

УДК 514.752

Н.М. Онищук

НЕГОЛОНОМНАЯ ГИПЕРПЛОСКОСТЬ В ЧЕТЫРЁХМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В E_4 рассматривается неголономное гиперраспределение частного вида, называемое неголономной гиперплоскостью, и векторное поле его нормалей. Доказано, что существует только одна неголономная гиперплоскость в E_4 . Она не имеет особых точек. Найдено её уравнение в неподвижной системе координат. Изучены также (в целом) голономные распределения, инвариантно связанные с неголономной гиперплоскостью.

Ключевые слова: *распределение, неголономная геометрия, векторное поле.*

Гиперраспределение в E_4 – это гладкое отображение, сопоставляющее всякой точке $M \in E_4$ гиперплоскость π_3 , проходящую через M [1. С. 683]. По такому распределению однозначно определяется уравнение Пфаффа, все интегральные кривые и поверхности которого, проходящие через M , касаются в этой точке плоскости π_3 . Распределение называется голономным (или инволютивным), если соответствующее уравнение Пфаффа вполне интегрируемо, и – неголономным в противном случае [2. С. 56].

Исследование ведётся методом внешних форм Картана [3] с использованием подвижного репера.

К каждому элементу (M, π_3) гиперраспределения присоединим ортонормированный репер $(M, \bar{e}_\alpha)$ ($\alpha = \overline{1, 4}$). Пусть $\vec{r}$ – радиус-вектор точки M , а $\bar{e}_4$ – вектор, ортогональный π_3 в точке M . Деривационные формулы репера запишем в виде

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= \omega^\alpha \bar{e}_\alpha, \\ d\bar{e}_\alpha &= \omega_\alpha^\beta \bar{e}_\beta, \end{aligned} \quad (0.1)$$

где $\omega_\alpha^\beta = -\omega_\beta^\alpha$ и, кроме того, формы Пфаффа $\omega_\alpha, \omega_\alpha^\beta$ подчиняются уравнениям структуры евклидова пространства:

$$\begin{aligned} d\omega^\alpha &= \omega^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha, \\ d\omega_\alpha^\beta &= \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta, \\ (\alpha, \beta, \gamma &= \overline{1, 4}). \end{aligned} \quad (0.2)$$

Ясно, что по гиперраспределению $\{M, \pi_3\}$ определяется единственное векторное поле $\{M, \bar{e}_4\}$ и, наоборот, по векторному полю $\{M, \bar{e}_4\}$ определяется единственное гиперраспределение, ему ортогональное. Главными формами [3. С. 288] можно считать формы $\omega^\alpha, \omega_4^\alpha$. Множество плоских элементов (M, π_3) является четырёхмерным многообразием, поэтому формы ω^α образуют базис, а ω_4^α будут их линейными комбинациями:

$$\omega_4^\alpha = A_\beta^\alpha \omega^\beta. \quad (0.3)$$

Матрица

$$(A_{\beta}^{\alpha}) = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 & A_4^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 & A_4^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 & A_4^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (0.4)$$

совпадает с матрицей линейного оператора A , определяемого формулой $A(d\vec{r}) = d\vec{e}_4$ и называемого основным линейным оператором [4. С. 61]. Все инварианты оператора A являются инвариантами гиперраспределения и ортогонально-го ему векторного поля.

1. Вектор неголономности гиперраспределения

При данном выборе репера по распределению $\{M, \pi_3\}$ однозначно определяется уравнение Пфаффа

$$\omega^4 = 0, \quad (1.1)$$

все интегральные кривые (поверхности) которого, проходящие через точку M , касаются плоскости π_3 и называются кривыми (поверхностями) распределения. Найдём условие, при котором уравнение (1.1) вполне интегрируемо. Используя (0.2) и (0.3), находим

$$d\omega^4 \wedge \omega^4 = ((A_1^2 - A_2^1)\omega^1 \wedge \omega^2 + (A_2^3 - A_3^2)\omega^2 \wedge \omega^3 + (A_3^1 - A_1^3)\omega^3 \wedge \omega^1) \wedge \omega^4.$$

Отсюда следует, что распределение $\{M, \pi_3\}$ голономно лишь тогда, когда

$$A_2^1 = A_1^2, \quad A_3^2 = A_2^3, \quad A_1^3 = A_3^1. \quad (1.2)$$

Заметим, что оператор A переводит всякий вектор плоскости π_3 в вектор этой же плоскости. Поэтому можно рассматривать оператор A^* с матрицей (A_i^j) ($i, j = 1, 2, 3$), являющийся сужением оператора A на плоскость π_3 . Разложим оператор A^* на сумму симметричного оператора B^* и кососимметричного оператора B , имеющих матрицы с элементами соответственно

$$B^{*j}_i = \frac{1}{2}(A_i^j + A_j^i), \quad B^j_i = \frac{1}{2}(A_i^j - A_j^i). \quad (1.3)$$

Сравнивая (1.2) и (1.3), заключаем, что необходимым и достаточным условием голономности гиперраспределения $\{M, \pi_3\}$ является обращение в нуль кососимметричного тензора B . Тензор B имеет только три существенные компоненты

$$\rho_1 = \frac{1}{2}(A_3^2 - A_2^3), \quad \rho_2 = \frac{1}{2}(A_1^3 - A_3^1), \quad \rho_3 = \frac{1}{2}(A_2^1 - A_1^2). \quad (1.4)$$

Построим инвариантный вектор

$$\bar{\rho} = \rho^i \bar{e}_i \quad (1.5)$$

и назовем его вектором неголономности.

Таким образом, распределение $\{M, \pi_3\}$ голономно тогда и только тогда, когда $\bar{\rho} = \vec{0}$. В дальнейшем рассматривается только неголономное распределение $\{M, \pi_3\}$, для него $\bar{\rho} \neq 0$.

2. Главные кривизны 1-го и 2-го рода. Линии кривизны 1-го и 2-го рода

Собственные значения оператора A^* , взятые с противоположными знаками, называются главными кривизнами 2-го рода, а его собственные векторы – главными направлениями 2-го рода [4. С. 62]. След H_2 матрицы оператора A^* называется средней кривизной 2-го рода. Очевидно, что

$$H_2 = k_1^{(2)} + k_2^{(2)} + k_3^{(2)}, \quad (2.1)$$

где $k_i^{(2)}$ – главные кривизны 2-го рода. Определитель матрицы оператора A^* называется полной кривизной 2-го рода и обозначается K_2 :

$$K_2 = -k_1^{(2)}k_2^{(2)}k_3^{(2)}. \quad (2.2)$$

Аналогично, главные кривизны 1-го рода $k_1^{(1)}, k_2^{(1)}, k_3^{(1)}$ – это взятые с противоположными знаками собственные значения оператора B^* , а главные направления 1-го рода совпадают с направлениями собственных векторов данного оператора [4. С. 63]. Средняя кривизна 1-го рода H_1 есть след матрицы оператора B^* :

$$H_1 = k_1^{(1)} + k_2^{(1)} + k_3^{(1)}. \quad (2.3)$$

Определитель K_1 матрицы оператора B^* называется полной кривизной 1-го рода:

$$K_1 = -k_1^{(1)}k_2^{(1)}k_3^{(1)}. \quad (2.4)$$

Средние кривизны 1-го и 2-го рода совпадают $H_1=H_2$. Обозначим $H_1=H_2=H$. Полные кривизны 1-го и 2-го рода связаны следующей зависимостью [4. С. 64]:

$$K_2 = K_1 - (\rho^1)^2 k_1^{(1)} - (\rho^2)^2 k_2^{(1)} - (\rho^3)^2 k_3^{(1)}.$$

Таким образом, если гиперраспределение в E_4 голономно, то для него полные кривизны 1-го и 2-го рода совпадают. Однако из того, что полные кривизны 1-го и 2-го рода совпадают, ещё не следует голономность распределения.

3. Асимптотические линии. Неголономная гиперплоскость

Определение 1. Линия гиперраспределения называется асимптотической линией, если в каждой точке линии её нормальная кривизна равна нулю.

Для того чтобы линия гиперраспределения $\{M, \pi_3\}$ была асимптотической, необходимо и достаточно, чтобы она или была прямой, или имела в каждой точке своей 2-мерную соприкасающуюся плоскость, принадлежащую плоскости π_3 . Следовательно, для асимптотических линий должно выполняться условие

$$\langle d^2\vec{r}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle = 0.$$

Отсюда, используя формулы (0.3), получаем дифференциальные уравнения асимптотических линий:

$$\begin{aligned} A_1^1(\omega^1)^2 + A_2^2(\omega^2)^2 + A_3^3(\omega^3)^2 + (A_2^1 + A_1^2)\omega^1\omega^2 + \\ + (A_3^2 + A_2^3)\omega^2\omega^3 + (A_3^1 + A_1^3)\omega^3\omega^1 = 0, \\ \omega^4 = 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Определение 2. Неголономной гиперплоскостью называется неголономное гиперраспределение, все кривые которого представляют собой асимптотические линии.

Из (3.1) видим, что условия

$$A_1^1 = A_2^2 = A_3^3 = A_2^1 + A_1^2 = A_3^2 + A_2^3 = A_3^1 + A_1^3 = 0 \quad (3.2)$$

характеризуют неголономную гиперплоскость. Из (1.4) и (3.2) получаем $\rho^1 = A_3^2, \rho^2 = A_2^3, \rho^3 = A_2^1$. В силу чего матрица оператора A^* примет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & \rho^3 & -\rho^2 \\ -\rho^3 & 0 & \rho^1 \\ \rho^2 & -\rho^1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как характеристический многочлен для этой матрицы имеет степень 3, то, по крайней мере, один его корень – вещественный. Ему соответствует главное направление 2-го рода. Направим вектор $\vec{e}_1$ по этому направлению, тогда получим $\rho^2 = \rho^3 = 0, \rho^1 \neq 0$. Теперь характеристический многочлен оператора A^* примет вид

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & \rho^1 \\ 0 & -\rho^1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (3.3)$$

или $\lambda(\lambda^2 + (\rho^1)^2) = 0$. Отсюда заключаем: неголономная гиперплоскость имеет только одну вещественную кривизну 2-го рода $k_1^{(2)} = 0$ и одно главное направление 2-го рода (направление вектора $\vec{e}_1$), совпадающее с направлением вектора неголономности $\vec{\rho} = \rho^1 \vec{e}_1$. Из сказанного выше следует также, что для неголономной гиперплоскости имеем $K_1 = K_2 = H = 0$, при этом все главные кривизны 1-го рода имеют нулевые значения.

Обозначив $\rho^1 = \rho, A_4^1 = a, A_4^2 = b, A_4^3 = c$, приведём формулы (0.3) к виду

$$\begin{aligned} \omega_4^1 &= a\omega^4, \\ \omega_4^2 &= \rho\omega^3 + b\omega^4, \\ \omega_4^3 &= -\rho\omega^2 + c\omega^4. \end{aligned} \quad (3.4)$$

В формулах (3.4) величины a, b, c – это координаты вектора кривизны линии тока векторного поля $\{M, \vec{e}_4\}$.

Покажем, что для неголономной плоскости вектор кривизны линии тока данного поля не может обращаться в нуль ни в одной точке M . То есть линии тока не могут быть прямыми. Действительно, при $a=b=c=0$ формулы (3.4) примут вид

$$\begin{aligned} \omega_4^1 &= 0, \\ \omega_4^2 &= \rho\omega^3, \\ \omega_4^3 &= -\rho\omega^2. \end{aligned}$$

Внешнее дифференцирование данных форм приводит к равенству

$$d\rho \wedge \omega^3 + \rho\omega_3^1 \wedge \omega^1 - \rho\omega^4 \wedge \omega^2 = 0.$$

Отсюда следует, что $\rho = 0$. То есть это возможно лишь для голономного распределения.

Аналогично можно показать, что для неголономной гиперплоскости не имеет место равенство $a = b = 0$. Это значит, что соприкасающаяся плоскость векторного поля нормалей не может совпадать с плоскостью $x^2 = x^3 = 0$.

Доказанные предложения позволяют для любой неголономной гиперплоскости выбрать подвижной ортонормированный канонический репер следующим образом: вектор $\vec{e}_1$ направить по главному направлению 2-го рода, вектор $\vec{e}_2$ выбрать так, чтобы он был коллинеарен составляющей вектора кривизны линии тока поля $\{M, \vec{e}_4\}$ в плоскости, ортогональной $\vec{e}_1$, то есть был бы коллинеарен вектору $b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3$. Тогда получим $c = 0, b \neq 0$. При таком выборе канонического репера формулы (3.4) будут иметь вид

$$\begin{aligned}\omega_4^1 &= a\omega^4, \\ \omega_4^2 &= \rho\omega^3 + b\omega^4, \\ \omega_4^3 &= -\rho\omega^2,\end{aligned}\tag{3.5}$$

где $\rho \neq 0, b \neq 0, \rho\vec{e}_1$ – вектор неголономности, $a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$ – вектор кривизны линии тока векторного поля нормалей неголономной гиперплоскости. Продолжим систему (3.5), в результате получим

$$\begin{aligned}\rho\omega_1^2 &= -\rho a\omega^2 - \alpha_{23}\omega^3, \\ \rho\omega_1^3 &= -\rho a\omega^3 + \alpha_{13}\omega^4, \\ b\omega_2^3 &= -\alpha_{23}\omega^1 - \beta_{12}\omega^2 + (a^2 - \rho^2)\omega^3 + \gamma\omega^4, \\ d\rho &= a\rho\omega^1 + 2b\rho\omega^2 + \beta_{12}\omega^4, \\ da &= a^2\omega^1 + \alpha_{13}\omega^2 + \alpha_{23}\omega^3 + (\alpha_{33} - \frac{b}{\rho}\alpha_{23})\omega^4, \\ db &= (ab - \alpha_{13})\omega^1 + (a^2 + b^2 - \rho^2)\omega^2 + \beta_{12}\omega^3 + \beta\omega^4.\end{aligned}\tag{3.6}$$

Теорема. В четырёхмерном евклидовом пространстве существует единственная неголономная гиперплоскость.

Доказательство. Внешнее дифференцирование системы (3.6) и применение к полученному результату леммы Картана [3] приводит к следующим условиям на инварианты:

$$a = 0, \alpha_{13} = \alpha_{23} = \alpha_{33} = \beta_{12} = \beta = 0, \gamma = -b\rho.$$

После этого система (3.5), (3.6) принимает вид

$$\begin{aligned}\omega_4^1 &= 0, \\ \omega_4^2 &= \rho\omega^3 + b\omega^4, \\ \omega_4^3 &= -\rho\omega^2, \\ \omega_1^2 &= 0, \\ \omega_1^3 &= 0, \\ b\omega_2^3 &= -\rho\omega^3 - b\rho\omega^4, \\ d\rho &= 2b\rho\omega^2, \\ db &= (b^2 - \rho^2)\omega^2.\end{aligned}\tag{3.7}$$

Нетрудно проверить, что система (3.7) вполне интегрируема. Её решение имеет параметрический произвол, а следовательно, неголономная гиперплоскость является единственной с точностью до постоянной. ■

4. Геометрические свойства неголономной гиперплоскости и ортогонального ей векторного поля

Неголономная гиперплоскость, как было показано выше, характеризуется нулевыми значениями всех главных кривизн 1-го рода. Всякая её кривая является асимптотической линией, а всякое направление плоскости π_3 – главным направлением 1-го рода. Последнее означает, что линии кривизны 1-го рода для неголономной гиперплоскости не определены. Также было показано, что через каждую точку M проходит одна линия кривизны 2-го рода.

Предложение 1. *Линии кривизны 2-го рода неголономной гиперплоскости представляют собой прямые линии.*

Доказательство. Вектор $\vec{e}_1$ канонического репера направлен по касательной к линии кривизны 2-го рода. Из (3.6) для него имеем $d\vec{e}_1 = \vec{0}$. Следовательно, вектор $\vec{e}_1$ – постоянный вектор, а линии кривизны 2-го рода – прямые линии. ■

Определение. *Эквидирекционной линией (поверхностью) называется линия (поверхность), в точках которой векторы нормали гиперраспределения коллинеарны [5. С. 32].*

Предложение 2. *Пусть в области $G \in E_4$ задана неголономная гиперплоскость. Тогда через каждую точку $M \in G$ проходит одна эквидирекционная поверхность, представляющая собой 2-мерную плоскость, проходящую через линию кривизны 2-го рода.*

Доказательство. Векторы нормалей неголономной гиперплоскости параллельны лишь тогда, когда $d\vec{e}_4 = \vec{0}$, то есть когда $\omega_4^1 = \omega_4^2 = \omega_4^3 = 0$. Отсюда, в силу (3.6), имеем

$$\begin{aligned} \rho\omega^3 + b\omega^4 &= 0, \\ \omega^2 &= 0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Система (4.1) вполне интегрируема. Следовательно, через каждую точку M проходит 2-мерная интегральная поверхность, являющаяся эквидирекционной поверхностью. А так как линии кривизны 2-го рода определяются уравнениями $\omega^2 = \omega^3 = \omega^4 = 0$, то это значит, что эквидирекционная поверхность содержит линию кривизны 2-го рода, проходящую через соответствующую точку M . Покажем, что эквидирекционные поверхности представляют собой 2-мерные плоскости. Действительно, касательная плоскость эквидирекционной поверхности в точке M относительно подвижного репера $\{M, \vec{e}_i\}$ имеет уравнения

$$\begin{aligned} \rho x^3 + b x^4 &= 0, \\ x^2 &= 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

При смещении по поверхности (4.1) эта плоскость остаётся неподвижной, что возможно лишь тогда, когда сама эквидирекционная поверхность является 2-мерной плоскостью. ■

С неголономной гиперплоскостью $\{M, \pi_3\}$ инвариантно связано распределение $\{M, \pi_3^*\}$, ортогональное векторному полю $\{M, \vec{e}_1\}$ главных направлений 2-го рода

гиперплоскости $\{M, \pi_3\}$. Уравнение Пфаффа для $\{M, \pi_3^*\}$ – это уравнение $\omega^1 = 0$. Так как $d\omega^1 = 0$, то распределение $\{M, \pi_3^*\}$ голономно и, следовательно, E_4 расщепляется на однопараметрическое семейство трёхмерных поверхностей S_3 , для которых линии кривизны 2-го рода (прямые) неголономной гиперплоскости являются нормальными. Таким образом, векторное поле $\{M, \vec{e}_1\}$ есть поле нормалей поверхностей S_3 .

Предложение 3. *Всякая поверхность S_3 представляет собой плоскость, совпадающую с плоскостью π_3^* .*

Доказательство. Для доказательства предложения достаточно показать, что касательная плоскость к S_3 не меняется вдоль этой поверхности. Действительно, касательная плоскость к S_3 имеет в каноническом репере уравнение

$$x^1 = 0.$$

Характеристика этой плоскости определяется системой

$$\begin{aligned} x^1 &= 0, \\ \omega_2^1 x^2 + \omega_3^1 x^3 + \omega_4^1 x^4 + \omega^1 &= 0. \end{aligned}$$

Второе уравнение при $\omega^1 = 0$ (а поверхность S_3 – это интегральная поверхность уравнения $\omega^1 = 0$) в силу (3.6) выполняется тождественно. Следовательно, плоскость $x^1 = 0$ неподвижна при движении точки по поверхности S_3 . То есть S_3 представляет собой трёхмерную плоскость, совпадающую с плоскостью π_3^* . ■

Предложение 4. *Линии тока векторного поля нормалей неголономной гиперплоскости являются винтовыми линиями, лежащими в трёхмерных плоскостях π_3^* .*

Доказательство. Линии тока векторного поля $\{M, \vec{e}_4\}$ определяются системой уравнений Пфаффа

$$\omega^1 = \omega^2 = \omega^3 = 0.$$

Заметим, что $\omega^4 = ds$, где s – длина дуги линии тока векторного поля. Используя формулы (3.6), находим

$$\frac{d\vec{e}_4}{ds} = b\vec{e}_2, \quad \frac{d^2\vec{e}_4}{ds^2} = \frac{db}{ds}\vec{e}_2 - \rho\vec{e}_3. \quad (4.3)$$

Все производные более высокого порядка не содержат вектора $\vec{e}_1$, то есть лежат в плоскости π_3^* . Так как $\vec{e}_4$ – касательный вектор линии тока, то из (4.3) видим, что b – кривизна линии тока, $\vec{e}_2$ – вектор главной нормали, $\vec{e}_3$ – вектор би-нормали. Кроме того, имеем

$$\frac{d\vec{e}_2}{ds} = -b\vec{e}_4 - \rho\vec{e}_3.$$

Следовательно, $(-\rho)$ – кручение кривой. Из (3.6) для линии тока получаем $b = \text{const} \neq 0$, $\rho = \text{const} \neq 0$. Данным свойством обладают только винтовые линии. Итак, линии тока векторного поля нормалей гиперплоскости – это винтовые линии, лежащие в трёхмерных плоскостях π_3^* . ■

Векторы $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$, в свою очередь, образуют векторные поля $\{M, \vec{e}_2\}$ и $\{M, \vec{e}_3\}$. Покажем, что ортогональные им распределения голономны.

Уравнение Пфаффа, соответствующее распределению, ортогональному $\{M, \vec{e}_2\}$, имеет вид

$$\omega^2 = 0.$$

Это уравнение вполне интегрируемо, а соответствующее распределение голономно, так как $d\omega^2 = 0$. Голономным является также и распределение, ортогональное векторному полю $\{M, \vec{e}_3\}$, в силу того, что $d\omega^3 \wedge \omega^3 = 0$. Вид поверхностей, на которые расслаивается E_4 в обоих случаях, исследуем ниже.

Переходим к глобальному нахождению неголономной гиперплоскости, её инвариантных линий и поверхностей. Для этого проинтегрируем систему уравнений Пфаффа (3.6), полная интегрируемость которой была доказана выше. Прежде всего находим внешние дифференциалы базисных форм. Имеем

$$\begin{aligned} d\omega^1 &= 0, d\omega^2 = 0, d\omega^3 = \frac{\rho^2}{b} \omega^3 \wedge \omega^2, \\ d\omega^4 &= b\omega^4 \wedge \omega^2 + 2\rho\omega^3 \wedge \omega^2. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Отсюда следует

$$\omega^1 = du_1, \omega^2 = du_2. \quad (4.5)$$

После этого из (3.6) получаем

$$\frac{db}{d\rho} = \frac{b^2 - \rho^2}{2b\rho}.$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} b^2 + \rho^2 &= c\rho, \\ d\rho &= 2\rho(c\rho - \rho^2)^{\frac{1}{2}} du_2, c = \text{const} \neq 0. \end{aligned}$$

И тогда

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{c}{c^2(u_2)^2 + 1}, \\ b &= -\frac{c^2 u_2}{c^2(u_2)^2 + 1}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Используя (4.4), находим

$$d\left(\frac{\sqrt{(cu_2)^2 + 1}}{u_2} \omega^3\right) = 0.$$

Следовательно, можно положить

$$du_3 = \frac{\sqrt{(cu_2)^2 + 1}}{u_2} \omega^3.$$

Откуда

$$\omega^3 = \frac{u_2}{\sqrt{(cu_2)^2 + 1}} du_3. \quad (4.7)$$

Наконец, ищем функции λ и μ , такие, чтобы имело место равенство $d(\lambda\omega^4 + \mu\omega^3) = 0$. После соответствующих вычислений получаем

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{(cu_2)^2 + 1}}, \quad \mu = -\frac{1}{cu_2\sqrt{(cu_2)^2 + 1}}.$$

Положим

$$\lambda\omega^4 + \mu\omega^3 = du_4.$$

И тогда

$$\omega^4 = \frac{1}{c\sqrt{(cu_2)^2 + 1}} du_3 + \sqrt{(cu_2)^2 + 1} du_4. \quad (4.8)$$

Деривационные формулы репера после этого примут вид

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= du_1\vec{e}_1 + du_2\vec{e}_2 + \frac{u_2}{\sqrt{(cu_2)^2 + 1}} du_3\vec{e}_3 + \\ &+ \left(\frac{1}{c\sqrt{(cu_2)^2 + 1}} du_3 + \sqrt{(cu_2)^2 + 1} du_4 \right) \vec{e}_4, \\ d\vec{e}_1 &= \vec{0}, \\ d\vec{e}_2 &= \left(-\frac{c}{\sqrt{(cu_2)^2 + 1}} \vec{e}_3 + \frac{c^2 u_2}{\sqrt{(cu_2)^2 + 1}} \vec{e}_4 \right) du_4, \\ d\vec{e}_3 &= \frac{cd u_4}{\sqrt{(cu_2)^2 + 1}} \vec{e}_2 + \frac{cd u_2}{(cu_2)^2 + 1} \vec{e}_4, \\ d\vec{e}_4 &= -\frac{c^2 u_2 du_4}{\sqrt{(cu_2)^2 + 1}} \vec{e}_2 - \frac{cd u_2}{(cu_2)^2 + 1} \vec{e}_3. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Интегрируем систему (4.9), в результате получаем

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \vec{e}_1, \\ \vec{e}_2 &= \vec{e}_2 \cos(cu_4) + \vec{e}_3 \sin(cu_4), \\ \vec{e}_3 &= \frac{1}{\sqrt{(cu_2)^2 + 1}} (\vec{e}_2 \sin(cu_4) - \vec{e}_3 \cos(cu_4) + cu_2 \vec{e}_4), \\ \vec{e}_4 &= \frac{1}{\sqrt{(cu_2)^2 + 1}} (-cu_2 \vec{e}_2 \sin(cu_4) + cu_2 \vec{e}_3 \cos(cu_4) + \vec{e}_4), \\ \vec{r} &= u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2 \cos(cu_4) + u_2 \vec{e}_3 \sin(cu_4) + \left(\frac{u_3}{c} + u_4 \right) \vec{e}_4, \end{aligned} \quad (4.10)$$

где $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ – ортонормированный постоянный базис в E_4 .

Обозначим через (y_1, y_2, y_3, y_4) координаты точки M относительно неподвижного репера $(o; \vec{e}_i)$. Так как $\vec{r}$ – радиус-вектор точки M , то $y_1 = u_1, y_2 = u_2 \cos(cu_4),$

$y_3 = u_2 \sin(cu_4), y_4 = \frac{u_3}{c} + u_4$. Отсюда из (4.5) – (4.8) следует

$$\begin{aligned}
u_1 &= y_1, \\
u_2 &= \sqrt{(y_2)^2 + (y_3)^2}, \\
u_3 &= cy_4 - \operatorname{arctg} \frac{y_3}{y_2}, \\
u_4 &= \frac{1}{c} \operatorname{arctg} \frac{y_3}{y_2};
\end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned}
\rho &= \frac{c}{c^2(y_2^2 + y_3^2) + 1}, \\
\omega^1 &= dy_1, \\
\omega^2 &= \frac{y_2 dy_2 + y_3 dy_3}{\sqrt{y_2^2 + y_3^2}}, \\
\omega^3 &= \frac{y_3 dy_2 - y_2 dy_3 + c(y_2^2 + y_3^2) dy_4}{\sqrt{(y_2^2 + y_3^2)(c^2(y_2^2 + y_3^2) + 1)}}, \\
\omega^4 &= \frac{1}{\sqrt{c^2(y_2^2 + y_3^2) + 1}} (c(y_2 dy_3 - y_3 dy_2) + dy_4).
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Теперь легко записать уравнение неголономной гиперплоскости и всех инвариантных для неё линий и поверхностей в некоторой неподвижной декартовой системе координат.

1) Неголономная гиперплоскость определяется следующим уравнением:

$$cy_3(Y_2 - y_2) - cy_2(Y_3 - y_3) - Y_4 + y_4 = 0. \tag{4.13}$$

Из (4.13) видим, что неголономная гиперплоскость не имеет особых точек. Её область определения совпадает с пространством E_4 .

2) Уравнение Пфаффа, определяющее кривые неголономной гиперплоскости, имеет вид

$$dy_4 = cy_3 dy_2 - cy_2 dy_3. \tag{4.14}$$

3) Вектор $\rho \bar{e}_1 = \frac{c}{c^2((y_2)^2 + (y_3)^2) + 1} \bar{e}_1$ – вектор неголономности.

4) Поле единичных векторов нормалей неголономной гиперплоскости следующее:

$$\bar{e}_4 = \frac{cy_3 \bar{e}_2 - cy_2 \bar{e}_3 - \bar{e}_4}{\sqrt{c^2(y_2^2 + y_3^2) + 1}}.$$

5) Направление вектора $\bar{e}_1$ – это главное направление 2-го рода. Линии кривизны 2-го рода – прямые:

$$\begin{aligned}
y_2 &= c_2, \\
y_3 &= c_3, \\
y_4 &= c_4, \\
(c_2, c_3, c_4 &= \text{постоянные}),
\end{aligned}$$

принадлежащие эквидирекционным плоскостям

$$y_2 = c_2,$$

$$y_4 = c_4.$$

6) Трёхмерные плоскости π_3^* , ортогональные линиям кривизны 2-го рода – это плоскости

$$y_1 = b_1 \quad (b_1 = \text{const}).$$

7) Линии тока векторного поля нормалей неголономной гиперплоскости представляют собой винтовые линии, лежащие в плоскости π_3^* и имеющие уравнения

$$\begin{aligned} y_1 &= b_1, \\ y_2 &= b \cos t, \\ y_3 &= b \sin t, \\ y_4 &= \frac{1}{c}(t + m). \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$(b, m = \text{const}).$$

8) Как было показано выше, распределения, ортогональные векторным полям главных нормалей и бинормалей винтовых линий (4.15), голономны. А потому E_4 расслаивается в первом случае на семейство трёхмерных цилиндров

$$y_2^2 + y_3^2 = b^2$$

с 2-мерными плоскостными образующими, параллельными плоскости Oy_1y_4 , и направляющими

$$\begin{aligned} y_2^2 + y_3^2 &= b^2, \\ y_1 &= b_1, \end{aligned}$$

лежащими в плоскости π_3^* (см. рис.1).

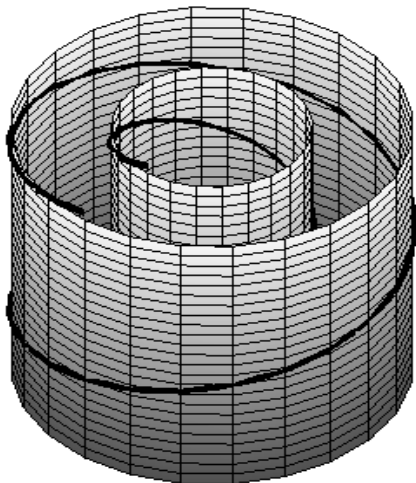


Рис. 1

Во втором случае E_4 расслаивается на семейство трёхмерных цилиндров

$$y_3 = y_2 \operatorname{tg}(cy_4 - m), \quad (4.16)$$

образующими которых являются прямые, параллельные оси Oy_1 , а направляющими служат геликоиды (рис. 2):

$$y_3 = y_2 \operatorname{tg}(cy_4 - m),$$

$$y_1 = b_1.$$

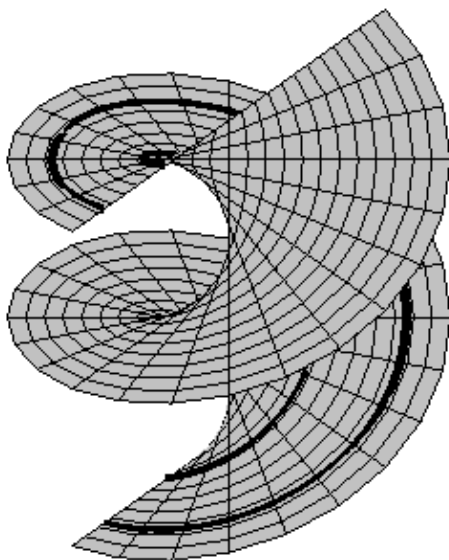


Рис.2

Заметим, что распределения, ортогональные главным нормальям и бинормальям винтовых линий (4.15), имеют особые точки, заполняющие 2-мерную плоскость $y_2 = y_3 = 0$. Это утверждение становится очевидным при рассмотрении формул (4.12).

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. М.: Наука, 1979.
2. Уорнер Ф. Основы теории гладких многообразий и групп Ли. М.: Мир, 1987.
3. Фиников С.П. Метод внешних форм Картана. М.-Л.: ГИТТЛ, 1948.
4. Онищук Н.М. Геометрия векторного поля в четырёхмерном евклидовом пространстве // Международная конференция по математике и механике: Избранные доклады. Томск, 2003. С. 60 – 68.
5. Слухаев В.В. Геометрия векторных полей. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1982.

Статья принята в печать 06.10.2008 г.