

## МАТЕМАТИКА

УДК 515.12

В.Р. Лазарев

О НЕКОТОРЫХ ОТНОШЕНИЯХ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ  
НА КЛАССЕ ТИХОНОВСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Предложен метод, порождающий отношения эквивалентности на классе тихоновских пространств. Показано, что известные отношения  $l$ -,  $u$ - и  $t$ -эквивалентности являются частными случаями отношений, порожденных данным методом. Приведены новые примеры отношений эквивалентности, сохраняющих компактность, число Линделёфа и размерность.

**Ключевые слова:** пространство непрерывных функций,  $l$ -эквивалентность,  $t$ -эквивалентность.

Всюду ниже символом  $C_p(X)$  обозначается пространство непрерывных вещественнозначных функций с топологией поточечной сходимости, заданных на тихоновском топологическом пространстве  $X$ . Последнее же именуется топологическим пространством, или просто пространством.

Топологические пространства вида  $C_p(X)$  служат предметом изучения так называемой  $C_p$ -теории.

Один из основных её разделов занимается вопросом о том, насколько сходными обязаны быть свойства пространств  $X$ ,  $Y$ , если  $C_p(X)$ ,  $C_p(Y)$  линейно гомеоморфны, равномерно гомеоморфны, или гомеоморфны (в этих случаях говорят, что  $X$ ,  $Y$  являются  $l$ -,  $u$ - или  $t$ -эквивалентными и кратко пишут  $X \sim^l Y$ ,  $X \sim^u Y$ ,  $X \sim^t Y$  соответственно). Оказывается, что эти наиболее активно изучаемые ситуации можно рассмотреть с некоторой единой точки зрения.

А именно, каждый гомеоморфизм  $h: C_p(X) \rightarrow C_p(Y)$  со свойством  $h(O_X) = O_Y$ , где  $O_X$ ,  $O_Y$  – тождественно нулевые функции на  $X$ ,  $Y$  соответственно, задаёт двойственное отображение  $h^*: C_p^0 C_p(Y) \rightarrow C_p^0 C_p(X)$  между пространствами непрерывных функций на  $C_p(Y)$ ,  $C_p(X)$ , равных нулю в точках  $O_Y$ ,  $O_X$  соответственно. Элементы пространств  $C_p^0 C_p(X)$ ,  $C_p^0 C_p(Y)$  мы далее называем функционалами. Через  $L_p(X)$ ,  $U_p(X)$  обозначаются пространства линейных, соответственно равномерно непрерывных функционалов на  $C_p(X)$ . Отображение  $h^*$  действует по правилу  $(h^*(f))(\varphi) = f(h(\varphi))$ ,  $\varphi \in C_p(X)$ . Оно линейно и мультипликативно.

**Определение 1.** Пусть  $E \subset C_p^0 C_p(X)$ ,  $F \subset C_p^0 C_p(Y)$ . Скажем, что гомеоморфизм  $h$  имеет тип  $(E; F)$ , если  $h^*(Y) \subset E$ ,  $(h^*)^{-1}(X) \subset F$ .

**Замечание.** Понятно, что если гомеоморфизм  $h: C_p(X) \rightarrow C_p(Y)$  имеет тип  $(E; F)$  и  $E \subset E_1$ ,  $F \subset F_1$ , то  $h$  имеет тип  $(E_1; F_1)$ .

Примерами гомеоморфизмов типа  $(E; F)$  могут служить широко изучаемые линейные, равномерные и общие гомеоморфизмы пространств непрерывных функций.

**Теорема 1.** Пусть  $h: C_p(X) \rightarrow C_p(Y)$  – гомеоморфизм типа  $(E; F)$ . Тогда

(а)  $E = X, F = Y$ , если и только если  $X \sim Y$ ,

(б)  $E = L_p(X), F = L_p(Y)$ , если и только если  $X \overset{l}{\sim} Y$ ,

(в)  $E = U_p(X), F = U_p(Y)$  если и только если  $X \overset{u}{\sim} Y$ ,

(г)  $E = C_p^0 C_p(X), F = C_p^0 C_p(Y)$ , если и только если  $X \overset{l}{\sim} Y$ .

**Доказательство.** Во всех четырёх пунктах очевидна достаточность указанных эквивалентностей. Покажем их необходимость.

(а) По определению гомеоморфизма типа  $(E; F)$ , имеем  $h^*(Y) \subset X, (h^*)^{-1}(X) \subset Y$ . Следовательно,  $h^*(Y) = X$ .

(б) В силу линейности отображения  $h^*$ , из  $h^*(Y) \subset L_p(X)$  следует  $h^*(L_p(Y)) \subset L_p(X)$ . Аналогично,

$(h^*)^{-1}(L_p(X)) \subset L_p(Y)$ . Таким образом,  $L_p(X)$  и  $L_p(Y)$  линейно гомеоморфны, что по следствию 0.5.12. из [1] означает, что  $X \overset{l}{\sim} Y$ .

(в) Покажем, что отображение  $h$  равномерно непрерывно. Зафиксируем произвольную окрестность  $W = W(O_Y, K, \varepsilon)$  точки  $O_Y \in C_p(Y)$ . Здесь  $\varepsilon > 0, K = (y_1, \dots, y_n) \subset Y$ . Так как  $h$  типа  $(U_p(X); U_p(Y))$ , то  $h^*(K) \subset U_p(X)$ . Поэтому для каждого  $y_i$  существует  $\delta_i > 0$  и конечное множество  $K_i \subset X$ , такое, что если  $\varphi, \psi \in C_p(X)$  и  $|\varphi - \psi| \in V = V(O_X, K_i, \delta_i)$ , то  $|(h^* y_i)(\varphi) - (h^* y_i)(\psi)| < \varepsilon$ . Положим  $\delta_0 = \min(\delta_1, \dots, \delta_n), K_0 = K_1 \cup \dots \cup K_n, V_0 = V_0(O_X, K_0, \delta_0)$ , и пусть  $\varphi, \psi \in C_p(X)$  такие, что  $|\varphi - \psi| \in V_0$ . Тогда при каждом  $i, 1 \leq i \leq n$ , выполнено  $|(h^* y_i)(\varphi) - (h^* y_i)(\psi)| = |y_i(h(\varphi)) - y_i(h(\psi))| = |h(\varphi) - h(\psi)|(y_i) < \varepsilon$ , то есть  $|h(\varphi) - h(\psi)| \in W$ . Это и означает, что отображение  $h$  равномерно непрерывно. Рассуждая симметричным образом, можно доказать, что и отображение  $h^{-1}$  равномерно непрерывно. Это завершает доказательство пункта (в).

Справедливость (г) очевидна. ■

Приведём ещё два заслуживающих внимания примера конкретного выбора подмножеств  $E, F$ .

**Пример 1.** Пусть  $\xi$  – линейный функционал на  $C_p(X), n \in \mathbb{N}$ . Степенным функционалом (степени  $n$ ) назовём функционал  $\xi^n$ , действующий по правилу  $\xi^n(\varphi) = (\xi(\varphi))^n$ . Если  $\xi_1, \dots, \xi_m$  – линейные функционалы с дизъюнктными носителями, то функционал вида  $p = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} \xi_i^j$ , где все  $a_{ij}$  из  $\mathbf{R}$ , назовём многочленом.

Множество всех многочленов будем обозначать через  $M_p(X)$ .

Очевидно, что при  $n = 1$  мы получим обычные линейные функционалы, так что  $L_p(X) \subset M_p(X)$ .

Каждому многочлену  $p$  можно естественным образом поставить в соответствие конечное множество  $\text{supp } p = \bigcup_{i=1}^m \text{supp } \xi_i$ , которое уместно называть носителем многочлена  $p$ .

**Пример 2.** Функционал  $d: C_p(X) \rightarrow \mathbf{R}$  вида  $d = x_1^{n_1} \cdot \dots \cdot x_k^{n_k}$ , действующий по праву  $d(\varphi) = \prod_{i=1}^k (\varphi(x_i))^{n_i}$ , где  $x_i \in X$ ,  $n_i \in \mathbf{N}$  при всех  $i$  от 1 до  $k$ , назовём мономом.

Множество всех мономов обозначим через  $D_p(X)$ .

Аналогично примеру 1, для каждого монома также можно определить носитель:  $\text{supp} d = \{x_1, \dots, x_k\}$ .

Пусть теперь  $h: C_p(X) \rightarrow C_p(Y)$  – гомеоморфизм типа  $(E; F)$ , где  $(E; F) = (M_p(X); M_p(Y))$  или  $(E; F) = (D_p(X); D_p(Y))$ . В обоих случаях определены конечнозначные отображения  $S_M: Y \rightarrow X$ ,  $S_M(y) = \text{supp} h^* y$ ,  $T_M: X \rightarrow Y$ ,  $T_M(x) = \text{supp}(h^*)^{-1} x$  и соответственно  $S_D: Y \rightarrow X$ ,  $T_D: X \rightarrow Y$ , задаваемые аналогично. Для первого из указанных случаев введём множества  $X^{\leq n} = \{x \in X; |T_M(x)| \leq n\}$ ,  $X^n = X^{\leq n+1} \setminus X^{\leq n}$  и симметрично определяемые множества  $Y^{\leq n}$ ,  $Y^n$  для всех  $n \in \mathbf{N}$ .

Ниже мы формулируем несколько утверждений (лемма 1, следствия 1 – 4) относительно свойств отображения  $S_M$ . Понятно, что в силу равноправного положения отображений  $S_M$  и  $T_M$  последнее обладает теми же свойствами. Доказательства этих утверждений можно найти в статье [2] (лемма 2 и следствия из неё).

**Лемма 1.** Пусть  $y \in Y$ ,  $|S_M(y)| = k(y)$ ,  $\{U_1, \dots, U_{k(y)}\}$  – произвольная дизъюнктная система окрестностей точек из  $S_M(y)$ . Тогда у точки  $y$  найдется окрестность  $V_y$ , целиком состоящая из точек  $z$ , для которых  $S_M(z) \cap U_i \neq \emptyset$  для всех  $i = 1, \dots, k(y)$ .

**Следствие 1.** Отображение  $S_M$  полунепрерывно снизу.

**Следствие 2.** Отображение  $S_M: Y^n \rightarrow X$  полунепрерывно сверху при любом  $n \in \mathbf{N}$ .

**Следствие 3.**  $Y^{\leq n}$  замкнуто в  $Y$  при любом  $n \in \mathbf{N}$ .

**Следствие 4.** Если  $y \in Y$ , то  $y \in \bigcup \{T_M(x); x \in S_M(y)\}$ . В частности, отображение  $S_M$  сюръективно.

Формулируемая ниже теорема обобщает теорему статьи [2], поскольку введённое в [2] множество  $M_p(X)$  уже, чем  $D_p(X)$ , определённое выше. (Многочлены из примера 1 являются линейными комбинациями полиномов с дизъюнктивными носителями из статьи [2].)

**Теорема 2.** Если  $X, Y$  – пространства со счётной базой, а  $h: C_p(X) \rightarrow C_p(Y)$  – гомеоморфизм типа  $(M_p(X); M_p(Y))$ , то  $\dim X = \dim Y$ .

**Лемма 2.** Отображения  $S_D$  и  $T_D$  сюръективны и полунепрерывны сверху.

**Доказательство.** Ясно, что достаточно доказать утверждение для  $S_D$ . Сюръективность можно доказать так же как следствие 5 в статье [2]. Докажем, что  $S_D$  полунепрерывно сверху. Пусть  $y \in Y$  и  $G$  – открытое в  $X$  множество, содержащее  $S_D(y) = \{x_1, \dots, x_k\}$ . Пусть  $U$  – окрестность множества  $S_D(y)$ , содержащаяся в  $G$ . Пусть, далее, функция  $\varphi \in C_p(X)$  такова, что  $\varphi(x_1) = \dots = \varphi(x_k) = 1$  и  $\varphi$  тождественно равна нулю вне  $U$ . Рассмотрим  $V = (h(\varphi))^{-1}(\mathbf{R} \setminus \{0\})$ . Ясно, что  $V$  открыто в  $Y$ . Так как  $(h(\varphi))(y) = (h^*(y))(\varphi) = (\varphi(x_1))^{n_1} \cdot \dots \cdot (\varphi(x_k))^{n_k} = 1$ , то  $y \in V$ . Если  $z \in Y$  и  $x_0 \in S_D(z) \setminus U$ , то выражение  $(h(\varphi))(z) = (h^*(z))(\varphi)$  содержит сомножитель  $(\varphi(x_0))^{n_0} = 0$ , и потому  $(h(\varphi))(z) = 0$ . Следовательно,  $z \notin V$ . Заключаем, что  $z \in V \Rightarrow S_D(z) \subset U$ , что и доказывает требуемую полунепрерывность сверху. ■

**Теорема 3.** Если  $h: C_p(X) \rightarrow C_p(Y)$  – гомеоморфизм типа  $(D_p(X); D_p(Y))$ , то  $l(X) = l(Y)$ . Если  $X$  компактно, то и  $Y$  компактно.

**Доказательство.** Пусть пространство  $X$  компактно (соответственно  $l(X) \leq \tau$ , где  $\tau$  – некоторый кардинал). Пусть  $\gamma$  – произвольное открытое покрытие пространства  $Y$ . Рассмотрим семейство  $\gamma_1$ , состоящее из объединений всевозможных конечных подсемейств семейства  $\gamma$ . Для каждой точки  $x$  из  $X$  зафиксируем элемент  $V(x)$  из  $\gamma_1$ , такой, что  $T_D(x) \subset V(x)$ , а также окрестность  $U(x)$ , для которой справедливо  $T_D(U(x)) \subset V(x)$ . Из открытого покрытия  $\{U(x): x \in X\}$  пространства  $X$  извлечём конечное (соответственно мощности не выше  $\tau$ ) подпокрытие. Соответствующие множества  $V(x)$  образуют подсемейство той же мощности в  $\gamma_1$ , покрывающее  $Y$  в силу сюръективности отображения  $T_D$ . Для завершения доказательства остаётся учесть, что каждое множество  $V(x)$  есть объединение лишь конечного числа элементов из  $\gamma$ . ■

**Определение 2.** Пространства  $X$  и  $Y$  назовём  $(E;F)$ -эквивалентными, если существует гомеоморфизм  $h: C_p(X) \rightarrow C_p(Y)$ , представимый как композиция конечного числа гомеоморфизмов типа  $(E;F)$ . Факт  $(E;F)$ -эквивалентности пространств  $X$  и  $Y$  будем кратко записывать так:  $X \sim^{(E;F)} Y$ . При  $(E;F) = (M_p(X); M_p(Y))$  будем писать  $X \sim^m Y$  и говорить, что  $X$  и  $Y$   $m$ -эквивалентны, а при  $(E;F) = (D_p(X); D_p(Y))$  – писать  $X \sim^d Y$  и говорить, что  $X$  и  $Y$   $d$ -эквивалентны.

В обозначениях определения 2 можно так сформулировать элементарные следствия из теорем 2 и 3:

**Следствие 5.** (а) Если пространства  $X$  и  $Y$   $m$ -эквивалентны и имеют счётную базу, то  $\dim X = \dim Y$ .

(б) Если пространства  $X$  и  $Y$   $d$ -эквивалентны и одно из них компактно, то и другое компактно.

(в) Если пространства  $X$  и  $Y$   $d$ -эквивалентны, то  $l(X) = l(Y)$ .

В связи с определением 2 возникают два вопроса.

**Вопрос 1.** При каком выборе подмножеств  $E \subset C_p^0 C_p(X)$ ,  $F \subset C_p^0 C_p(Y)$  из определения 2 можно исключить слова «представимый как композиция конечного числа гомеоморфизмов»?

**Вопрос 2.** Каковы взаимосвязи между  $(E;F)$ -эквивалентностями, определяемыми различным выбором пар  $(E;F)$ ?

В направлении исследования второго вопроса идёт следующее

**Предложение.** Для любого пространства  $X$  верно равенство  $M_p(X) \cap U_p(X) = L_p(X)$ .

**Доказательство.** Каждый линейный функционал, как уже упоминалось, является многочленом. В то же время, как известно, он равномерно непрерывен. Так что  $M_p(X) \cap U_p(X) \supset L_p(X)$ . Покажем обратное включение. Для этого достаточно показать, что если  $p \in M_p(X) \setminus L_p(X)$ , то  $p \notin U_p(X)$ . По определению  $p = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} \xi_i^j$ , и

мы предполагаем, что существуют индексы  $k, l$ ,  $1 \leq k \leq m$ ,  $l \geq 2$ , такие, что  $a_{kl} \neq 0$ . Рассмотрим некоторую точку  $x \in \text{supp } \xi_k$  и функцию  $\varphi \in C_p(X)$ , такую, что  $\varphi(X) \subset [0; 1]$  и равную нулю на всём носителе многочлена  $p$ , кроме точки  $x$ , где  $\varphi(x) = 1$ . Пусть  $T = \{t \cdot \varphi; t \in \mathbb{R}\} \subset C_p(X)$ . Тогда сужение многочлена  $p$  на

множество  $T$  есть степенная функция от  $t$  степени не ниже 2. В самом деле,  $p(t \cdot \varphi) = a_{kl} \cdot (t \cdot \xi_k(\varphi))^l = a_{kl} \cdot (t \cdot \alpha_{kx} \cdot \varphi(x))^l = a_{kl} \cdot \alpha_{kx}^l \cdot t^l$  (здесь  $\alpha_{kx}$  – коэффициент линейного функционала  $\xi_k$  при точке  $x$ ). Поэтому при любом  $\delta > 0$  можно выбрать достаточно большие по абсолютной величине  $t, s$ , такие, что  $|t-s| < \delta$ , но  $|p(t \cdot \varphi) - p(s \cdot \varphi)| > 1$ . Поскольку  $|(t \cdot \varphi)(x) - (s \cdot \varphi)(x)| = |(t-s) \cdot \varphi(x)| < \delta$  при любом  $x \in X$ , то заключаем, что  $p$  не равномерно непрерывен. ■

**Следствие 6.** Каждый равномерный гомеоморфизм  $h: C_p(X) \rightarrow C_p(Y)$  типа  $(M_p(X); M_p(Y))$  линеен.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Архангельский А.В. Топологические пространства функций. М.: Изд-во МГУ, 1989.
2. Лазарев В.Р. О полиномиальных гомеоморфизмах пространств непрерывных функций // Вестник ТГУ. Математика и механика. 2007. № 1. С. 28 – 32.

Статья принята в печать 16.10.2008 г.