УДК 514.755

А.Г. Мизин

ГИПЕРКОМПЛЕКСЫ ДВУМЕРНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ P_6

В работе по свойствам основных локальных соответствий, связанных с элементом гиперкомплекса, проводится полная классификация указанных гиперкомплексов в первой дифференциальной окрестности элемента и частичная классификация во второй окрестности. Например, показывается, что специальные гиперкомплексы делятся на 12 классов.

Ключевые слова: *подвижной репер, проективное пространство, локальные свойства, гиперкомплекс двумерных плоскостей.*

1. Основные соответствия гиперкомплекса K_3

Множество всех двумерных плоскостей L в проективном пространстве P_6 зависит от 12 параметров.

В данной работе рассматриваются 11-параметрические семейства $L(11)$, т. е. гиперкомплексы K_3. Работа уточняет и развивает общий подход к классификации гиперкомплексов K_3, изложенный в работе [1] и относящийся только к первой окрестности [2].

Присоединим к гиперкомплексу K_3 подвижной репер $\{A_I\}$, деривационные формулы которого имеют вид $dA_I = \omega_I^J A_J$, где формы Пфаффа ω_I^J удовлетворяют уравнениям структуры $D\omega_I^J = \omega_I^K \Lambda \omega_K^J$ проективного пространства, а также условию $\omega_o^o + \ldots + \omega_n^n = 0$ $(I, J, K = 0,1,\ldots,6)$. Пусть $\{\Gamma^I\}$ – тангенциальный репер, двойственный данному, т.е. $\Gamma^I = (-1)^I \left(A_0, \ldots A_{I-1}, A_{I+1}, \ldots, A_6\right)$, а его деривационные формулы имеют вид $d\Gamma^J = -\omega_I^J \Gamma^I$.

Считая, что плоскость $L = \left(A_0, A_1, A_2\right)$ описывает гиперкомплекс K_3, зададим его уравнения в виде

$$\Lambda_p^i \omega_i^p = 0\,,\ i, i', j, j' = 0,1,2\,;\ p, p', q, q' = 3,\ldots,6\,, \tag{1}$$

где ω_i^p – главные формы, обращение в нуль которых фиксирует плоскость L на гиперкомплекс K_3, а коэффициенты Λ_i^p суть функции главных параметров, а также оставшихся вторичных параметров.

Зафиксируем некоторую прямую L_1 в плоскости L, и зададим её в виде $L_1 : a_i x^i = 0$. Будем искать торсы $L(\Psi_1)$, проходящие через L, принадлежащие гиперкомплексу K_3 и имеющие данную прямую L_1 своей характеристикой, т. е. $L_1 = ChL\left(\Psi_1\right)$.

Пусть $X = x^i A_i$ – произвольная точка прямой L_1, т. е. $a_i x^i = 0$. Для неё вдоль такого торса $L(\Psi_1)$ имеем $dX \in L$. Так как $dX = d(x^i A_i) = dx^i A_i + x^i(\omega_i^j A_j + \omega_i^p A_p)$, то получим систему

$$\omega_i^p x^i = 0. \qquad (2)$$

Прямая L_1 станет характеристикой некоторого торса $L(\Psi_1)$, если все уравнения этой системы будут пропорциональны её уравнению $a_i x^i = 0$. Поэтому совокупность искомых торсов $L(\Psi_1)$ определится системой

$$\omega_i^p = a_i \tilde{\theta}^p, \qquad (3)$$

где $\tilde{\theta}^p$ – некоторые главные формы, а формы ω_i^p удовлетворяют уравнению (1).

С другой стороны, пусть $l_3 = (L, x^p A_p)$ – произвольная фиксированная 3-плоскость, проходящая через L.

Будем искать торсы $L(\Psi_1)$, проходящие через L, принадлежащие гиперкомплексу K_3 и имеющие данную 3-плоскость своим касательным подпространством, т.е. $l_3 = TL(\Psi_1)$. Пусть далее $\Gamma = a_p \Gamma^p$ – произвольная гиперплоскость, проходящая через $l_3 = (L, x^p A_p)$, т. е. $a_p x^p = 0$. Для неё вдоль такого торса $L(\Psi_1)$ имеем $d\Gamma \supset L$. Так как $d\Gamma = d(a_p \Gamma^p) = da_p \Gamma^p - a_p(\omega_i^p \Gamma^i + \omega_q^p \Gamma^q)$, то получим систему

$$\omega_i^p a_p = 0. \qquad (4)$$

3-плоскость l_3 станет касательным подпространством некоторого торса $L(\Psi_1)$, если все уравнения этой системы будут пропорциональны её уравнению $a_p x^p = 0$. Поэтому совокупность искомых торсов $L(\Psi_1)$ определится системой

$$\omega_i^p = x^p \tilde{\theta}_i, \qquad (5)$$

где $\tilde{\theta}_i$ – некоторые главные формы, а формы ω_i^p удовлетворяют уравнению (1).

Из (3) и (5) следует, что совокупность всех торсов $L(\Psi_1)$ гиперкомплекса K_3 задается уравнениями

$$Rang \left\| \omega_i^p \right\| = 1. \qquad (6)$$

Условия (6) применительно к системам (3) и (5) означают, что существует такая главная форма θ, что

$$\omega_i^p = a_i x^p \theta, \qquad (7)$$

Так как формы ω_i^p удовлетворяют уравнению (1), то после внесения данных равенств (7) в уравнение (1) и сокращения на θ мы получим равенство

$$\Lambda_p^i a_i x^p = 0. \qquad (8)$$

Итак, прямая $L_1 : a_i x^i = 0$ и 3-плоскость $l_3 = (L, x^p A_p)$ тогда и только тогда являются соответственно характеристикой $L_1 = ChL(\Psi_1)$ и касательным подпространством $l_3 = TL(\Psi_1)$ некоторого торса $L(\Psi_1)$, когда выполнено равенство (8).

Найдем многомерные аналоги основной корреляции [1] на луче линейчатого комплекса в P_3.

Зафиксируем в L прямую $L_1 : a_i x^i = 0$ и будем перебирать торсы $L(\Psi_1)$ гиперкомплекса K_3, проходящие через L и имеющие характеристику $L_1 = ChL(\Psi_1)$. Ясно, что при фиксированных коэффициентах $a_0 : a_1 : a_2$, задающих прямую L_1, уравнение (8) будет задавать **линейную оболочку** касательных подпространств $TL(\Psi_1)$ всех таких торсов $L(\Psi_1)$. При этом все такие торсы $L(\Psi_1)$ образуют пфаффово подмногообразие $L(\Psi_3)$, для которого $L_1 = ChL(\Psi_3)$.

Определение. Прямые $L_1^*: a_i x^i = 0$ плоскости L, для которых

$$\Lambda_p^i a_i = 0, \tag{9}$$

будем называть *критическими*, а остальные прямые L_1 – *регулярными.*

Итак, на множестве регулярных прямых L_1 плоскости L гиперкомплекса K_3 определено отображение $\varphi_1 : L_1 \mapsto \Gamma$. Формулы этого отображения с учётом (8) можно записать в виде

$$a_3 : a_4 : a_5 : a_6 = \Lambda_3^i a_i : \Lambda_4^i a_i : \Lambda_5^i a_i : \Lambda_6^i a_i . \tag{10}$$

Таким образом, мы получили *основное локальное соответствие* $\varphi_1 : L_1 \mapsto \Gamma = TL(\Psi_3)$ гиперкомплекса K_3, где $ChL(\Psi_3) = L_1$.

Аналогично определяется второе отображение φ_2.

Зафиксируем 3-плоскость $l_3 = (L, x^p A_p)$, инцидентную элементу L гиперкомплекса K_3, и будем перебирать все торсы $L(\Psi_1)$ гиперкомплекса K_3, проходящие через L и имеющие l_3 касательным подпространством, т.е. $l_3 = TL(\psi_1)$. Ясно, что для фиксированных $x^3 : x^4 : x^5 : x^6$, задающих l_3, уравнение (8) будет задавать **пересечение** прямых – характеристик таких торсов $L(\Psi_1)$.

Определение. 3-плоскости $l_3^* = (L, x^p A_p)$, для которых

$$\Lambda_p^i x^p = 0, \tag{11}$$

будем называть *критическими*, а остальные 3-плоскости l_3 – *регулярными.*

Итак, на множестве регулярных 3-плоскостей определено отображение $\varphi_2 : l_3 \mapsto X$. Если $l_3 = (L, x^p A_p)$, то его формулы с учетом (8) можно записать в виде

$$x^0 : x^1 : x^2 = \Lambda_p^0 x^p : \Lambda_p^1 x^p : \Lambda_p^2 x^p . \tag{12}$$

Локальные отображения φ_1 и φ_2 называются *основными соответствиями* гиперкомплекса K_3. Это аналоги основной корреляции на луче линейчатого комплекса в P_3.

Рассмотрим теперь **пересечение** гиперплоскостей $\varphi_1(L_1)$ для всех регулярных прямых L_1 плоскости L и назовем его *внешней ассоциированной плоскостью* $\bar{l}$ для плоскости L. Она в силу (10) задается системой

$$\Lambda_p^i x^p = 0,$$

которая совпадает с (11).

Рассмотрим также **линейную оболочку** точек $\varphi_2(l_3)$ для всех регулярных 3-плоскостей l_3 и назовем её *внутренней ассоциированной* (прямой или точкой) для плоскости L. Она в тангенциальных координатах $a_0 : a_1 : a_2$ плоскости L задается в силу (12) системой

$$\Lambda_p^i a_i = 0,$$

которая совпадает с (9).

2. Классификация гиперкомплексов K_3

Так как основные соответствия φ_1 и φ_2 гиперкомплекса K_3 полностью определяются матрицей $\left\|\Lambda^i_p\right\|$, то обозначим $Rang\left\|\Lambda^i_p\right\| = r$ и назовем K_3 гиперкомплексом *ранга r*, r = 3,2,1, и обозначим его через ${}^rK_3$.

Таким образом, все гиперкомплексы делятся на три класса.

1. $Rang\left\|\Lambda^i_p\right\| = 3$. Это гиперкомплекс ${}^3K_3$ общего вида. В этом случае система (9) имеет лишь тривиальное решение, то есть все прямые L_1 плоскости L регулярны, а через плоскость L проходит критическая 3-плоскость $l^*_3 = (L, x^{*p}A_p)$, ибо система (11) имеет нетривиальное решение $x^{*3} : x^{*4} : x^{*5} : x^{*6}$.

Покажем, что критическая 3-плоскость l^*_3 является внешней ассоциированной $\bar{l}_3$ для плоскости L.

Действительно, в этом случае из (10) и (11) получаем, что $a_p x^{*p} = (\Lambda^i_p a_i)x^{*p} = (\Lambda^i_p x^{*p})a_i = 0$. Это и означает, что критическая 3-плоскость l^*_3 и гиперплоскость $\varphi_1(L_1)$ для любой регулярной прямой L_1 инцидентны.

2. $Rang\left\|\Lambda^i_p\right\| = 2$. Для гиперкомплекса ${}^2K_3$ в плоскости L имеется одна критическая прямая L^*_1, поскольку система (9) имеет нетривиальное решение $a^*_0 : a^*_1 : a^*_2$, а все критические 3-плоскости l^*_3 образуют пучок с осью L в 4-плоскости $\bar{l}_4$, определяемой системой (11). Покажем, что гиперплоскость $\varphi_1(L_1)$ для любой регулярной прямой L_1 проходит через указанную 4-плоскость $\bar{l}_4$. Действительно, для регулярной прямой $L_1 : a_i x^i = 0$ имеем $\Lambda^i_3 a_i : \Lambda^i_4 a_i : \Lambda^i_5 a_i : \Lambda^i_6 a_i \neq 0:0:0:0$, а поэтому в силу (10) и (11) заключаем, что $\varphi_1(L_1) \supset \bar{l}_4$, так как $a_p x^p = (\Lambda^i_p a_i)x^p = (\Lambda^i_p x^p)a_i = 0 \cdot a_i = 0$. Таким образом, указанная 4-плоскость является внешней ассоциированной плоскостью $\bar{l}_4$.

С другой стороны, точка $\varphi_3(l_3)$ для любой регулярной 3-плоскости лежит на критической прямой L^*_1. Действительно, в силу (12) и (9) получаем $a^*_i x^i = a^*_i(\Lambda^i_p a^p) = (\Lambda^i_p a^*_i)a^p = 0 \cdot a^p = 0$. Это означает, что критическая прямая L^*_1 и является внутренней ассоциированной.

3. $Rang\left\|\Lambda^i_p\right\| = 1$. В этом случае для коэффициентов уравнения (1) гиперкомплекса ${}^1K_3$ справедливо разложение

$$\Lambda^i_p = a^*_p x^{*i}. \tag{13}$$

Рассмотрим точку $X^* = x^{*i}A_i$ и гиперплоскость $\Gamma^* = a^*_p \Gamma^P$, где x^{*i} и a^*_p взяты из (13).

Покажем, что произвольная прямая L_1 плоскости L из пучка с центром X^* является критической. Действительно, в силу (13) имеем $\Lambda^i_p a_i = (a^*_p x^{*i})a_i = a^*_p(a_i x^{*i})$. Если теперь $a_i x^{*i} = 0$, то есть прямая L_1 проходит через точку X^*, тогда и $\Lambda^i_p a_i = 0$. Это и означает, что прямая L_1 – критическая. Покажем также, что любая 3-плоскость l_3, инцидентная плоскости L и гиперплоскости Γ^*, является критической. В силу (13) имеем $\Lambda^i_p x^p = (\overset{*}{a}_p x^{*i}) x^p = x^{*i} (\overset{*}{a}_p x^p)$. Если же теперь $\overset{*}{a}_p x^p = 0$, то есть 3-плоскость l_3 лежит в Γ^*, то отсюда заключаем, что $\Lambda^i_p x^p = 0$. Следовательно, 3-плоскость l_3 – критическая.

Кроме того, отметим важнейшие геометрические характеристики данного класса: 1) все гиперплоскости $\varphi_1(L_1)$ для регулярных прямых L_1, для которых $a_i x^{*i} \neq 0$, совпадают с Γ^*; 2) все точки $\varphi_2(l_3)$ для регулярных 3-плоскостей l_3, для которых $\overset{*}{a}_p x^p \neq 0$, совпадают с X^*.

Действительно, в силу (10) и (13) имеем $a_p = \Lambda^i_p a_i = (\overset{*}{a}_p x^{*i}) a_i = (a_i x^{*i}) \overset{*}{a}_p = \overset{*}{a}_p$, то есть $\varphi_1(L_1) = \Gamma^*$. Аналогично в силу (12) и (13) имеем $x^i = \Lambda^i_p x^p = (\overset{*}{a}_p x^{*i}) x^p = (\overset{*}{a}_p x^p) x^{*i} = x^{*i}$, то есть $\varphi_3(l_3)$, что и требовалось доказать.

Итак, точка X^* и гиперплоскость Γ^* являются внутренними и внешними ассоциированными для плоскости L гиперкомплекса ${}^1K_3$, который называют *специальным*, или *допустимым.*

3. Канонические уравнения классов гиперкомплексов K_3

1. Гиперкомплекс ${}^3K_3$. Это гиперкомплекс общего вида. Он характеризуется наличием критической 3-плоскости l_3^*, проходящей через элемент L. Заметим, что l_3^* является одновременно внешней ассоциированной 3-плоскостью, т. е. $l_3^* = \overline{l_3}$. Проведем частичную канонизацию репера, полагая $l_3^* = (L, A_6)$, что в силу (9) приведет к равенствам

$$\Lambda^i_6 = 0.$$

Обозначим координатные прямые плоскости L, задаваемые уравнениями $x^i = 0$, через L^i_1 и продолжим канонизацию. Так как все прямые L_1 плоскости L регулярны, то положим $\varphi_1(L^i_1) = \Gamma^{i+3}$. Эти требования в силу (10) приводят к равенствам

$$\Lambda^0_4 = \Lambda^0_5 = \Lambda^1_3 = \Lambda^1_5 = \Lambda^2_3 = \Lambda^2_4 = 0.$$

Заметим, что при этом должно быть выполнено условие $Rang\left\|\Lambda^i_p\right\| = 3$, равносильное тому, что $\Lambda^0_3 \Lambda^1_4 \Lambda^2_5 \neq 0$.

Осталось провести нормировку вершин репера. Для этого потребуем, чтобы регулярной прямой, задаваемой в плоскости L уравнением $x^0 + x^1 + x^2 = 0$, соответствием φ_1 была сопоставлена гиперплоскость, задаваемая уравнением $x^3 + x^4 + x^5 = 0$, что в силу (10) приводит к равенствам

$$\Lambda^0_3 = \Lambda^1_4 = \Lambda^2_5.$$

Итак, уравнение гиперкомплекса ${}^3K_3$ общего вида приведено к каноническому виду

$$\omega_0^3 + \omega_1^4 + \omega_2^5 = 0, \tag{14}$$

а локальные основные соответствия φ_1 и φ_2, задаваемые формулами (10) и (12), приняли простейший вид

$$a_3 : a_4 : a_5 : a_6 = a_0 : a_1 : a_2 : 0; \tag{15}$$

$$x^0 : x^1 : x^2 = x^3 : x^4 : x^5. \tag{16}$$

2. Гиперкомплекс ${}^2K_3$. Он характеризуется тем, что с плоскостью L инвариантно связываются внешняя ассоциированная 4-плоскость $\bar{l}_4$ и внутренняя ассоциированная прямая $\overline{L_1}$, которая является также критической.

Проведем частичную канонизацию репера, требуя, чтобы $\overline{l_4} = (L, A_5, A_6)$ и $\overline{L_1} = (A_0, A_1)$. В силу (11) и (9) требования приводят соответственно к равенствам

$$\Lambda_5^i = \Lambda_6^i = 0\ ,\ \Lambda_p^2 = 0,$$

при этом должно быть выполнено условие $Rang\left\|\Lambda_p^i\right\| = 2$, равносильное тому, что $\begin{vmatrix} \Lambda_3^0 & \Lambda_4^0 \\ \Lambda_3^1 & \Lambda_4^1 \end{vmatrix} \neq 0$. Теперь отображение φ_1 будет определяться формулами

$$a_3 : a_4 : a_5 : a_6 = (\Lambda_3^0 a_0 + \Lambda_3^1 a_1) : (\Lambda_4^0 a_0 + \Lambda_4^1 a_1) : 0 : 0.$$

Потребуем также, чтобы регулярным прямым (A_1, A_2) и (A_0, A_2) соответствовали координатные гиперплоскости, а именно, $\varphi_1((A_1, A_2)) = \Gamma^3$ и $\varphi_1((A_0, A_2)) = \Gamma^4$, что приведет к соотношениям

$$\Lambda_4^0 = \Lambda_3^1 = 0, \Lambda_3^0 \Lambda_4^1 \neq 0.$$

Завершим упрощение уравнения гиперкомплекса ${}^2K_3$ нормировкой вершин, требуя, чтобы регулярной прямой, задаваемой в плоскости L уравнением $x^0 + x^1 + x^2 = 0$, соответствием φ_1 была сопоставлена гиперплоскость, задаваемая уравнением $x^3 + x^4 = 0$, что с учетом проведенных фиксаций приводит к равенству

$$\Lambda_3^0 = \Lambda_4^1.$$

Итак, уравнение гиперкомплекса ${}^2K_3$ приведено к каноническому виду

$$\omega_0^3 + \omega_1^4 = 0, \tag{17}$$

а локальные основные соответствия φ_1 и φ_2, задаваемые формулами (10) и (12), приняли простейший вид

$$a_3 : a_4 : a_5 : a_6 = a_0 : a_1 : 0 : 0; \tag{18}$$

$$x^0 : x^1 : x^2 = x^3 : x^4 : 0. \tag{19}$$

3. Гиперкомплекс ${}^2K_3$. Это специальный гиперкомплекс. Он характеризуется тем, что с плоскостью L инвариантно связываются внешняя ассоциированная гиперплоскость Γ^* и внутренняя ассоциированная точка X^*.

Проведем частичную канонизацию репера, полагая $\Gamma^* = \Gamma^3$ и $X^* = A_0$. Это в силу (13) приводит к соотношениям

$$\Lambda^1_p = \Lambda^2_p = 0, \Lambda^0_4 = \Lambda^0_5 = \Lambda^0_6 = 0, \Lambda^0_3 \neq 0 .$$

Итак, уравнение специального гиперкомплекса ${}^1K_3$ приведено к каноническому виду

$$\omega^3_0 = 0, \tag{20}$$

а локальные основные соответствия φ_1 и φ_2, задаваемые формулами (10) и (12), приняли простейший вид

$$a_3 : a_4 : a_5 : a_6 = 1 : 0 : 0 : 0 ; \tag{21}$$

$$x^0 : x^1 : x^2 = 1 : 0 : 0 . \tag{22}$$

4. Вторые дифференциальные окрестности выделенных классов гиперкомплексов K_3

Дальнейшее изучение гиперкомплексов K_3 связано со второй дифференциальной окрестностью данного класса. Найдем продолжения уравнения каждого класса.

1. Гиперкомплекс ${}^3K_3$. Обозначим базисные формы θ^α $(\alpha, \alpha' = 1, 2, ..., 11)$ гиперкомплекса ${}^3K_3$ следующим образом:

$$\theta^1 = \omega^4_0, \theta^2 = \omega^5_0, \theta^3 = \omega^3_1, \theta^4 = \omega^5_1, \theta^5 = \omega^3_2, \theta^6 = \omega^4_2,$$
$$\theta^7 = \omega^6_0, \theta^8 = \omega^6_1, \theta^9 = \omega^6_2, \theta^{10} = \omega^4_1, \theta^{11} = \omega^5_2.$$

Продифференцируем внешним образом уравнение (14) с помощью уравнений структуры. С учетом самого уравнения и обозначения базисных форм θ^α получим

$$(\omega^0_1 - \omega^3_4) \wedge \theta^1 + (\omega^0_2 - \omega^3_5) \wedge \theta^2 + (\omega^1_0 - \omega^4_3) \wedge \theta^3 + (\omega^1_2 - \omega^4_5) \wedge \theta^4 +$$
$$+ (\omega^2_0 - \omega^5_3) \wedge \theta^5 + (\omega^2_1 - \omega^5_4) \wedge \theta^6 - \omega^3_6 \wedge \theta^7 - \omega^4_6 \wedge \theta^8 - \omega^5_6 \wedge \theta^9 +$$
$$+ (\omega^1_1 - \omega^0_0 + \omega^3_3 - \omega^4_4) \wedge \theta^{10} + (\omega^2_2 - \omega^0_0 + \omega^3_3 - \omega^4_4) \wedge \theta^{11} = 0.$$

Применение леммы Картана дает следующие главные формы:

$$\begin{gathered}
\omega^0_1 - \omega^3_4 = A_{1\alpha}\theta^\alpha,\ \omega^0_2 - \omega^3_5 = A_{2\alpha}\theta^\alpha,\ \omega^1_0 - \omega^4_3 = A_{3\alpha}\theta^\alpha, \\
\omega^1_2 - \omega^4_5 = A_{4\alpha}\theta^\alpha,\ \omega^2_0 - \omega^5_3 = A_{5\alpha}\theta^\alpha,\ \omega^2_1 - \omega^5_4 = A_{6\alpha}\theta^\alpha, \\
-\omega^3_6 = A_{7\alpha}\theta^\alpha,\ -\omega^4_6 = A_{8\alpha}\theta^\alpha,\ -\omega^5_6 = A_{9\alpha}\theta^\alpha, \\
\omega^0_0 + \omega^1_1 - \omega^3_3 - \omega^4_4 = A_{10\alpha}\theta^\alpha,\ \omega^0_0 + \omega^2_2 - \omega^3_3 - \omega^5_5 = A_{11\alpha}\theta^\alpha,
\end{gathered} \tag{23}$$

где $A_{\alpha\alpha'} = A_{\alpha'\alpha}$ $(\alpha, \alpha' = 1, 2, ..., 11)$ – определяющие геометрию второй дифференциальной окрестности гиперкомплекса ${}^3K_3$ общего вида.

Классификация гиперкомплексов ${}^3K_3$ во второй окрестности чрезвычайно обширна. Ограничимся лишь идеей дальнейшего исследования.

Напомним, что с элементом L инвариантно связана внешняя ассоциированная 3-плоскость $\overline{l_3} = (L, A_6)$.

Для нее с учетом выбора базисных форм θ^α и равенств (23) имеем

$$d\overline{l_3} = (\omega_0^0 + \omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_6^6)\overline{l_3} + (-(\theta^{10} + \theta^{11})A_3 + \theta^1 A_4 + \theta^2 A_5, A_1, A_2 A_6) +$$
$$+(A_0, \theta^3 A_3 + \theta^{10} A_4 + \theta^4 A_5) + (A_0, \theta^5 A_3 + \theta^6 A_4 + \theta^{11} A_5) -$$
$$-(A_0, A_1, A_2, A_{7\alpha}\theta^\alpha A_3 + A_{8\alpha}\theta^\alpha A_4 + A_{9\alpha}\theta^\alpha A_5).$$

Мы видим, что базисные формы θ^7, θ^8 и θ^9 присутствуют здесь лишь в последнем внешнем произведении. Это с учетом того, что базисный минор симметрической матрицы всегда главный, означает, то из симметричной матрицы коэффициентов в (23) можно выделить симметрическую квадратную подматрицу третьего порядка

$$A[7,8,9] = \begin{bmatrix} A_{77} & A_{78} & A_{79} \\ A_{87} & A_{88} & A_{89} \\ A_{97} & A_{98} & A_{99} \end{bmatrix},$$

ранг которой может принимать значения $R = 3,2,1,0$. В зависимости от этого ранга и осуществится дальнейшая классификация гиперкомплексов ${}^3K_3$.

2. Гиперкомплекс ${}^2K_3$. Для удобства обозначим базисные формы гиперкомплекса ${}^2K_3$ иначе, а именно:

$$\theta^1 = \omega_2^3, \theta^2 = \omega_2^4, \theta^3 = \omega_0^4, \theta^4 = \omega_1^3, \theta^5 = \omega_0^5, \theta^6 = \omega_1^5,$$
$$\theta^7 = \omega_0^6, \theta^8 = \omega_1^6, \theta^9 = \omega_1^4, \theta^{10} = \omega_2^5, \theta^{11} = \omega_2^6.$$

Продифференцируем внешним образом уравнение (17) с помощью уравнений структуры. С учетом самого уравнения и обозначения базисных форм θ^α получим

$$\omega_0^2 \wedge \theta^1 + \omega_1^2 \wedge \theta^2 + (\omega_1^0 - \omega_4^3) \wedge \theta^3 + (\omega_0^1 - \omega_3^4) \wedge \theta^4 - \omega_5^3 \wedge \theta^5 -$$
$$-\omega_5^4 \wedge \theta^6 - \omega_6^3 \wedge \theta^7 - \omega_6^4 \wedge \theta^8 + (\omega_1^1 - \omega_0^0 + \omega_3^3 - \omega_4^4) \wedge \theta^9 = 0.$$

Применение леммы Картана дает следующие главные формы:

$$\omega_0^2 = B_{1\beta}\theta^\beta, \ \ \omega_1^2 = B_{2\beta}\theta^\beta, \ \ \omega_1^0 - \omega_4^3 = B_{3\beta}\theta^\beta, \ \ \omega_0^1 - \omega_3^4 = B_{4\beta}\theta^\beta,$$
$$-\omega_5^3 = B_{5\beta}\theta^\beta, \ \ -\omega_5^4 = B_{6\beta}\theta^\beta, \ \ -\omega_6^3 = B_{7\beta}\theta^\beta, \ \ -\omega_6^4 = B_{8\beta}\theta^\beta, \tag{24}$$
$$\omega_1^1 - \omega_0^0 + \omega_3^3 - \omega_4^4 = B_{9\beta}\theta^\beta,$$

где $B_{\beta\beta'} = B_{\beta'\beta}$ $(\beta, \beta' = 1, 2, ..., 9)$ – определяющие геометрию второй дифференциальной окрестности гиперкомплекса ${}^2K_3$.

Мы знаем, что с элементом L инвариантно связаны внутренняя ассоциированная прямая $\overline{L_1} = (A_0, A_1)$, которая является также критической, и внешняя ассоциированная 4-плоскость $\overline{l_4} = (L, A_5, A_6)$. Для них с учетом выбора базисных форм θ^β и равенств (24) имеем

$$d\overline{L_1} = (\omega_0^0 + \omega_1^1)\overline{L_1} + (-\theta^9 A_3 + \theta^3 A_4 + \theta^5 A_5 + \theta^7, A_1) + (A_0, \theta^4 A_3 + \theta^9 A_4 + \theta^6 A_5 + \theta^8 A_6),$$

$$d\overline{l_4} = (\omega_0^0 + \omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_5^5 + \omega_6^6)\overline{l_4} + (-\theta^9 A_3 + \theta^3 A_4, A_1, A_2, A_5, A_6) +$$
$$+(A_0, \theta^4 A_3 + \theta^9 A_4, A_2, A_5, A_6) + (A_0, A_1, \theta^1 A_3 + \theta^2 A_4, A_5, A_6) -$$
$$-(A_0, A_1, A_2, B_{5\beta}\theta^\beta A_3 + B_{6\beta}\theta^\beta A_4, A_6) - (A_0, A_1, A_2, A_5, B_{7\beta}\theta^\beta A_3 + B_{8\beta}\theta^\beta A_4).$$

Отсюда следует, что прямая $\overline{L_1} = (A_0, A_1)$ описывает 7-семейство, ибо её положение определяется базисными формами $\theta^3,\ldots,\theta^9$.

Мы видим, что в дифференциале $d\overline{l_4}$ базисные формы θ^5, θ^6, θ^7 и θ^9 присутствуют в двух последних слагаемых. Это, с учетом того, что базисный минор симметрической матрицы всегда главный, означает, что из симметрической матрицы коэффициентов в (24) можно выделить симметрическую квадратную подматрицу четвертого порядка

$$B[5,6,7,8] = \begin{bmatrix} B_{55} & B_{56} & B_{57} & B_{58} \\ B_{65} & B_{66} & B_{67} & B_{68} \\ B_{75} & B_{76} & B_{77} & B_{78} \\ B_{85} & B_{86} & B_{87} & B_{88} \end{bmatrix},$$

ранг которой может принимать значения $R = 4,3,2,1,0$. В зависимости от этого ранга и осуществится дальнейшая классификация гиперкомплексов ${}^2K_3$.

3. Гиперкомплекс ${}^1K_3$. Для удобства обозначим базисные формы гиперкомплекса ${}^1K_3$ в виде

$$\theta^1 = \omega_0^4, \theta^2 = \omega_0^5, \theta^3 = \omega_0^6, \theta^4 = \omega_1^3, \theta^5 = \omega_2^3, \theta^6 = \omega_1^4,$$
$$\theta^7 = \omega_1^5, \theta^8 = \omega_1^6, \theta^9 = \omega_2^4, \theta^{10} = \omega_2^5, \theta^{11} = \omega_2^6.$$

Продифференцируем внешним образом уравнение (20) с помощью уравнений структуры. С учетом самого уравнения и обозначения базисных форм θ^α получим

$$-\omega_4^3 \wedge \theta^1 - \omega_5^3 \wedge \theta^2 - \omega_6^3 \wedge \theta^3 + \omega_0^1 \wedge \theta^4 + \omega_0^2 \wedge \theta^5 = 0.$$

Применение леммы Картана дает следующие главные формы

$$-\omega_4^3 = C_{1\gamma}\theta^\gamma,\ -\omega_5^3 = C_{2\gamma}\theta^\gamma, -\omega_6^3 = C_{3\gamma}\theta^\gamma,\ \omega_0^1 = C_{4\gamma}\theta^\gamma,\ \omega_0^2 = C_{5\gamma}\theta^\gamma, \qquad (25)$$

где $C_{\gamma\gamma'} = C_{\gamma'\gamma}$ $(\gamma, \gamma' = 1, 2, \ldots, 5)$ – определяющие геометрию второй дифференциальной окрестности гиперкомплекса ${}^1K_3$.

Этот гиперкомплекс характеризуется тем, что с его элементом L инвариантно связаны внутренняя ассоциированная точка $X^* = A_0$, которая является центром пучка критических прямых L_1^*, а также внешняя ассоциированная гиперплоскость $\Gamma^* = \Gamma^3$, содержащая все критические 3-плоскости l_3^*.

Для них с учетом выбора базисных форм θ^γ и равенств (25) имеем

$$dA_0 = \omega_0^0 A_0 + C_{4\gamma}\theta^\gamma A_1 + C_{5\gamma}\theta^\gamma A_2 + \theta^1 A_4 + \theta^2 A_5 + \theta^3 A_6,$$

$$d\Gamma^3 = -\omega_3^3\Gamma^3 - \theta^4\Gamma^1 - \theta^5\Gamma^2 + C_{1\gamma}\theta^\gamma\Gamma^4 + C_{2\gamma}\theta^\gamma\Gamma^5 + C_{3\gamma}\theta^\gamma\Gamma^6.$$

Мы видим, что формы θ^4 и θ^5 присутствуют в дифференциале dA_0 лишь в первых двух слагаемых. Это означает, что в зависимости от ранга R_1 симметрической матрицы второго порядка $C[4,5]=\begin{bmatrix} C_{44} & C_{45} \\ C_{54} & C_{55} \end{bmatrix}$ точка A_0 описывает $(3+R_1)$-поверхность $(R_1=2,1,0)$.

С другой стороны, формы θ^1, θ^2 и θ^3 содержатся в дифференциале $d\Gamma^3$ лишь в последних трех слагаемых. Это означает, что в зависимости от ранга R_2 симметрической матрицы третьего порядка

$$C[1,2,3]=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

гиперплоскость Γ^3 описывает соответствующее семейство $\Gamma^3(2+R_2)$, где $R_2 = 3,2,1,0$.

Таким образом, в зависимости от значений рангов (R_1, R_2) все специальные комплексы $^1K_3$ делятся во второй дифференциальной окрестности на 12 классов.

Структура специальных (допустимых) гиперкомплексов двумерных плоскостей в проективном пространстве P_5 описана в работе [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кругляков Л.З., Мизин А.Г.* Классификация и строение гиперкомплексов многомерных плоскостей // Геом. сб. Вып. 23. Томск, 1982. С. 39 – 42.
2. *Гербсоммер Л.Э.,Кругляков Л.З., Мизин А.Г.* О комплексах многомерных плоскостей // ДАН СССР. 1980. Т. 255. № 5. С. 10381 – 1042.
3. *Мизин А.Г., Достовалова С.Г.* Структура допустимых гиперкомплексов двумерных плоскостей пятимерного проективного пространства // Всесибир. чтения по матем. и мех.: Тез. докл. Томск: Томский госуниверситет, 1997. С. 99.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

МИЗИН Анатолий Георгиевич – кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры геометрии механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: mag@math.tsu.ru

Статья принята в печать 03.12.2008 г.