ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2009 Математика и механика № 1(5)

УДК 517.54

Г.А. Юферова

ОБ ОДНОМ СЕМЕЙСТВЕ ОДНОЛИСТНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Приводится новый пример интегрирования уравнения Левнера с управляющей функцией, зависящей от параметра. Показано, что среди полученных отображений содержится то, которое дает экстремальное отображение в задаче об оценке аргумента производной для однолистных конформных отображений.

Ключевые слова: *уравнение Левнера, экстремальные функции в оценке аргумента производной.*

Обозначим через S класс голоморфных однолистных отображений $f(z)$ круга $E = \{z\mathbf{I}\mathbf{C}; |z| < 1\}$, удовлетворяющих условиям: $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, и через S_M подкласс таких отображений, удовлетворяющих дополнительному условию: $|f(z)| \le M$, $M > 1$.

Теорема. *При фиксированном* τ, $0 \le \tau < +\infty$ *и* $\varphi\in[0, 2\pi]$, *функция*

$$\varsigma(\tau,z,\varphi)=\frac{e^{-2i\varphi}}{C}\left[1+\lambda C-\sqrt{1-2iC\lambda^2\operatorname{Im}\lambda}\right],$$

где

$$\lambda=\lambda(\tau,\varphi)=\cos\varphi\cdot e^{-\tau}+i\sqrt{1-\cos^2\varphi\cdot e^{-2\tau}}\,, \tag{1}$$

$$C=C(\tau,z,\varphi)=2\frac{z-\cos\varphi}{\left(1-e^{i\varphi}z\right)^2}e^{-\tau}$$

осуществляет однолистное конформное отображение круга E в единичный круг $\{\varsigma\in\mathbf{C}; |\varsigma| < 1\}$ *с разрезом, начинающимся в точке*

$$\varsigma_1=\varsigma\left(\tau,e^{i\varphi},\varphi\right)=2i\sin\varphi\cdot e^{\tau}+\lambda\cdot e^{-2i\varphi}-2ie^{\tau}\sqrt{\sin^2\varphi-e^{-2i\varphi}\sin\varphi\lambda^2\operatorname{Im}\lambda e^{-\tau}} \tag{2}$$

и оканчивающимся в точке

$$\varsigma\left(\tau,z_{2,3},\varphi\right)=e^{-2i\varphi}\lambda(1+2i\lambda\operatorname{Im}\lambda)\,, \tag{3}$$

где

$$z_{2,3}=\frac{e^{i\varphi}+2a\pm\sqrt{4a^2-2a\left(e^{2i\varphi}-1\right)e^{i\varphi}}}{e^{2i\varphi}}\,,\ a=i\lambda^2\operatorname{Im}\lambda\cdot e^{-\tau},\ \forall\varphi\in(0,2\pi)\setminus\{\pi\}\,.$$

При этом $\varsigma(\tau,0,\varphi)=0$, $\varsigma'(\tau,0,\varphi)=e^{-\tau}$.

Доказательство. Рассмотрим уравнение Левнера

$$\frac{d\varsigma}{d\tau}=-\varsigma\frac{\mu(\tau,\varphi)+\varsigma}{\mu(\tau,\varphi)-\varsigma},\ 0\le\tau<+\infty \tag{4}$$

с управляющей функцией $\mu(\tau,\varphi)=e^{-2i\varphi}\lambda^3(\tau,\varphi)$, где $\lambda(\tau,\varphi)$ дается формулой (1), и будем искать решение $\varsigma(\tau,z,\varphi)$ этого уравнения с начальным условием $\varsigma(0,z,\varphi)=z$, $z\in E$.

Существование и единственность решения $\varsigma(\tau,z,\varphi)$ этой задачи следует из теоремы 1 [1, С.30].

Заменяя в уравнении (4) переменную ς на ς_1 по формуле $\varsigma = e^{-2i\varphi}\varsigma_1$ и ς_1 на ω по формуле $\varsigma_1 = \lambda\omega$ получим

$$\frac{d\ln\omega}{d\tau} = -\frac{(\lambda'_\tau+\lambda)\lambda^2-(\lambda'_\tau-\lambda)\omega}{\lambda\left(\lambda^2-\omega\right)},\ \omega=\omega(\tau,z,\varphi),\ \omega(0,z,\varphi)=e^{i\varphi}z\,.$$

Учитывая, что

$$\lambda'_\tau = i\lambda\frac{\cos\varphi\cdot e^{-\tau}}{\sqrt{1-\cos^2\varphi\cdot e^{-2\tau}}},\ |\lambda|=1,$$

будем иметь

$$\frac{d\ln\omega}{d\tau} = -\frac{2\lambda^2}{\lambda^2-1}\frac{1-\omega}{\lambda^2-\omega},\ \omega(0,z,\varphi)=e^{i\varphi}z\,.$$

Перейдем теперь при фиксированном φ к переменной υ по формуле $f(E,\varphi)$.

В результате замен приходим к линейному неоднородному уравнению первого порядка с переменными коэффициентами

$$z\in E\,,\ \upsilon\Big|_{\omega=e^{i\varphi}z} = \frac{1}{1+e^{2i\varphi}}\,.$$

Общим решением соответствующего однородного уравнения

$$\frac{d\upsilon}{d\omega} = -\frac{1+\omega}{\omega(1-\omega)}\upsilon$$

является

$$\upsilon(\omega) = q\frac{(1-\omega)^2}{\omega},$$

где q – произвольная постоянная.

Методом вариаций произвольной постоянной приходим к общему решению

$$\upsilon(\omega) = \frac{1}{2\omega}+\frac{(1-\omega)^2}{\omega}q$$

рассматриваемого неоднородного дифференциального уравнения.

С учетом начального условия получим

$$2\upsilon\omega = 1+(1-\omega)^2 D\,,\ D = D(z,\varphi) = \frac{z-\cos\varphi}{\cos\varphi}\frac{1}{\left(1-e^{i\varphi}z\right)^2}\,.$$

Решая относительно ω квадратное уравнение

$$\{\varsigma\in C; |\varsigma|<1\}$$

и выбирая из двух его решений то, которое голоморфно в E, $\omega(0,0,\varphi)=0$, имеем

$$\omega = \frac{\upsilon+D-\sqrt{\upsilon^2+2D\upsilon-D}}{D},$$

где выбрана та ветвь, для которой $\sqrt{1}=1$.

Перейдя к ς по формуле $\omega = \dfrac{e^{2i\varphi}\varsigma}{\lambda}$ и выполнив простые преобразования, получим решение уравнения (4).

Решение распространяется на границу единичного круга как конформное за исключением точек, в которых

$$\varsigma'_z = e^{-\tau}\frac{ze^{-i\varphi}-1}{\left(1-e^{i\varphi}z\right)^3}\cdot\frac{\left(1-\sqrt{1-2iC\lambda^2\operatorname{Im}\lambda}\right)^2}{C^2\sqrt{1-2iC\lambda^2\operatorname{Im}\lambda}} = 0,$$

то есть точек

$$z_1 = e^{i\varphi} \text{ и } z_{2,3} = \frac{e^{i\varphi}+2a\pm\sqrt{4a^2-2a\left(e^{2i\varphi}-1\right)e^{i\varphi}}}{e^{2i\varphi}}.$$

Их образами являются соответственно точки, даваемые формулами (2) и (3).

Теорема доказана.

Следствие 1. *При фиксированном* $M > 1$ *и* $\varphi\in[0, 2\pi]$ *функция*

$$M\varsigma(\ln M, z, \varphi) = \frac{Me^{-2i\varphi}}{C}\left[1+\lambda C-\sqrt{1-2iC\lambda^2\operatorname{Im}\lambda}\right]$$

принадлежит классу S_M. *Здесь*

$$\varsigma(\tau, z) = -e^{\tau}\frac{(1-iz)^2}{2z} - i + e^{\tau}\frac{i+z}{2z}\sqrt{z^2+2i\left(1-2e^{-\tau}\right)\cdot z-1},$$

$$C = C(\ln M, z, \varphi) = 2\frac{z-\cos\varphi}{M\left(1-e^{i\varphi}z\right)^2}.$$

Эта функция осуществляет однолистное конформное отображение круга E *в единичный круг* $\{\varsigma\in\mathbf{C};\ |\varsigma| < 1\}$ *с разрезом, начинающимся в точке*

$$\varsigma_1 = \varsigma\left(\ln M, e^{i\varphi}, \varphi\right) = 2iM^2\sin\varphi + \lambda M\cdot e^{-2i\varphi} - 2iM\sqrt{M^2\sin^2\varphi - e^{-2i\varphi}M\sin\varphi\lambda^2\operatorname{Im}\lambda}$$

и оканчивающимся в точке

$$\varsigma_2 = \varsigma\left(\ln M, z_{2,3}, \varphi\right) = e^{-2i\varphi}\lambda M\,(1+2i\lambda\operatorname{Im}\lambda),$$

где

$$z_{2,3} = \frac{Me^{i\varphi}+2a\pm\sqrt{4a^2-2aM\left(e^{2i\varphi}-1\right)e^{i\varphi}}}{Me^{2i\varphi}},\ a = i\lambda^2\operatorname{Im}\lambda,\ \forall\varphi\in(0,2\pi)\setminus\{\pi\}.$$

При этом $\varsigma(\ln M, 0, \varphi) = 0$, $M\varsigma'(\ln M, 0, \varphi) = 1$.

Следствие 2 *При фиксированном* τ, $0 \le \tau < +\infty$, *функция*

$$\varsigma(\tau, z) = \lambda - e^{\tau}\frac{1-z}{2} - e^{\tau}\frac{\sqrt{1-z}}{2}\sqrt{1+2i\lambda^2\operatorname{Im}\lambda\cdot e^{-\tau}-z},$$

где $$\lambda = \lambda(\tau) = e^{-\tau} + i\sqrt{1-e^{-2\tau}},$$

осуществляет однолистное конформное отображение круга E *в единичный круг* $\{\varsigma\in\mathbf{C};\ |\varsigma| < 1\}$ *с выкинутой лункой, ограниченной дугой единичной окружности и* *дугой кривой, лежащей в единичном круге и имеющей концы в точках*

$$\varsigma_1 = \varsigma(\tau,1) = \lambda \text{ и } \varsigma_2 = \varsigma(\tau,z_2) = \lambda + 2i\lambda^2 \operatorname{Im}\lambda ,$$

где $$z_2 = 1 + 4i\lambda^2 \operatorname{Im}\lambda e^{-\tau} \quad \text{(рис.1).}$$

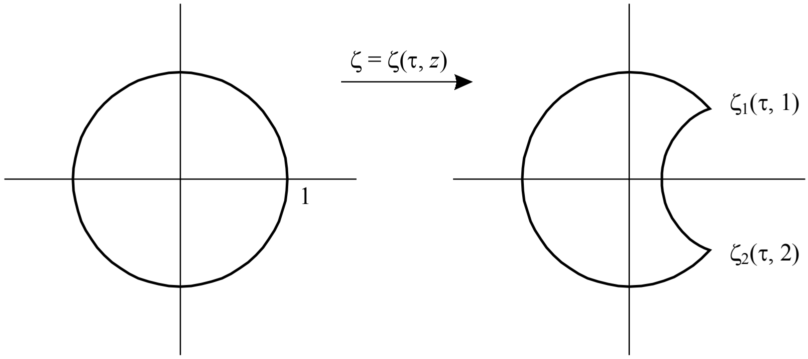

Рис. 1

Следствие 3. *При фиксированном τ,* $0 \le \tau < +\infty$ *, функция*

$$\varsigma(\tau,z) = -e^{\tau}\frac{(1-iz)^2}{2z} - i + e^{\tau}\frac{i+z}{2z}\sqrt{z^2 + 2i\left(1-2e^{-\tau}\right)\cdot z - 1} ,$$

осуществляет однолистное конформное отображение круга E в единичный круг $\{\varsigma \mathbf{I} \mathbf{C};\ |\varsigma| < 1\}$ *с разрезом, начинающимся в точке*

$$\varsigma_1 = \varsigma(\tau,i,\varphi) = i\cdot\left(e^{\frac{\tau}{2}} - \sqrt{e^{\tau}-1}\right)^2$$

и оканчивающимся в точке

$$\varsigma_2 = \varsigma\left(\tau, z_{2,3}\right) = i \text{ , где } z_{2,3} = i\cdot\left(e^{-\frac{\tau}{2}} \pm \sqrt{1-e^{-\tau}}\right)^2 .$$

При этом $\varsigma(\tau,0,\varphi) = 0$, $\varsigma'(\tau,0,\varphi) = e^{-\tau}$.

Следствие 4. *При фиксированном* τ , $0 \le \tau < +\infty$, *функция*

$$\varsigma(\tau,z) = e^{\tau}\frac{1+z}{2} + \lambda - e^{\tau}\frac{\sqrt{1+z}}{2}\sqrt{1+z-4i\lambda^2 \operatorname{Im}\lambda e^{-\tau}} ,$$

где $$\lambda = \lambda(\tau) = -e^{-\tau} + i\sqrt{1-e^{-2\tau}} ,$$

осуществляет однолистное конформное отображение круга E в единичный круг $\{\varsigma \mathbf{I} \mathbf{C};\ |\varsigma| < 1\}$ *с выкинутой лункой, ограниченной дугой единичной окружности и дугой кривой, лежащей в единичном круге и имеющий концы в точках*

$$\varsigma_1 = \varsigma(\tau,-1) = \lambda \text{ и } \varsigma(\tau,z_2) = \lambda + 2i\lambda^2 \operatorname{Im}\lambda ,$$

где $$z_2 = -1 + 4i\lambda^2 \operatorname{Im}\lambda e^{-\tau} .$$

Следствие 5. *При фиксированном τ,* $0 \le \tau < +\infty$, *функция*

$$\varsigma(\tau, z) = -e^{\tau}\frac{(1+iz)^2}{2z} - i + e^{\tau}\frac{i-z}{2z}\sqrt{z^2 - 2i\left(1+2e^{-\tau}\right)z - 1}$$

осуществляет однолистное конформное отображение круга E в единичный круг {ςIC; |ς| < 1} *с разрезом, начинающимся в точке*

$$\varsigma_1 = \varsigma(\tau, i) = -i\left(e^{\frac{\tau}{2}} + \sqrt{1+e^{\tau}}\right)^2$$

и оканчивающимся в точке

$$\varsigma_2 = \varsigma\left(\tau, z_{2,3}\right) = i\,, \quad \text{где } z_{2,3} = i\left(e^{-\frac{\tau}{2}} \pm \sqrt{1+e^{-\tau}}\right)^2 .$$

Функции $e^{\tau}\varsigma(\tau, z, \varphi) = z + ...$ при фиксированном τ осуществляют однолистное конформное отображение круга $E\,E$. Поскольку $\lim\limits_{\tau\to\infty} e^{\tau}\varsigma(\tau, z, \varphi)$ отличен от постоянной, то по известной теореме об однолистных функциях предельной функции для семейства однолистных отображений [2, С.10, теорема 1] функция

$$f(z, \varphi) = \frac{z - \cos\varphi \cdot z^2}{\left(1 - e^{i\varphi}z\right)^2}$$

однолистна в E и принадлежит классу S.

Ее можно представить в виде

$$f(z, \varphi) = \int_0^z \frac{1 - e^{-i\varphi}z}{\left(1 - e^{i\varphi}z\right)^3}dz\,,$$

показывающем, что она дается формулой Кристоффеля – Шварца. Легко видеть, что $f(z, \varphi)$ отображает круг E на плоскость $w = u + iv$, разрезанную по лучу, лежащему на прямой $v = c\,\mathrm{tg}\,2\varphi \cdot u + \frac{1}{4\sin\varphi}$. Он начинается в точке $f\left(e^{i\varphi}, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{i}{4}$.

Его продолжение пересекает ось абсцисс в точке $-\frac{\cos\varphi}{2\cos 2\varphi}$.

Следствие 6. *Функция*

$$f(z, \varphi) = \frac{z - \cos\varphi \cdot z^2}{\left(1 - e^{i\varphi}z\right)^2}\,,\ \forall\varphi \in [0, 2\pi]\,,\ z \in E\,,$$

осуществляет однолистное конформное отображение круга E *на плоскость* $w = u + iv$ *с разрезом вдоль прямой* $v = c\,\mathrm{tg}\,2\varphi \cdot u + \frac{1}{4\sin\varphi}$, *начинающейся в точке* $f\left(e^{i\varphi}, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{i}{4}$ *и пересекающей ось абсцисс в точке* $-\frac{\cos\varphi}{2\cos 2\varphi}$.

При изменении φ от $\frac{\pi}{2}$ до нуля точка $f\left(e^{i\varphi},\varphi\right)$ перемещается вверх от точки $f\left(e^{i\varphi},\frac{\pi}{2}\right)=\frac{i}{4}$ до бесконечности (рис. 2); при $\varphi=\frac{\pi}{4}$ – плоскость с разрезом вдоль прямой $v=\frac{1}{2\sqrt{2}}$ (рис. 3); при $\varphi\to\infty$ области $f(E,\varphi)$ сходятся как к ядру относительно точки $w=0$ к полуплоскости $f(E,0)=\left\{w\in C;\operatorname{Re}w>-\frac{1}{2}\right\}$.

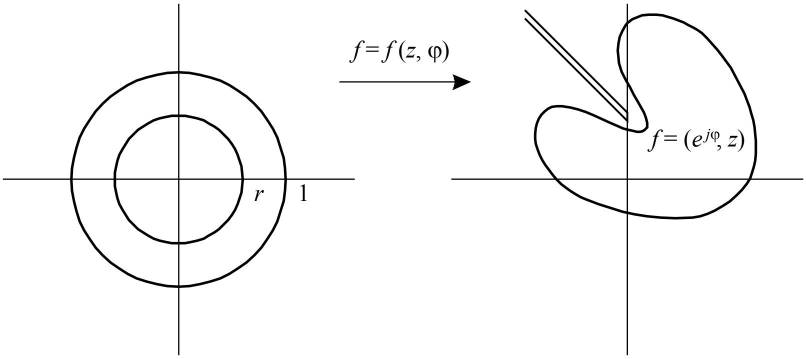

Рис. 2

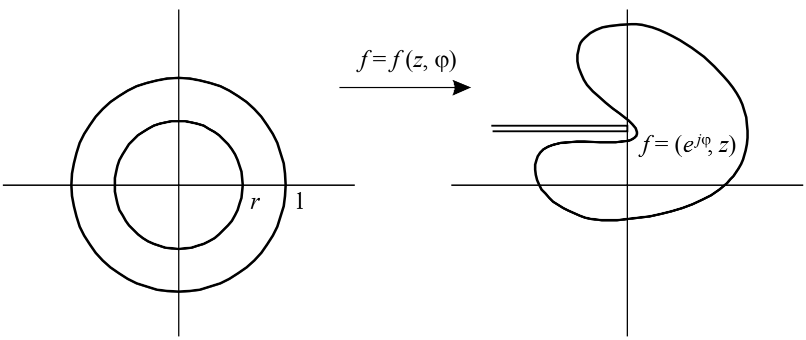

Рис. 3

Г.М. Голузиным [3] и И.Е. Базилевичем [4] была получена точная оценка $\arg f_z'(z,\varphi)$ на классе S при фиксированном $z\in E$:

$$|\arg f'(z)|\le\begin{cases}4\arcsin|z|, & \text{при } |z|\le\dfrac{1}{\sqrt{2}},\\ \pi+\log\dfrac{|z|^2}{1-|z|^2}, & \text{при } |z|\ge\dfrac{1}{\sqrt{2}},\end{cases}$$

без указания экстремальных функций.

Покажем, что $f(z,\varphi)=\dfrac{z-\cos\varphi\cdot z^2}{\left(1-e^{i\varphi}z\right)^2}$ является экстремальной в этой задаче при условии, что $|z|\le\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Имеем

$$\arg f_z'(z,\varphi)=\arg\left(1-e^{-i\varphi}z\right)-3\arg\left(1-e^{i\varphi}z\right).$$

Отсюда при $z=\rho,\quad 0<\rho<1$,

$$\arg f'(\rho,\varphi)=\arg\left[1-\rho(\cos\varphi-i\sin\varphi)\right]-3\arg\left(1-\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)\right)=$$

$$=4\arcsin\frac{\rho\sin\varphi}{\sqrt{1-2\rho\cos\varphi+\rho^2}}.$$

Фиксируем $\rho\in\left(0,\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и в семействе $f(z,\varphi)$ выделим функцию, для которой $\cos\varphi=\rho$, то есть рассматриваемую функцию

$$f(z,\arccos\rho)=\frac{z-\rho z^2}{\left[1-\left(\rho+i\sqrt{1-\rho^2}\right)z\right]^2}.$$

Таким образом, функция $f(z,\arccos\rho)$ является экстремальной в задаче об оценке аргумента производной на классе S. Это отображение отличается от отображения, осуществляемого функцией Кебе, тем, что продолжение разреза плоскости не проходит через начало координат.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров И.А.* Параметрическое продолжение в теории однолистных функций. М.: Наука, 1976.
2. *Александров И.А.* Методы геометрической теории аналитических функций. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2001.
3. *Голузин Г.М.* О теоремах искажения в теории конформных отображений // Математический сборник. 1936. Вып. 1. С. 127 – 135.
4. *Базилевич И.Е.* Sur les theoremes de Koebe – Bieberbach // Математический сборник. 1936. Вып. 1. С. 283 – 292.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

ЮФЕРОВА Галина Александровна, аспирантка кафедры математического анализа механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: galaOk@mail.ru

Статья принята в печать 26.01.2009 г.