

УДК 517.52:539.3

С.П. Сейранян

ОБ ОДНОМ РЕШЕНИИ НАВЬЕ ДЛЯ ЧАСТИЧНО НАГРУЖЕННОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ

В рамках классической теории функций на основе методики автора исследуется решение Навье для прогиба в задаче об изгибе прямоугольной шарнирно опертой по торцам пластины равномерным давлением, приложенным по прямоугольнику со сторонами, параллельными сторонам пластины. Доказано, что все производные в бигармоническом операторе от повторного ряда решения Навье вычисляются его почленным непрерывным дифференцированием на множестве, построенном вычитанием из замкнутого прямоугольника пластины прямых, проходящих через стороны прямоугольника приложения нагрузки. Приводятся выражения для перерезывающих сил в повторных рядах ускоренной сходимости.

Ключевые слова: *прямоугольная пластина, решение, обоснование, ускорение сходимости.*

Исследуемое решение получено Навье представлением неизвестного прогиба повторными синусными тригонометрическими рядами (ТР) и разложением нагрузки в повторный ряд Фурье. Путем подстановки таковых в уравнение равновесия Софи Жермен – Лагранжа [1] и формального повторного почленного дифференцирования по обоим символам суммирования ТР прогиба при применении бигармонического оператора в уравнении равновесия Навье приходит к уравнению, содержащему четыре повторных ТР. Далее Навье приводит сумму названных повторных ТР к единому повторному ТР с членом в виде алгебраической суммы членов предыдущих рядов и приравниванием коэффициентов полученного ряда нулю конечным числом корректных алгебраических действий определяет коэффициенты ТР прогиба.

В дальнейшем, однако, предложенное Навье решение требует строгого математического обоснования всех формально проведенных при его получении математических операций. Это операции четырехкратного почленного дифференцирования по обоим символам суммирования и операция объединения четырех полученных таким образом повторных ТР в единый повторный ТР. Отмеченные действия как Навье, так и последующие поколения математиков и механиков средствами из классической теории функций оставляли необоснованными. Впервые попытка их обоснования в рамках классической теории функций принадлежит автору [2], где, однако, использовался искусственный подход.

Кроме того, как показывают предшествующие исследования, особые требования предъявляются к вычислительной способности того или иного решения. Известно, что при нагрузках, распределенных по значительной площади нагружения несущей поверхности тонкостенного элемента конструкции, решения для изгибающих моментов и перерезывающих сил в повторных ТР приводят к успешным вычислениям. Когда же нагрузка локально-распределенная или, тем более, сосредоточенная, возникает явление потери точности вычислений, обусловленное мед-

ленной сходимостью рядов решений. Значительный вклад в построение решений для локально-нагруженных тонкостенных элементов конструкций в форме, доступной для эффективных вычислений, внесли А.Н. Крылов, С.П. Тимошенко, В.З. Власов, В.В. Новожилов, В.В. Васильев, В.М. Даревский, И.Ф. Образцов, Б.В. Нерубайло, В.П. Олышанский, Э.М. Григолюк, В.М. Толкачев, Б.К. Михайлов, С. Лукасевич и др.

Обсуждая вычислительную способность решения Навье, предварительно отметим, что в [1] при сосредоточенной нагрузке относительно решения для данной пластины сообщается, что «двойные ряды этого решения непригодны для получения численных результатов, в особенности, если в них входят производные высших порядков от прогиба». В работе же [3], вообще говоря, отмечается, что «в случае сосредоточенных нагрузок приходится удерживать большое число членов, что повышает трудоемкость вычислений, не обеспечивая достаточной точности результатов. Далее, автор цитируемой книги, в которой обобщены известные результаты в области пластин и оболочек при локальных нагрузках, приходит к выводу: «Поэтому в случае сосредоточенных нагрузок решений в виде рядов следует избегать. Здесь желательны решения в замкнутом виде».

Таким образом, разработка методики обоснования решений в повторных ТР и их преобразования к форме, доступной для вычислений, представляется актуальной проблемой.

В настоящей работе мы приводим доказательство теоремы о дифференцировании сумм медленно сходящихся ТР и их почленном дифференцировании [4], которая приводит, наряду с результатами в [5, 6], к методике исследования средствами из классической теории функций повторных ТР на сходимость, непрерывность, ускорение сходимости, изменение порядка суммирования и их почленное дифференцирование под обоими символами суммирования. Дается приложение методики к обоснованию названного решения Навье, а также к высокоэффективному улучшению его вычислительной способности. Приводится численный пример, показывающий, что вычисление перерезывающих сил при переходе к локально-распределенной нагрузке без ускорения сходимости может привести к потере точности вычислений. Применение же ускорения сходимости сохраняет точность вычислений в рамках точности классической теории пластин.

1. Некоторые вспомогательные математические результаты

(а) Известное неравенство [7]

$$a^p p^{-1} + b^q q^{-1} \geq ab, \quad a, b \geq 0, \quad p, q > 1, \quad p^{-1} + q^{-1} = 1,$$

введением новых независимых переменных α , β и параметра γ зависимостями

$$a = \sqrt[p]{p\alpha^2}, \quad b = \sqrt[q]{q\beta^2}, \quad p = 2\gamma^{-1}, \quad \alpha \geq 0, \beta \geq 0,$$

с применением предельных переходов при $\gamma \rightarrow 0$, $\gamma \rightarrow 2$ представляется в обобщенном виде

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 &\geq C_\gamma \alpha^\gamma \beta^{2-\gamma}, \quad \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \\ C_\gamma &= \begin{cases} 2 \gamma^{-0,5\gamma} (2-\gamma)^{0,5\gamma-1}, & \text{при } 0 < \gamma < 2, \\ 1, & \text{когда } \gamma = 0, 2. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.1)$$

(б) **Теорема.** Пусть на отрезке $\Delta \subset (-\infty, \infty) \setminus \{\pm 2k\pi, k = 0, 1, \dots\}$ задан косинусный ТР

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos mx, \quad x \in \Delta, \quad (1.2)$$

с коэффициентами, удовлетворяющими условию

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_m = 0. \quad (1.3)$$

Пусть также известно, что тригонометрический ряд, полученный применением к ТР (1.2) преобразования Абеля, на отрезке Δ сходится и, кроме того, почленно дифференцируется с конечной производной. Тогда производная от суммы ТР (1.2) на отрезке Δ существует, конечна и вычисляется его формальным почленным дифференцированием с последующим формальным повторным применением преобразования Абеля.

Если же в принятых предположениях выполняется также условие

$$\lim_{m \rightarrow \infty} m a_m = 0, \quad (1.4)$$

то ТР (1.2) почленно дифференцируется.

Доказательство. Заметим прежде, что исходный ТР удовлетворяет необходимым и достаточным условиям сходимости ТР Салема [8], откуда следует его сходимость на Δ . Применяя к ТР (1.2) преобразование Абеля и дифференцируя полученное выражение как дробь, при этом пользуясь, по условию, почленной дифференцируемостью ТР в числителе, получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos mx &= \frac{d}{dx} \frac{1}{2 \sin 0,5x} \sum_{v=1}^{\infty} A_v \sin(v-0,5)x = \frac{1}{4 \sin^2 0,5x} \times \\ &\times \left[\sin 0,5x \sum_{v=1}^{\infty} A_v (2v-1) \cos(v-0,5)x - \cos 0,5x \sum_{v=1}^{\infty} A_v \sin(v-0,5)x \right], \end{aligned} \quad (1.5)$$

где

$$A_1 = -a_1, \quad A_v = a_{v-1} - a_v, \quad v = 2, 3, \dots \quad (1.6)$$

Отметим, что в (1.5) ТР в числителе сходятся, а знаменатель – отличен от нуля. Значит, производная на Δ существует и конечна.

Вводя теперь синусы и косинусы под знаки суммирования и применяя формулы преобразования произведения синусов и косинусов в сумму, а также объединяя полученные сходящиеся ряды в единый сходящийся ряд, приходим к выражению

$$\frac{d}{dx} \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos mx = \frac{1}{4 \sin^2 0,5x} \sum_{v=1}^{\infty} A_v [(v-1) \sin vx - v \sin(v-1)x]. \quad (1.7)$$

Далее, переходя в (1.7) к частичной сумме под знаком предельного перехода и выполняя с конечным числом слагаемых приведение подобных членов, получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos mx &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{v=1}^N A_v \frac{[(v-1) \sin vx - v \sin(v-1)x]}{(4 \sin^2 0,5x)} = \\ &= \frac{1}{4 \sin^2 0,5x} \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\sum_{v=1}^N A_v (v-1) \sin vx - \sum_{v=1}^N A_v v \sin(v-1)x \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4 \sin^2 0,5x} \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\sum_{v=2}^N A_v (v-1) \sin vx - \sum_{v=1}^{N-1} A_{v+1} (v+1) \sin vx \right] = \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[A_N (N-1) \sin Nx - 2A_2 \sin x + \sum_{v=2}^{N-1} [A_v (v-1) - A_{v+1} (v+1)] \sin vx \right]. \quad (1.8)
\end{aligned}$$

Заметим теперь, что по условию почленно продифференцированный преобразованный ряд сходится на Δ . Поэтому в силу леммы Кантора – Гейне [9]

$$\lim_{N \rightarrow \infty} A_N (N-0,5) = 0,$$

откуда

$$\lim_{N \rightarrow \infty} A_N (N-1) = \lim_{N \rightarrow \infty} [A_N (N-0,5) (1-0,5/(N-0,5))] = 0. \quad (1.9)$$

Следовательно, переходя в (1.8) к сумме пределов с учетом (1.9) и (1.6), приходим к доказательству первой части теоремы

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos mx &= \frac{1}{4 \sin^2 0,5x} \left[(2a_1 - a_2) \sin x - \sum_{v=2}^{\infty} [(v-1) a_{v-1} - 2v a_v + \right. \\
&\quad \left. + (v+1) a_{v+1} + (v+1) a_{v+1}] \sin vx \right]. \quad (1.10)
\end{aligned}$$

Возвращаясь ко второй части теоремы, заметим, что при выполнении дополнительного условия (1.4) формально почленно продифференцированный исходный ТР в (1.10) оказывается связанным с ТР справа тождественным повторным преобразованием Абеля, что следует из необходимых и достаточных условий сходимости ТР Салема [8]. Теорема доказана.

2. О трехкратной почленной дифференцируемости решения Навье

Исследуется решение Навье для прогиба в задаче об изгибе прямоугольной изотропной шарнирно опертой по торцам пластины, нагруженной равномерным внешним давлением по прямоугольной площадке той же ориентации, что и план пластины, на непрерывную частную почленную дифференцируемость под обоими символами суммирования до трех раз.

Названное решение в прямоугольнике пластины $G = [0, a] \times [0, b]$ записывается в виде [1]

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin \lambda_m x \sin \mu_n y,$$

$$\text{где } w_{mn} = B_0 \sin \lambda_m \xi \sin \mu_n \eta \sin \lambda_m \Delta \xi / 2 \sin \mu_n \Delta \eta / 2 / (\lambda_m \mu_n (\lambda_m^2 + \mu_n^2)^2),$$

$$B_0 = 16 P / (D a b \Delta \xi \Delta \eta), \lambda_m = m\pi / a,$$

$$\mu_n = n\pi / b, x, y \in G. \quad (2.1)$$

С применением неравенства (1.1) имеем

$$\begin{aligned}
|w_{mn} \partial^s \sin \lambda_m x / \partial x^s \partial^j \sin \mu_n y / \partial y^j| &\leq B_0 \lambda_m^{s-1} \mu_n^{j-1} / (\lambda_m^2 + \mu_n^2)^2 \leq \\
&\leq B_1 / (\lambda_m^{2\gamma+1-s} \mu_n^{5-2\gamma-j}) = B_1 / (\lambda_m^r \mu_n^{6-s-j-r}), \\
0 \leq \gamma \leq 2, r = 2\gamma + 1 - s, -2 \leq r \leq 5, 0 \leq s + j \leq 3. \quad (2.2)
\end{aligned}$$

Здесь $B_1 > 0$ – некоторая константа.

Оценка (2.2) при $r = 1,5$ приводит к неравенствам

$$\begin{aligned} \left| w_{mn} \partial^s \sin \lambda_m x / \partial x^s \partial^j \sin \mu_n y / \partial y^j \right| &\leq \lambda_m^s \left| w_{mn} \partial^j \sin \mu_n y / \partial y^j \right| \leq \\ &\leq B_0 \lambda_m^{s-1} \mu_n^{j-1} / (\lambda_m^2 + \mu_n^2)^2 \leq B_1 / (\lambda_m^{1.5} \mu_n^{4.5-s-j}), \quad 0 \leq s+j \leq 3. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Откуда

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \partial^s \sin \lambda_m x / \partial x^s \partial^j \sin \mu_n y / \partial y^j \right| &\leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| w_{mn} \partial^s \sin \lambda_m x / \partial x^s \partial^j \sin \mu_n y / \partial y^j \right| \leq \\ &\leq \lambda_m^s \sum_{n=1}^{\infty} \left| w_{mn} \partial^j \sin \mu_n y / \partial y^j \right| \leq B_1 / \lambda_m^{1.5} \sum_{n=1}^{\infty} 1 / \mu_n^{4.5-s-j} < \infty; \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} 1 / \lambda_m^{1.5} \sum_{n=1}^{\infty} 1 / \mu_n^{4.5-s-j} < \infty, \quad 0 \leq s+j \leq 3. \quad (2.5)$$

С использованием (2.3) и (2.4) приходим к утверждениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial^j}{\partial y^j} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \partial^s \sin \lambda_m x / \partial x^s \sin \mu_n y &= \\ = \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \partial^s \sin \lambda_m x / \partial x^s \partial^j \sin \mu_n y / \partial y^j &\subset C[G]; \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{s+j} w(x, y)}{\partial x^s \partial y^j} &= \frac{\partial^{s+j}}{\partial x^s \partial y^j} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin \lambda_m x \sin \mu_n y = \\ = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \partial^s \sin \lambda_m x / \partial x^s \partial^j \sin \mu_n y / \partial y^j &\subset C[G], \quad 0 \leq s+j \leq 3. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Действительно, ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \partial^j \sin \mu_n y / \partial y^j, \quad 0 \leq j \leq 3, \quad y \in [0, b] \quad (2.8)$$

имеют своими общими членами непрерывные функции переменной $y \in [0, b]$ и, что следует из оценок (2.3) и (2.4) при $s = 0$, мажорируются числовыми сходящимися рядами. Поэтому ряды (2.8) сходятся равномерно к непрерывным на $[0, b]$ функциям [10] (признак Вейерштрасса, n^0 430). Таким образом, при $y \in [0, b]$ имеем, что в (2.8) при $j = 0$ ряд сходится, а при $j = 1$ – сходится равномерно. Отсюда, с применением теоремы 7 ([10], n^0 435) приходим к утверждению (2.6) при $j = 1$. Отправляясь далее от равенства (2.6) при $j = 1$ и опираясь на сходимость ряда (2.8) при $j = 1$, а также равномерную сходимость на $[0, b]$ ряда в (2.8) при $j = 2$, приходим с использованием названной теоремы 7 к утверждению (2.6) и при $j = 2$. Если теперь при $j = 2$ воспользоваться равенством (2.6) и сходимостью ряда (2.8), а при $j = 3$ – равномерной сходимостью на $[0, b]$ ряда (2.8), то с применением отмеченной теоремы 7 придем к завершению доказательства утверждения (2.6).

Рассмотрим теперь повторные ряды

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \partial^s \sin \lambda_m x / \partial x^s \partial^j \sin \mu_n y / \partial y^j, \quad x, y \in G, \quad 0 \leq s+j \leq 3, \quad (2.9)$$

как ординарные, в которых производится суммирование по индексу m . Общие члены данных рядов непрерывны в G как произведения непрерывных функций, а сами ряды мажорируются числовыми сходящимися рядами, что следует из (2.6), а также (2.4) и (2.5). Поэтому считая переменную x постоянной, полагая в (2.7) $s = 0, j = 0$ и применяя те же рассуждения, что и при доказательстве (2.6), придем с учетом равенства (2.6) и к утверждению (2.7) при $s = 0$. Пусть теперь фиксирована переменная y . Отправляясь в (2.6) от значений $s = 0, j = 0$, но при $x \in [0, b]$ повторяя рассуждения, примененные при доказательстве (2.6), приходим к утверждению (2.7) при $j = 0$. Аналогично, отправляясь от значения $s = 0$ в (2.7) при каждом $j = 1, 2$, приходим к доказательству (2.7) и при $j = 1, 2$ и прочих значениях i . Утверждение (2.7) доказано полностью.

3. О почленной дифференцируемости ряда решения Навье при вычислении частных производных до четвертого порядка в уравнении равновесия Софи Жермен – Лагранжа

С применением теоремы п.1 исследуется повторный ряд решения Навье для прогиба на частную почленную непрерывную дифференцируемость под обоими символами суммирования при вычислении производных в бигармоническом операторе в уравнении равновесия Софи Жермен – Лагранжа.

Введем обозначения

$$w_{mn}^{(1)} = B_0 / (\lambda_m \mu_n (\lambda_m^2 + \mu_n^2)^2), \chi_n(y) = \sin \mu_n y \sin \mu_n \eta \sin \mu_n \Delta \eta / 2; \quad (3.1)$$

$$\psi_s(l, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}^{(1)} \lambda_m^s \mu_n^{3-s} \chi_n(y) \cos ml, \quad s = 1, 3, \quad (3.2)$$

и исследуем ряды (3.2) на сходимость. С применением (2.3) при $s + j = 3$ и $s = 1, 3$ получаем

$$\left| w_{mn}^{(1)} \lambda_m^s \mu_n^{3-s} \chi_n(y) \cos ml \right| \leq \left| w_{mn}^{(1)} \lambda_m^s \mu_n^{3-s} \right| \leq B_1 / (\lambda_m^{1.5} \mu_n^{1.5}); \quad (3.3)$$

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}^{(1)} \lambda_m^s \mu_n^{3-s} \chi_n(y) \cos ml \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| w_{mn}^{(1)} \lambda_m^s \mu_n^{3-s} \right| \leq B_1 / \lambda_m^{1.5} \sum_{n=1}^{\infty} 1 / \mu_n^{1.5}, \quad s = 1, 3. \quad (3.4)$$

Таким образом, из (3.3) и (3.4) имеем, что каждый из ординарных рядов в повторном ряде (3.2) мажорируется числовым сходящимся рядом. Тогда оба ряда сходятся. Отсюда, подставляя (2.1) и (3.1) в (2.7) и полагая $s = 1, 3$ с применением формул преобразования произведения синусов, а также синуса и косинуса в их сумму и использованием сходимости в (3.2) ординарных рядов, последовательно получаем

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial x^s \partial y^{3-s}} = \\ & = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}^{(1)} \lambda_m^s \mu_n^{3-s} \chi_n(y) [\cos \lambda_m (\xi + \Delta \xi / 2) - \cos \lambda_m (\xi - \Delta \xi / 2)] \cos \lambda_m x = \\ & = \frac{1}{4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}^{(1)} \lambda_m^s \mu_n^{3-s} \chi_n(y) [\cos \lambda_m (x + \xi + \Delta \xi / 2) + \cos \lambda_m (x - \xi - \Delta \xi / 2) - \\ & \quad - \cos \lambda_m (x + \xi - \Delta \xi / 2) - \cos \lambda_m (x - \xi + \Delta \xi / 2)] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}^{(1)} \lambda_m^s \mu_n^{3-s} \chi_n(y) \cos \lambda_m(x + \xi + \Delta\xi/2) + \right. \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}^{(1)} \lambda_m^s \mu_n^{3-s} \chi_n(y) \cos \lambda_m(x - \xi - \Delta\xi/2) - \\
&\quad - \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}^{(1)} \lambda_m^s \mu_n^{3-s} \chi_n(y) \cos \lambda_m(x + \xi - \Delta\xi/2) - \\
&\quad \left. - \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}^{(1)} \lambda_m^s \mu_n^{3-s} \chi_n(y) \cos \lambda_m(x - \xi + \Delta\xi/2) \right] = \\
&= \frac{1}{4} \sum_{i,j=0}^1 (-1)^{i+j} \psi_s(\lambda_1(x + (-1)^i \xi + (-1)^j \Delta\xi/2), y), \quad s = 1, 3. \quad (3.5)
\end{aligned}$$

Исследуем теперь ряды (3.5) на частную почленную непрерывную дифференцируемость по x под обоими символами суммирования. Из геометрических условий данной задачи имеем

$$0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq \xi \pm \Delta\xi/2 \leq a, \quad \Delta\xi > 0. \quad (3.6)$$

Поэтому, вводя на множестве изменения переменной x дополнительные ограничения

$$x \neq \xi \pm \Delta\xi/2, \quad (3.7)$$

что равносильно исключению из областей определения функций $\lambda_1(x - \xi \pm \Delta\xi/2)$ нулей, с учетом неравенств (3.6), (3.7), получаем

$$\lambda_1(x + \xi \pm \Delta\xi/2) \in (0, 2\pi), \quad \lambda_1(x - \xi \pm \Delta\xi/2) \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi]. \quad (3.8)$$

Таким образом, множества значений $L_{(\pm), (\pm)}$ функций $\lambda_1(x \pm \xi \pm \Delta\xi/2)$ переменной $x \in X_{(\pm)} = [0, a] \setminus \{x = \xi \pm \Delta\xi/2\}$ при каждом выборе знака не содержат точек $\pm 2k\pi$, $k = 0, 1, \dots$. Здесь в $L_{(\pm), (\pm)}$ левые знаки соответствуют таковым при ξ , а правые – при $\Delta\xi$. Заметим, что $L_{(\pm), (\pm)}$ как множество значений линейной функции x связано с множеством ее определения $X_{(\pm)}$ взаимнооднозначным соответствием, причем оба множества в зависимости от выбора знаков состоят одновременно из одного или двух непересекающихся промежутков.

Далее из (3.4) следует, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}^{(1)} \lambda_m^s \mu_n^{3-s} \chi_n(y) \cos ml = 0. \quad (3.9)$$

Таким образом, при ограничении (3.7) к ординарным при суммировании по m ТР в четырех повторных рядах в (3.5) допустимо применение преобразование Абеля [8].

Пусть теперь $l \in \Delta$, где Δ – произвольный замкнутый отрезок, принадлежащий одному, но любому из множеств $L_{(\pm), (\pm)}$. Применяя на Δ преобразование Абеля, получаем

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}^{(1)} \lambda_m^s \mu_n^{3-s} \chi_n(y) \cos ml &= -\frac{1}{2 \sin 0,5l} \left[\lambda_1^s \sin l/2 \sum_{n=1}^{\infty} w_{1n}^{(1)} \mu_n^{3-s} \chi_n(y) + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{m=2}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}^{(1)} \lambda_m^s \mu_n^{3-s} \chi_n(y) - \sum_{n=1}^{\infty} w_{m-1,n}^{(1)} \lambda_{m-1}^s \mu_n^{3-s} \chi_n(y) \right) \sin(m-0,5)l \right] =
\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2\sin 0,5l} \left[\lambda_1^s \sin l/2 \sum_{n=1}^{\infty} w_{1n}^{(1)} \mu_n^{3-s} \chi_n(y) + \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn}^{(s)} \chi_n(y) \sin(m-0,5) l \right],$$

$$s = 1, 3, \quad (3.10)$$

$$\text{где} \quad B_{mn}^{(s)} = (\lambda_m^s w_{mn}^{(1)} - \lambda_{m-1}^s w_{m-1,n}^{(1)}) \mu_n^{3-s}. \quad (3.11)$$

Здесь коэффициенты (3.11) преобразуются к виду

$$B_{mn}^{(1)} = B_0 \mu_n ((\lambda_m^2 + \mu_n^2)^{-2} - (\lambda_{m-1}^2 + \mu_n^2)^{-2}) = B_0 \mu_n \lambda_1 (\lambda_1 - 2\lambda_m) \times$$

$$\times [2(\lambda_m^2 + \mu_n^2) + \lambda_1 (\lambda_1 - 2\lambda_m)] (\lambda_{m-1}^2 + \mu_n^2)^{-2} (\lambda_m^2 + \mu_n^2)^{-2}; \quad (3.12)$$

$$B_{mn}^{(3)} = \lambda_m^3 w_{mn}^{(1)} - \lambda_{m-1}^3 w_{m-1,n}^{(1)} = \lambda_m (\lambda_m^2 - \lambda_{m-1}^2) w_{mn}^{(1)} + \lambda_{m-1}^2 (\lambda_m w_{mn}^{(1)} -$$

$$- \lambda_{m-1} w_{m-1,n}^{(1)}) = \lambda_1 \lambda_m \lambda_{2m-1} w_{mn}^{(1)} + \lambda_{m-1}^2 B_{mn}^{(1)} / \mu_n^2. \quad (3.13)$$

Далее с применением неравенств (1.1) и (2.2) для величин (3.12) и (3.13) приходим к оценкам

$$\left| B_{mn}^{(1)} \right| = O(\lambda_m \mu_n (\lambda_m^2 + \mu_n^2)^{-3}) \leq B_2 \lambda_m \mu_n (\lambda_m^2 + \mu_n^2)^{-3} \leq$$

$$\leq B_3 \lambda_m^{1-3\gamma} \mu_n^{3\gamma-5} \Big|_{\gamma=7/6} = B_3 / \lambda_m^{2,5} \mu_n^{1,5}; \quad (3.14)$$

$$\left| B_{mn}^{(3)} \right| = \left| \lambda_1 \lambda_m \lambda_{2m-1} w_{mn}^{(1)} + \lambda_{m-1}^2 B_{mn}^{(1)} \mu_n^{-2} \right| \leq 2\lambda_1 \lambda_m^2 w_{mn}^{(1)} + \lambda_m^2 \left| B_{mn}^{(1)} \right| \mu_n^{-2} \leq$$

$$\leq 2\lambda_1 B_1 \lambda_m^{1-2\gamma} \mu_n^{5-2\gamma} \Big|_{\gamma=7/4} + B_3 \lambda_m^{3-3\gamma} \mu_n^{3\gamma-7} \Big|_{\gamma=11/6} = (2\lambda_1 B_1 + B_3) / \lambda_m^{2,5} \mu_n^{1,5}, \quad (3.15)$$

где $B_2, B_3 > 0$ – некоторые константы.

Таким образом, при $s = 1, 3$ каждый ординарный ряд в повторном в числителе (3.10), где производится суммирование по индексу n , имеет своим общим членом непрерывные функции переменной y и, с учетом (3.14) и (3.15), мажорируется числовым сходящимся рядом на отрезке $[0, b]$. Тогда каждый из них сходится равномерно [11] (признак Вейерштрасса, $n^0 430$) к непрерывной на $[0, b]$ функции переменной y . Но при $s = 1, 3$ и каждый ординарный ряд в том же повторном ряде, образованный суммированием по индексу m , а также ряд, полученный его формальным почленным частным дифференцированием по l , составлены суммированием по m непрерывных как произведение двух непрерывных функций функций переменной $l \in \Delta$ и переменной $y \in [0, b]$ функций, а также с учетом (3.14), (3.15) мажорируется числовым сходящимся рядом. Поэтому и названные ряды сходятся равномерно к непрерывным на $\Delta \times [0, b]$ функциям l и y [10] (признак Вейерштрасса, $n^0 430$) и, в силу теоремы 7 ([11], $n^0 435$), имеет место равенство

$$\frac{\partial}{\partial l} \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn}^{(s)} \chi_n(y) \sin(m-0,5)l = \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn}^{(s)} \chi_n(y) \frac{\sin(m-0,5)l}{\partial l} =$$

$$C[\Delta \times [0, b]], \quad s = 1, 3. \quad (3.16)$$

Очевидно и произведение в (3.10) $\sin l/2$ на ординарный ТР – непрерывную функцию переменной y непрерывно дифференцируется по l . Тогда числитель в (3.10), рассматриваемый как ординарный ряд в повторном, образованный суммированием по индексу $m = 1, 2, \dots$, почленно непрерывно дифференцируется по l . Кроме того, с использованием (3.4) приходим к неравенствам

$$\left| -\sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}^{(1)} m \lambda_m^s \mu_n^{3-s} \chi_n(y) \sin ml \right| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left| w_{mn}^{(1)} \lambda_m^{s+1} \mu_n^{3-s} \right| \right) / \lambda_1 \leq \\ \leq B_1 / \left(\lambda_1 \lambda_m^{0.5} \right) \sum_{n=1}^{\infty} 1 / \mu_n^{1.5}, \quad s = 1, 3.$$

$$\text{Откуда} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \left(-\sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}^{(1)} m \lambda_m^s \mu_n^{3-s} \chi_n(y) \sin ml \right) = 0, \quad s = 1, 3. \quad (3.17)$$

Таким образом, ординарный ряд в повторном ряду в (3.10), где $m = 1, 2, \dots$, удовлетворяет всем условиям теоремы в п.1. Следовательно,

$$\frac{\partial \Psi_s(l, y)}{\partial l} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}^{(1)} \lambda_m^s \mu_n^{3-s} \chi_n(y) \frac{\partial \cos ml}{\partial l} \subset C[\Delta \times [0, b]], \quad s = 1, 3. \quad (3.18)$$

Здесь непрерывная дифференцируемость функции $\Psi_s(l, y)$ вытекает из прежде доказанной непрерывной дифференцируемости числителя и непрерывности производной знаменателя алгебраической дроби (3.10).

Утверждение (3.18) доказано для значений $(l, y) \in \Delta \times [0, b]$ при любом $\Delta \subset L_{(\pm), (\pm)}$ и каждом из множеств $L_{(\pm), (\pm)}$. Покажем теперь, что оно остается верным и при $(l, y) \in L_{(\pm), (\pm)} \times [0, b]$. Действительно, пусть l_0 – произвольная точка из заранее выбранного одного, но любого из множеств $L_{(\pm), (\pm)}$. Каждое из $L_{(\pm), (\pm)}$ в зависимости от выбора знаков состоит из одного или двух непересекающихся промежутков. Поэтому l_0 принадлежит промежутку. Но тогда найдется отрезок Δ_0 , такой, что $l_0 \in \Delta_0$, и одновременно Δ_0 содержится в том же промежутке, что и l_0 . Заметим, что на множестве $\Delta_0 \times [0, b]$ утверждение (3.18) по доказанному верно. Значит оно верно и при $(l_0, y) \in \Delta_0 \times [0, b]$. Но (l_0, y) – произвольная точка из одного, но любого заранее выбранного множества из множеств $L_{(\pm), (\pm)} \times [0, b]$. Следовательно, оно остается верным и в нем. Так как выбранное множество – любое, то (3.18) верно и в каждом из множеств $L_{(\pm), (\pm)} \times [0, b]$. Что и требовалось доказать.

Докажем теперь, что в повторном ряду в (3.18) на любом из множеств $L_{(\pm), (\pm)} \times [0, b]$ допустимо изменение порядка суммирования. Так как множество $L_{(\pm), (\pm)}$ не содержит точек $\pm 2k\pi$, $k = 0, 1, \dots$, и одновременно выполняется равенство (3.17), то к ординарному ТР с индексом суммирования m в повторном ряду (3.18) допустимо применение преобразования Абеля [9]. Применяя данное преобразование, получаем

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}^{(1)} \lambda_m^s \mu_n^{3-s} \chi_n(y) \frac{\partial \cos ml}{\partial l} = \\ = -\frac{1}{2\lambda_1 \sin l/2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} w_{1n}^{(1)} \lambda_1^{s+1} \mu_n^{3-s} \chi_n(y) \cos l/2 + \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn}^{(s+1)} \mu_n \chi_n(y) \cos (m-1/2)l \right], \\ s = 1, 3. \quad (3.19)$$

Здесь

$$B_{mn}^{(s+1)} \mu_n = (\lambda_m^{s+1} w_{mn}^{(1)} - \lambda_{m-1}^{s+1} w_{m-1,n}^{(1)}) \mu_n^{3-s} = \\ = [(\lambda_m^{s+1} w_{mn}^{(1)} - \lambda_{m-1}^s \lambda_m w_{mn}^{(1)}) + (\lambda_{m-1} \lambda_m^s w_{mn}^{(1)} - \lambda_{m-1}^{s+1} w_{m-1,n}^{(1)})] \mu_n^{3-s} = \\ = \lambda_1 \lambda_m^s w_{mn}^{(1)} \mu_n^{3-s} + \lambda_{m-1} B_{mn}^{(s)}. \quad (3.20)$$

Далее с использованием (3.3), (3.14) и (3.15) оценим величину общего члена повторного ряда в (3.19):

$$\begin{aligned} \left| B_{mn}^{(s+1)} \mu_n \chi_n(y) \cos(m-1/2)l \right| &\leq \left| B_{mn}^{(s+1)} \mu_n \right| \leq \lambda_1 \lambda_m^s w_{mn}^{(1)} \mu_n^{3-s} + \lambda_m \left| B_{mn}^{(s)} \right| \leq \\ &\leq (3\lambda_1 B_1 + B_3) / \lambda_m^{1.5} \mu_n^{1.5}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Значит, замена общего члена в повторном ряду в (3.19) их абсолютными величинами приводит к сходящемуся ряду. Поэтому в силу теоремы 3 ([10], n^0 393) в повторном ряду в (3.19) справа допустима перестановка порядка суммирования. Кроме того, с учетом (3.3) имеем

$$\left| m w_{mn}^{(1)} \lambda_m^s \mu_n^{3-s} \chi_n(y) \right| \leq B_1 / (\lambda_1 \lambda_m^{0.5} \mu_n^{1.5}),$$

откуда
$$\lim_{m \rightarrow \infty} m w_{mn}^{(1)} \lambda_m^s \mu_n^{3-s} \chi_n(y) = 0, \quad (3.22)$$

что позволяет применить преобразование Абеля [8] к ординарному ТР с индексом суммирования $m = 1, 2, \dots$ в повторном ряду (3.19), если в последнем изменить порядок суммирования на обратный и объединить оба сходящихся ряда с индексом суммирования n в единый сходящийся ряд. Выполняя данные преобразования, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_s(l, y)}{\partial l} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} w_{mn}^{(1)} \lambda_m^s \mu_n^{3-s} \chi_n(y) \frac{\partial \cos ml}{\partial l} \subset C[L_{(\pm), (\pm)} \times [0, b]], \\ s &= 1, 3. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Далее равенство (3.5) дифференцируется по $x \in X_{(\pm)}$, причем в правой части, в силу существования производных каждого из четырех рядов, переходим от дифференцирования суммы рядов к сумме производных от рядов. Дифференцируя теперь каждый ряд как сложную функцию переменной l , соответственно полагая $l = \lambda_1(x \pm \xi \pm \Delta \xi / 2)$, используем равенство (3.18) на $L_{(\pm), (\pm)} \times [0, b]$. Затем последовательно вводим символ конечного суммирования по индексам i и j под символы бесконечных сумм сначала с индексом m , а затем и n . Данные действия допустимы ввиду сходимости каждого из ординарных бесконечных рядов как рядов, образующих сходящийся повторный ряд. В итоге имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^{s+1} \partial y^{3-s}} &= \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x} \sum_{i,j=0}^1 (-1)^{i+j} \psi_s(\lambda_1(x + (-1)^i \xi + (-1)^j \Delta \xi / 2), y) = \frac{1}{4} \sum_{i,j=0}^1 (-1)^{i+j} \times \\ &\times \left. \frac{\partial}{\partial l} \psi_s(l) \right|_{l = \lambda_1(x + (-1)^i \xi + (-1)^j \Delta \xi / 2)} \frac{\partial}{\partial x} \lambda_1(x + (-1)^i \xi + (-1)^j \Delta \xi / 2) = \\ &= \frac{1}{4} \sum_{i,j=0}^1 (-1)^{i+j} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}^{(1)} \lambda_m^s \mu_n^{3-s} \chi_n(y) \frac{\partial}{\partial x} \cos \lambda_m(x + (-1)^i \xi + (-1)^j \Delta \xi / 2) = \\ &= \frac{1}{4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i,j=0}^1 (-1)^{i+j} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}^{(1)} \lambda_m^s \mu_n^{3-s} \chi_n(y) \frac{\partial}{\partial x} \cos \lambda_m(x + (-1)^i \xi + (-1)^j \Delta \xi / 2) = \\ &= \frac{1}{4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i,j=0}^1 (-1)^{i+j} w_{mn}^{(1)} \lambda_m^s \mu_n^{3-s} \chi_n(y) \frac{\partial}{\partial x} \cos \lambda_m(x + (-1)^i \xi + (-1)^j \Delta \xi / 2) = \\ &= - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}^{(1)} \lambda_m^s \mu_n^{3-s} \chi_n(y) \frac{\partial \cos \lambda_m x}{\partial x} \sin \lambda_m \xi \sin \lambda_m \Delta \xi / 2 = \end{aligned}$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \frac{\partial^{s+1} \sin \lambda_m x}{\partial x^{s+1}} \frac{\partial^{3-s} \sin \mu_n y}{\partial y^{3-s}} \subset C [G \setminus \{x = \xi \pm \Delta \xi / 2\}], \quad s = 1, 3. \quad (3.24)$$

Здесь мы использовали (3.18). Если же воспользоваться (3.23), то аналогично получаем

$$\frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^{s+1} \partial y^{3-s}} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} w_{mn} \frac{\partial^{s+1} \sin \lambda_n x}{\partial x^{s+1}} \frac{\partial^{3-s} \sin \mu_m y}{\partial y^{3-s}} \subset C [G \setminus \{x = \xi \pm \Delta \xi / 2\}],$$

$$s = 1, 3. \quad (3.25)$$

Заметим теперь, что и в исходном повторном ряду (2.1) допустима перестановка порядка суммирования, ибо ряд, составленный из модулей его общего члена, сходится, что следует из (2.3) при $s = j = 0$. Выполняя названную перестановку и повторяя рассуждения с точностью до обозначений, вместо (3.25) будем иметь

$$\frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^{3-s} \partial y^{s+1}} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \frac{\partial^{s+1} \sin \lambda_m x}{\partial y^{s+1}} \frac{\partial^{3-s} \sin \mu_n y}{\partial y^{3-s}} \subset C [G \setminus \{y = \eta \pm \Delta \eta / 2\}],$$

$$s = 1, 3. \quad (3.26)$$

Здесь мы также переставили порядок дифференцирования с учетом непрерывности производных.

Таким образом, согласно (3.24) и (3.25), все частные производные, входящие в уравнение равновесия Софи Жермен – Лагранжа, рассматриваемые в совокупности, непрерывны на множестве

$$E = (G \setminus \{x = \xi \pm \Delta \xi / 2\}) \cap (G \setminus \{y = \eta \pm \Delta \eta / 2\}) =$$

$$= G \setminus (\{x = \xi \pm \Delta \xi / 2\} \cup \{y = \eta \pm \Delta \eta / 2\}) \quad (3.27)$$

и вычлняются почленным дифференцированием решения Навье (2.1) для прогиба под обоими символами суммирования.

Подставляя теперь повторные ряды (3.25) и (3.26) в уравнение Софи Жермен – Лагранжа и используя в них, а также в повторном ряду для нагрузки сходимость ординарных рядов с индексом суммирования m и n , объединяем прежде всего, слева в уравнении, все четыре ряда в единый сходящийся ординарный ряд с индексом суммирования m . Данный ряд содержит в качестве общего члена сумму четырех прежних сходящихся ординарных рядов с индексом n . Поэтому, объединяя под индексом суммирования n и названные ряды в единый сходящийся ряд, приходим на множестве E к уравнению, содержащему в левой части повторный ряд с нулевыми коэффициентами, а справа – нуль, что обращает уравнение в тождество.

Таким образом, решение Навье с применением разработанных нами средств методического характера из классической теории функций обосновано.

4. Об улучшении вычислительной способности решения Навье

Здесь автор настоящей работы, как и прежде в случае сосредоточенной нагрузки [3] – [5], ограничиваясь лишь повторными ТР, утверждает, что названные ряды – чаще уже полученные решения – могут стать весьма эффективным средством вычислений их сумм, если их предварительно преобразовать по предложенной им методике в быстросходящиеся ряды. В названной методике распространяется высокоэффективный метод А. Даду [12, 13] (n крат примененное преобразование Абеля), предназначенный для ускорения сходимости ординарных ТР,

на повторные ТР. В итоге полученное преобразование – точное аналитическое преобразование, которое сохраняет силу при произвольной нагрузке, в частности локально-распределенной. Его же вычислительная эффективность обосновывается как аналитическими оценками коэффициентов полученных рядов, так и вариантами вычисления при различных значениях n с взаимным сравнением результатов.

С использованием известных формул для перерезывающих сил [1] и (2.7), (1.1), имеем

$$\begin{aligned} N_x = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) &= \frac{16P}{ab \Delta \xi \Delta \eta} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} d_{mn} \chi_n(y) \cos \lambda_m x \sin \lambda_m \xi \sin \lambda_m \Delta \xi / 2 = \\ &= - \frac{4P}{ab \Delta \xi \Delta \eta} \sum_{i,j=0}^1 (-1)^{i+j} \psi(\lambda_1(x + (-1)^i \xi + (-1)^j \Delta \xi / 2, y)), \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \text{где} \quad d_{mn} &= 1 / (\mu_n (\lambda_m^2 + \mu_n^2)), \quad 0 < d_{mn} \leq B_4 / (\lambda_m^\gamma \mu_n^{3-\gamma}) \Big|_{\gamma=2-\theta} = \\ &= B_4 / (\lambda_m^{2-\theta} \mu_n^{1+\theta}), \quad 0 \leq \theta \leq 2, \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\psi(l, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} d_{mn} \chi_n(y) \cos ml. \quad (4.3)$$

Здесь B_4 – некоторая константа.

Выражение (4.1) получено с использованием сходимости рядов (2.7), а также ряда (4.3), которая устанавливается с использованием оценки (4.2).

Далее преобразуем (4.3) с применением одно- и двукратного преобразования Абеля. Названные преобразования допустимы, так как

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{\infty} d_{mn} \chi_n(y) \cos ml \right| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |d_{mn} \chi_n(y) \cos ml| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |d_{mn}| \leq \\ &\leq B_4 / \lambda_m^{1.5} \sum_{n=1}^{\infty} 1 / \mu_n^{1.5} < \infty. \end{aligned}$$

$$\text{Откуда} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} d_{mn} \chi_n(y) \cos ml = 0. \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \text{Поэтому} \quad \psi(l, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} d_{mn} \chi_n(y) \cos ml = \\ &= \frac{1}{2} \left[- \sum_{n=1}^{\infty} d_{1n} \chi_n(y) + \frac{1}{\sin l/2} \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} d_{mn}^{(1)} \chi_n(y) \sin(m-1/2)l \right] = - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} d_{1n} \chi_n(y) + \\ &\quad + \frac{1}{4 \sin^2 l/2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} d_{2n} \chi_n(y) \cos l + \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} d_{mn}^{(2)} \chi_n(y) \cos ml \right], \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\text{где} \quad d_{mn}^{(1)} = d_{m-1,n} - d_{mn} = \lambda_1 (2\lambda_m - \lambda_1) / (\mu_n (\lambda_{m-1}^2 + \mu_n^2) (\lambda_m^2 + \mu_n^2)), \quad (4.6)$$

$$d_{mn}^{(2)} = -d_{m+1,n} + 2d_{mn} - d_{m-1,n} = 2\lambda_1^2 (\mu_n^2 - 3\lambda_m^2 + \lambda_1^2) / \\ / (\mu_n (\lambda_{m-1}^2 + \mu_n^2) (\lambda_m^2 + \mu_n^2) (\lambda_{m+1}^2 + \mu_n^2)). \quad (4.7)$$

Здесь применение неравенства (1.1) приводит к оценкам

$$0 < d_{mn}^{(1)} = O\left(\lambda_m / (\mu_n (\lambda_m^2 + \mu_n^2))\right) \leq B_5 / (\lambda_m^{2\gamma-1} \mu_n^{5-2\gamma}) \Big]_{\gamma=(4-\delta)/2} = \\ = B_5 / (\lambda_m^{3-\delta} \mu_n^{1+\delta}); \quad (4.8)$$

$$\left| d_{mn}^{(2)} \right| \leq O\left(\lambda_m / (\mu_n (\lambda_m^2 + \mu_n^2)^2)\right) \leq B_6 / (\lambda_m^{2\gamma} \mu_n^{5-2\gamma}) \Big]_{\gamma=(4-\delta)/2} = \\ = B_6 / (\lambda_m^{4-\delta} \mu_n^{1+\delta}), 0 \leq \delta \leq 4. \quad (4.9)$$

Сравнение оценок (4.2), (4.8) и (4.9) показывает, что при первоначальном применении преобразования Абеля улучшается сходимость каждого из ординарных рядов в повторном ряду в (4.5), при повторном же применении названного преобразования улучшается сходимость лишь ординарного ряда в повторном с индексом суммирования m .

Аналогичные результаты в силу симметрии выражения (2.1) получаются и для N_y перестановкой в (4.1) – (4.9) символов x и y , a и b , ξ и η , $\Delta\xi$ и $\Delta\eta$.

Далее приводятся численные результаты вычислений безразмерных перерезывающих сил $\tilde{N}_x = N_x a / P$, $\tilde{N}_y = N_y a / P$. Расчеты производились при локальной нагрузке как без ускорения сходимости по формуле (4.1), так и с ускорением сходимости с применением формул (4.5) при неизменных значениях следующих параметров:

$$x/a = 0,49; \quad y/b = \xi/a = \eta/b = 0,5; \quad \Delta\xi/a = \Delta\eta/a = 0,005. \quad (4.10)$$

В таблице при различных принятых значениях b/a содержатся результаты расчета безразмерной перерезывающей силы $\tilde{N}_x$.

b/a	$\tilde{N}_x$				$\tilde{N}_x / \tilde{N}_x^{(III)}$		
	I	II	III	IV	I	II	IV
1,0	17,6	15,6	15,8	15,9	1,11	0,99	1,01
1,1	17,6	15,6	15,8	15,9	1,11	0,99	1,01
1,2	17,5	15,6	15,8	15,8	1,11	0,99	1,00
1,4	17,4	15,6	15,8	15,8	1,10	0,99	1,00
1,6	17,3	15,6	15,8	15,8	1,09	0,99	1,00
1,8	17,1	15,6	15,8	15,8	1,08	0,99	1,00
2,0	17,0	15,6	15,7	15,7	1,08	0,99	1,00
3,0	16,1	15,1	15,2	15,2	1,06	0,99	1,00
5,0	14,0	13,4	13,5	13,5	1,04	0,99	1,00

В левой части таблицы в первом столбце приводятся значения, полученные без ускорения сходимости, во втором же и в третьем – с ускорением сходимости одно- и двукратными преобразованиями Абеля, а в четвертом – расчет при сосредоточенной нагрузке, полученный в [6] с применением трехкратного преобразования Абеля. Для сравнения результатов в правой части таблицы приводится отношение соответственных численных значений в столбцах I, II, IV к таковым, приведенным в столбце III. Сравнительный анализ показывает, что расчет без ускорения сходимости может привести к погрешностям, превосходящим точность классической теории пластин: относительная ошибка достигает 11 %. Примене-

ние же одно – и двукратного преобразования Абеля приводит к значениям, близким к таковым, полученным при сосредоточенной нагрузке: здесь разность относительных ошибок не превосходит 2 %.

Расчет же $\tilde{N}_y$ при тех же значениях параметров во всех вышеупомянутых вариантах вычислений, связанных как с ускорением, так и без ускорения сходимости, показал, что порядок их величины не превышает 10^{-14} , что объясняется симметричным расположением нагрузки относительно оси ОХ и вычислением значений $\tilde{N}_y$ в плоскости ХОZ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки: Пер. с англ. М.: Физматгиз, 1963. 635 с.
2. Сейранян С.П. Об обосновании одного решения Навье // Актуальные проблемы механики сплошной среды: Труды Международной конференции, посвященной 95-летию акад. НАН РА Н.Х. Арутюняна, г. Цахкадзор (Армения), 25 – 28 сентября, 2007. С. 391 – 395.
3. Лукаевич С. Локальные нагрузки в пластинах и оболочках: Пер. с англ. и польск. М.: Мир, 1982. 542 с.
4. Сейранян С.П. К решению В.З. Власова задачи изгиба прямоугольных в плане моментных пологих оболочек поперечной силой // Композиционные материалы и оптимальное проектирование: Тез. докл. Международной конференции. г. Агавнадзор, 25 – 28 сентября. Ереван: Гитутюн, 2006. С. 56 – 57.
5. Сейранян С.П. К задаче об изгибе прямоугольной пластины поперечной силой // Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред: V Международная конференция, г. Горис, 1 – 5 октября. Ереван: Гитутюн, 2005. С. 314 – 318.
6. Сейранян С.П. Об ускорении сходимости в задаче об изгибе прямоугольной пластины поперечной силой // Избранные вопросы теории упругости, пластичности и ползучести: Сб. статей, посвященный 75-летию акад. НАН РА М.А. Задоян. Ереван: Гитутюн, 2006. С. 266 – 273.
7. Беккенбах Э., Беллман Р. Введение в неравенства. М.: Мир, 1965. 165 с.
8. Salem R. Essair sur les séries trigonométriques // Actual. Sci. Industr. № 862. Paris, 1940.
9. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1970. Т. 3. 656 с.
10. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Физматгиз, 1959. Т. 2. 807 с.
11. Dadu A. Une méthode d'accélération de la convergence des séries trigonométriques // Mathematica – Revue d'Analyse Numérique et de Théorie de l'Approximation. 1980. Т. 9. № 1. Р. 27 – 33.
12. James E. Kiefer, George H. Weiss. A comparison of two methods for accelerating the convergence of Fourier series // Comput. Math. Appls. 1981. V. 7. No. 6. P. 527 – 535.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

СЕЙРАНЯН Сурен Паруйрович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института механики Национальной академии наук Республики Армения. E-mail: seysuren@yahoo.com

Статья принята в печать 19.11.2008 г.