text{Hom}(\langle h \rangle, B) \langle h \rangle = B$. Откуда ввиду леммы 2, п. 1) получаем, что $H = A$. Это доказывает, что $A[p^{k-1}]$ – наибольшая ki -подгруппа в A . Если же A – нередуцированная p -группа с неограниченной редуцированной частью, то максимальных ki -подгрупп опять нет, если же редуцированная часть – ограниченная группа, то наибольшая ki -подгруппа совпадает с суммой делимой части и наибольшей ki -подгруппой ее ограниченной части. В делимой p -группе максимальных ki -подгрупп нет.

E -центром группы A назовем следующую ее подгруппу:

$$Z(A) = \{a \in A \mid [\varphi, \psi]a = 0 \text{ для всех } \varphi, \psi \in E(A)\}.$$

Ясно, что кольцо $E(A)$ коммутативно в точности тогда, когда $Z(A) = A$. Если $G \leq \text{fi } A$, то $Z(G) \subseteq Z(A)$; в частности, если кольцо $E(G)$ коммутативно, то $G \subseteq Z(A)$. Если A – такая группа, что все ее ненулевые эндоморфизмы являются мономорфизмами и $E(A)$ – некоммутативное кольцо, то $Z(A) = 0$. Если A – группа без кручения, то $Z(A)$ – чистая подгруппа в A , в общем случае это не так, примеры см. в 2) (в конце статьи). Любая подгруппа в $Z(A)$ будет ki -подгруппой в A .

Обозначим через A' подгруппу группы A , порожденную всеми ее подгруппами вида $[\xi, \eta]A$, т.е.

$$A' = \langle [\xi, \eta]A \mid \xi, \eta \in E(A) \rangle$$

(E -коммутант группы A). Ясно, что кольцо $E(A)$ коммутативно в точности тогда, когда $A' = 0$. Если $a \in A$, то через $[\varphi, \psi]a$ обозначим коммутатор элемента a . Всякая подгруппа, содержащая A' , будет ki -подгруппой в A .

Из свойства 6) коммутаторов следует, что E -центр, а из свойства 7), что E -коммутант группы A являются ее вполне инвариантными подгруппами. Возможен случай, когда $Z(A) = A'$. Например, если B, C – группы с коммутативными кольцами эндоморфизмов и $C \leq \text{fi } A = B \oplus C$, причем $\text{Hom}(B, C)B = C$, то $A' = C = Z(A)$ (см. леммы 9, 10).

Если $\varphi, \psi \in E(A)$, то их *централизатором* назовем следующую подгруппу $C_{\varphi, \psi} = \{a \in A \mid [\varphi, \psi]a = 0\}$. Ясно, что $Z(A) = \bigcap_{\varphi, \psi \in E(A)} C_{\varphi, \psi}$. Если $H \subseteq A$, то $N(H) = \{a \in A \mid [\varphi, \psi]a \in H, \varphi, \psi \in E(A)\}$ назовем *нормализатором* подмножества H в A . Если $0 \in H$, то $Z(A) = N(0) \subseteq N(H)$, а если $0 \notin H$, то $N(H) = \emptyset$. Если H – подгруппа в A , то $N(H)$ также является подгруппой в A , содержащей $Z(A)$. Очевидно, что если $H \leq A$, то $H \subseteq N(H)$ в точности тогда, когда $H \leq \text{ki } A$, и в этом случае $N(H)$ также является ki -подгруппой в A . Из свойства 6) коммутаторов следует, что если $H \leq \text{fi } A$, то $N(H) \leq \text{fi } A$.

Если $H \leq \text{ki } A$, то любые $\varphi, \psi \in E(A)$ индуцируют действие на A/H . Возможен случай, когда $H \subset N(H)$. Например, если H – вполне инвариантное прямое слагаемое в A и дополнение разложимо в прямую сумму вполне инвариантных прямых слагаемых с коммутативными кольцами эндоморфизмов, то $N(H) = A$. Ясно, что если $H \leq \text{ki } A$, то $H = N(H)$ в точности тогда, когда для любого $0 \neq \bar{a} = a + H \in A/H$ найдутся $\varphi, \psi \in E(A)$ со свойством $[\varphi, \psi]\bar{a} \neq \bar{0}$ (т.е. A/H – коммутаторно точная факторгруппа). Легко проверить, что если H, G – подмножества в группе A и $H \subseteq G$, то $N(H) \subseteq N(G)$ и $N(F \setminus E) \subseteq N(F)N(E)$, $N(F \cap E) \subseteq N(F) \cap N(E)$, $N(F) \cup N(E) \subseteq N(F \cup E)$ для любых подмножеств $F, E \subseteq A$. Легко привести примеры F, E , когда вышеприведенные включения строгие.

Лемма 8. Пусть $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$, где $|I| > 1$, и $G_i = \bigoplus_{j \in I \setminus \{i\}} A_j$.

1) Если для всякого $i \in I$ и любого $0 \neq a \in A_i$ существует $\varphi \in \text{Hom}(A_i, G_i)$ со свойством $\varphi a \neq 0$, то $Z(A) = 0$.

2) $Z(A) = \bigoplus_{i \in I} (Z(A) \cap A_i)$.

3) $\varphi(Z(A) \cap A_i) = 0$ для любого $\varphi \in \text{Hom}(A_i, G_i)$.

4) $Z(A) \cap A_i \subseteq Z(A_i)$. Равенство $Z(A) \cap A_i = Z(A_i)$ имеет место тогда и только тогда, когда $\varphi(Z(A_i)) = 0$ для любого $\varphi \in \text{Hom}(A_i, G_i)$.

Доказательство. 1) Пусть $a_1 + \dots + a_n \in A$, где $0 \neq a_j \in A_{i_j}$ ($j = 1, \dots, n$, $i_j \in I$), $\theta: A \rightarrow G_{i_1}$ – проекция и $\varphi \in \text{Hom}(A_{i_1}, G_{i_1})$ – такой, что $\varphi a_1 \neq 0$. Считаем, что $\varphi \in E(A)$, полагая $\varphi|_{A_{i_1}} = \varphi$, $\varphi|_{G_{i_1}} = 0$. Тогда $[\theta, \varphi]a = \varphi a_1 \neq 0$. Следовательно, $a \notin Z(A)$. Поэтому $Z(A) = 0$ в силу произвольности элемента a .

2) Следует из вполне инвариантности E -центра. 3) Вытекает из доказательства 1).

4) Включение $Z(A) \cap A_i \subseteq Z(A_i)$ очевидно. Если $Z(A_i) \subseteq Z(A)$, то из 2) следует равенство $\varphi(Z(A_i)) = 0$ для любого $\varphi \in \text{Hom}(A_i, G_i)$. Пусть теперь $\pi: A \rightarrow A_i$, $\theta: A \rightarrow G_i$ – проекции, $\alpha, \beta \in E(A)$ и $a \in Z(A_i)$. Имеем

$$[\alpha, \beta]a = [(\pi + \theta)\alpha, (\pi + \theta)\beta]a = [\pi\alpha, \pi\beta]a + [\pi\alpha, \theta\beta]a + [\theta\alpha, \pi\beta]a + [\theta\alpha, \theta\beta]a.$$

Здесь $(\pi\alpha)|_{A_i}$, $(\pi\beta)|_{A_i} \in E(A_i)$, поэтому $[\pi\alpha, \pi\beta]a = 0$, а оставшиеся три слагаемые равны 0, поскольку в $[\pi\alpha, \theta\beta]$, $[\theta\alpha, \pi\beta]$, $[\theta\alpha, \theta\beta]$ входят эндоморфизмы $\theta\alpha$, $\theta\beta$, действующие на элементах из A_i как гомоморфизмы из $\text{Hom}(A_i, G_i)$. Итак, $Z(A_i) \subseteq Z(A)$.

Из леммы 8, в частности, следует, что для гомоморфизма $f: A \rightarrow B$ не обязательно $f(Z(A)) \subseteq Z(B)$. Кроме того, если $A = \bigoplus A_i$ ($A = \prod A_i$), где $A_i \leq \text{fi } A$, то $Z(A) = \bigoplus Z(A_i)$ ($Z(A) = \prod Z(A_i)$). А если $A = \bigoplus A_i$ ($A = \prod A_i$), где $|I| > 1$ и $A_i \cong A_j$ при $i, j \in I$, то $Z(A) = 0$. Следовательно, если $D = t(D) \oplus D_0$ – делимая группа, где $0 \neq t(D)$ – ее периодическая часть, а D_0 – часть без кручения, то $Z(D) = \bigoplus_{p \in \Pi_1} D_p$.

Здесь $\Pi_1 = \{p \in P \mid r(D_p) = 1\}$. А если $t(D) = 0$, то $Z(D) = 0$ при $r(D) > 1$ и $Z(D) = D$ при $r(D) = 1$.

Лемма 9. Если $A = B \oplus C$, где $C \leq \text{fi } A$, то $Z(A) = G \oplus Z(C)$, где $G = Z(B) \cap (\bigcap_{\varphi \in \text{Hom}(B, C)} \text{Ker } \varphi)$.

Доказательство. Согласно лемме 8, п. 2) и п. 4), $Z(A) = (Z(A) \cap B) \oplus (Z(A) \cap C)$, где $Z(A) \cap C = Z(C)$. В силу леммы 8, п. 3), $Z(A) \cap B \subseteq G$, а из п. 4) следует обратное включение $G \subseteq Z(A) \cap B$.

Следствие 1. 1) Если $A = B \oplus D$ – нередуцированная группа без кручения, где D – ее делимая часть, то $Z(A) = D$ при условии $r(D) = 1$, в противном случае $Z(A) = 0$.

2) Если $T = t(A)$ и $A = T \oplus R$ – расщепляющаяся группа, то $Z(A) = Z(T)$ при условии, что T – нередуцированная группа, в противном случае $Z(A) = Z(T) \oplus (Z(R) \cap (\bigcap_{p \in \Pi} p^{m_p} R))$, где $\Pi = \{p \in P \mid T_p \neq 0\}$, $m_p = \sup \{e(a) \mid a \in T_p\}$.

Доказательство. 2) Имеем $Z(A) = (Z(A) \cap T) \oplus (Z(A) \cap R)$. Согласно лемме 9,

$$Z(A) \cap T = Z(T), \quad Z(A) \cap R = Z(R) \cap (\bigcap_{\varphi \in \text{Hom}(R, T)} \text{Ker } \varphi).$$

Обозначим для краткости $E = Z(A) \cap R$, $F = Z(R) \cap (\bigcap_{p \in \Pi} p^{m_p} R)$. Если T – нередуцированная группа, то для любого $0 \neq x \in R$ найдется $\varphi \in \text{Hom}(R, T)$ со свойством $\varphi x \neq 0$. Поэтому по лемме 8 $Z(A) \cap R = 0$. Если же T – редуцированная группа, то $\varphi(F) = 0$ для любого $\varphi \in \text{Hom}(R, T)$, поэтому $F \subseteq E$. Если $x \in Z(A) \cap R$, $h_p(x) < m_p$, то $\varphi x \neq 0$ для некоторого $\varphi \in \text{Hom}(R, T)$. Следовательно, $E \subseteq F$.

Теорема 8. Пусть $A = B \oplus D$, где $D = \iota(D) \oplus D_0$ – ненулевая делимая часть группы A , и пусть $G = Z(B) \cap (\cap_{\varphi \in \text{Hom}(B,D)} \text{Ker } \varphi)$. Тогда G является периодической подгруппой, $G = \bigoplus_{p \in \Pi} G_p$, а $Z(A)$ совпадает с одной из следующих подгрупп:

- 1) если $\iota(D) \neq 0$, то $Z(A) = G \oplus (\bigoplus_{p \in \Pi_1} D_p)$, где $\Pi_1 = \{p \in \Pi \mid r(D_p) = 1\}$ и

$$\Pi \cap \Pi_1 = \emptyset;$$

- 2) если $\iota(D) = 0$, то либо $Z(A) = G$, либо, если $r(D_0) = 1$, $Z(A) = G \oplus D_0$.

Доказательство. Имеем $Z(A) = (Z(A) \cap B) \oplus (Z(A) \cap \iota(D)) \oplus (Z(A) \cap D_0)$. Так как $\iota(D) \leq \text{fi } A$, то согласно лемме 8 $Z(A) \cap \iota(D) = Z(\iota(D)) = \bigoplus_{p \in \Pi_1} D_p$, где $\Pi_1 = \{p \in \Pi \mid r(D_p) = 1\}$. По той же лемме 8, $Z(A) \cap D_0 = 0$, если $\iota(D) \neq 0$ или $r(D_0) > 1$. Всякая подгруппа $X \leq B$ со свойством $\text{Hom}(B, D)X = 0$ является периодической, причем $X_p = 0$ при $D_p \neq 0$. Оставшиеся утверждения есть следствие леммы 8.

Если $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$, то, как следует из следующей леммы, может случиться так, что $A'_i = 0$, но $A' \neq 0$.

Лемма 10. Пусть $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$, где $|I| > 1$, и $G_i = \bigoplus_{j \in I \setminus \{i\}} A_j$. Тогда

- 1) $A' = \langle \text{Hom}(A_i, G_i)A_i, \text{Hom}(G_i, A_i)G_i, A'_i, G'_i \rangle$;

- 2) $A' = \bigoplus_{i \in I} A'_i$ в точности тогда, когда $\text{Hom}(A_i, A_j)A_i \subseteq A'_j$ для любых $i, j \in I$, $j \neq i$.

Доказательство. 1) Пусть $\pi: A \rightarrow A_i$, $\theta: A \rightarrow G_i$ – проекции, $f \in \text{Hom}(A_i, G_i)$ и $a \in A_i$. Тогда если $\varphi \in E(A)$ – такой, что $\varphi|_{A_i} = f$, $\varphi|_{G_i} = 1_{G_i}$, то $[\theta, \varphi]a = fa$. Это доказывает, что $\text{Hom}(A_i, G_i)A_i \subseteq A'$. Если теперь $\xi, \eta \in E(A)$, то

$$\begin{aligned} [\xi, \eta]a &= [(\pi + \theta)\xi, (\pi + \theta)\eta]a = \\ &= [\pi\xi, \pi\eta]a + (\pi\xi\theta\eta - \pi\eta\theta\xi)a + (\theta\xi\pi\eta + \theta\xi\theta\eta - \theta\eta\pi\xi - \theta\eta\theta\xi)a. \end{aligned}$$

Здесь $[\pi\xi, \pi\eta]a \in A'_i$, второе слагаемое принадлежит $\text{Hom}(G_i, A_i)G_i$, а третье – $\text{Hom}(A_i, G_i)A_i$. Поскольку аналогичные рассуждения справедливы и для элементов подгруппы G_i , то A' совпадает с указанной подгруппой. Отметим, что $\text{Hom}(G_i, A_i)G_i = \sum_{j \in I \setminus \{i\}} \text{Hom}(A_j, A_i)A_j$;

- 2) вытекает из 1).

Лемма 11. Если $A = B \oplus G$ и для любых $b \in B$, $g \in G$ найдутся такие $x \in G$, $y \in B$ и $\varphi \in \text{Hom}(B, G)$, $\psi \in \text{Hom}(G, B)$, что $\varphi u = g$, $\psi x = b$, то каждый элемент группы A является коммутатором.

Доказательство. Продолжим φ, ψ до эндоморфизмов группы A , полагая их действия, равными нулевому эндоморфизму на соответствующих дополнительных прямых слагаемых. Тогда если π – проекция A на B , то $[\pi, \varphi + \psi](x - y) = b + g$.

Пусть $D = \iota(D) \oplus D_0$ – делимая группа, где $\iota(D) = \bigoplus_{p \in \Pi} D_p$ – ее периодическая часть. Тогда из леммы 10 следует, что если $D_0 = 0$, то $D' = \bigoplus_{p \in \Pi} D_p$, где $\Pi = \{p \in \Pi \mid r(D_p) > 1\}$, если $r(D_0) = 1$, то $D' = \iota(D)$, а если $r(D_0) > 1$, то $D' = D$. Кроме того, если $A = B \oplus C$, где $C \leq \text{fi } A$, то $A' = B' \oplus \langle \text{Hom}(B, C)B, C' \rangle$. В частности, если $A = B \oplus D$ – p -группа или группа без кручения, где D – ее делимая часть, то $A' = B' \oplus D$. Более общим является

Следствие 2. Пусть $A = B \oplus D$, где $D = \iota(D) \oplus D_0$ – ненулевая делимая часть группы A и $B \neq 0$. Тогда A' совпадает с одной из следующих подгрупп:

- 1) если B – непериодическая группа, то $A' = B' \oplus D$;

2) если B – периодическая группа, то $A' = B' \oplus (\oplus_{p \in \Pi} D_p) \oplus (\oplus_{p \in K} D_p[p^{m_p}]) \oplus D_0'$, где $\Pi = \{p \in P \mid r(D_p) > 1\}$, $K = \{p \in P \mid r(D_p) = 1 \text{ и } B_p \neq 0\}$, $m_p = \sup \{e(b) \mid b \in B_p\}$, а $D_0' = 0$ при $r(D_0) = 1$ и $D_0' = D_0$ при $r(D_0) > 1$.

Группу A назовем *ki-простой*, если у нее нет нетривиальных ($\neq 0$ и A) *ki*-подгрупп. Ясно, что группа A с коммутативным кольцом $E(A)$ является *ki*-простой в точности тогда, когда она имеет простой порядок. Несложно установить, что *ki*-простая группа является либо элементарной p -группой для некоторого простого числа p , либо разложимой делимой группой без кручения.

Если $A = Z_p \oplus \mathbf{Z}$, то $Z(A) = Z_p \oplus p\mathbf{Z}$. В данном случае $Z(A)$ – максимальная подгруппа в A . Покажем, что если в A нет прямых слагаемых, изоморфных Z_p для каждого простого числа p , то $Z(A)$ не может быть максимальной подгруппой. Действительно, в противном случае $A / Z(A)$ – группа простого порядка p , и так как $pA \subseteq Z(A)$, то $A_p \neq 0$. Из леммы 8 следует, что A_p – неразложимая группа. Поэтому $A = A_p \oplus B$ для некоторой подгруппы B . Так как $A_p \subseteq Z(A)$, то $Z(A) = A_p \oplus (Z(A) \cap B)$. Здесь $|B / (Z(A) \cap B)| = p$, следовательно, $|A_p| = p$, что противоречит условию. Отметим, что $A' = Z_p$ для вышеприведенной группы $A = Z_p \oplus \mathbf{Z}$.

Перейдем к редуцированным группам и приведем описание E -центров и E -коммутантов некоторых групп.

1) Если A – неограниченная сепарабельная p -группа, то $Z(A) = 0$ и $A' = A$.

Допустим, что $0 \neq a \in Z(A)$. Тогда a можно вложить в прямое слагаемое B группы A , являющееся ограниченной группой, $A = B \oplus G$. Поскольку G – неограниченная группа, то существует гомоморфизм $f: B \rightarrow G$ со свойством $f(a) \neq 0$, что противоречит лемме 8, п. 3).

Если $a \in A$, то a содержится в прямом слагаемом B группы A , являющемся ограниченной группой, $A = B \oplus G$. Поскольку G – неограниченная группа, то $\text{Hom}(G, B)G = B$. Согласно лемме 10, $B \subseteq A'$.

Отметим, что если A – редуцированная p -группа и $A^1 \neq 0$, то возможен случай, когда $Z(A) \neq 0$. Действительно, если A – редуцированная p -группа и подгруппа A^1 циклическая, то $Z(A) = A^1$.

2) Пусть A – ограниченная p -группа, $A = B_1 \oplus \dots \oplus B_m$, где B_i – прямые суммы некоторого числа копий группы $Z_{p^{k_i}}$, $k_1 < \dots < k_m$ и $i = 1, \dots, m$. Тогда $Z(A) = p^{k_{m-1}} B_m$ и $A' = A[p^{k_{m-1}}]$, если B_m – циклическая группа и $Z(A) = 0$, $A' = A$ в противном случае.

3) Пусть A – сепарабельная группа без кручения, $\Omega(A)$ – множество типов всех ее прямых слагаемых ранга 1. Тогда $Z(A) = \sum_{t \in C(A)} A(t)$, где $C(A)$ – множество всех таких типов $t \in \Omega(A)$, что $r(A(t)) = 1$, т.е. $Z(A)$ совпадает с суммой всех вполне инвариантных прямых слагаемых ранга 1 группы A . A' совпадает с суммой тех прямых слагаемых A_i ранга 1, для которых в дополнительном прямом слагаемом есть прямое слагаемое ранга 1 типа $\leq t(A_i)$.

4) Пусть $A = \prod_{i \in I} A_i$ – векторная группа, где A_i – группы без кручения ранга 1. Тогда $Z(A) = \prod_{j \in J} A_j$, где J – множество всех таких $j \in I$, что $r(A(t(A_j))) = 1$ при $j \in J$, т.е. $Z(A)$ совпадает с прямым произведением всех вполне инвариантных

подгрупп A_j . А $A' = \prod_{k \in K} A_k$, где K – множество всех таких $k \in I$, что в $I \setminus \{k\}$ найдется подгруппа A_s со свойством $t(A_s) \leq t(A_k)$.

5) Пусть $A = \prod A_p$ – алгебраически компактная группа без кручения, где A_p – p -адические компоненты группы A . Тогда $Z(A) = \prod_{p \in \Pi} A_p$, где $\Pi = \{p \in P \mid A_p \text{ – неразложимая группа}\}$. А $A' = \prod_{p \in K} A_p$, где $K = \{p \in P \mid A_p \text{ – разложимая группа}\}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крылов П.А., Михалев А.В., Туганбаев А.А. Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов. М.: Факториал Пресс, 2007.
2. Крылов П.А., Классен Е.Д. Центр кольца эндоморфизмов расщепляющейся смешанной абелевой группы // Сиб. матем. ж. 1999. Т. 40. № 5. С. 1074 – 1085.
3. Курош А.Г. Лекции по общей алгебре. М.: Наука, 1973.
4. Гриншпон С.Я. О строении вполне характеристических подгрупп абелевых групп без кручения // Абелевы группы и модули. Томск, 1981. С. 56 – 92.
5. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1974. Т. 1; 1977. Т. 2.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

ЧЕХЛОВ Андрей Ростиславович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: cheklov@math.tsu.ru

Статья принята в печать 19.03.2009 г.