ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2008 Математика и механика № 3(4)

УДК 519.21

А.Т. Семенов

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ РАЗОРЕНИЯ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО ПРОЦЕССА ПУАССОНА

В работе рассматривается момент первого перескока $\tau(x) = \inf\{t: \xi(t) \ge x\}$ через уровень $x > 0$ обобщенным процессом Пуассона $\xi(t)$, $t \ge 0$. Получены полные асимптотические разложения распределения $\tau(x)$ при $x \to \infty$, когда величины скачков процесса удовлетворяют условию типа Крамера.

Ключевые слова: *обобщенный процесс Пуассона*, *вероятность разорения*, *преобразование Лапласа – Стилтьеса*, *факторизационный метод*, *асимптотическое разложение*.

Пусть $\xi(t)$, $t \ge 0$, $\xi(0) = 0$, – случайный процесс Леви, т.е. однородный процесс с независимыми приращениями. Определим момент $\tau(x)$ первого достижения или пересечения уровня $x > 0$ и значение $\gamma(x)$ процесса в момент перескока через этот уровень с помощью соотношений

$$\tau(x) = \inf\{t: \xi(t) \ge x\} \text{ и } \gamma(x) = \xi(\tau(x)),$$

полагая по определению $\inf \varnothing = \infty$. Величину $\gamma(x)$ будем считать неопределенной, если $\tau(x) = \infty$.

Если случайный процесс $S(t) = x - \xi(t)$, $t \ge 0$, описывает капитал некоторой компании в момент времени t, то $\tau(x)$ есть момент разорения, а $\gamma(x)$ – величина капитала этой компании в момент разорения при начальном значении $S(0) = x$.

Изучение распределения граничных функционалов $\tau(x)$ и $\gamma(x)$ представляет большой интерес как в финансово-актуарной математике, так и в задачах хранения запасов, математической статистики и др. Нахождение искомых распределений в явном виде возможно только для очень частных процессов $\xi(t)$. Результаты для процессов общего вида имеют, как правило, асимптотический характер.

Данная статья тесно примыкает к работам автора [1, 2], в которых (при определенных условиях на процесс $\xi(t)$) получены полные асимптотические разложения при $x \to \infty$ *вероятности разорения на конечном промежутке времени*

$$W(x, t) = P\{\tau(x) < t\}. \tag{0.1}$$

Вне рассмотрения в этих работах остался случай «арифметических» процессов Леви, которыми являются обобщенные процессы Пуассона.

Обобщенный процесс Пуассона – это случайный процесс вида

$$\xi(t) = S_{N(t)} = \sum_{i=1}^{N(t)} \xi_i, \ t \ge 0, \quad \xi(0) = 0, \tag{0.2}$$

где $N(t)$ – простой пуассоновский процесс с параметром $\alpha > 0$, $\{\xi_i, i \ge 1\}$ – независящая от процесса $N(t)$ последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин (с.в.). Процесс $\xi(t)$ является однородным процессом с независимыми приращениями со скачкообразными траекториями, величины интервалов $\{\tau_i,\ i \geq 1\}$ между соседними скачками которого независимы и распределены по экспоненциальному закону с параметром α. Заметим, что в силу тождества Вальда

$$E\xi(t) = E\xi_1 \cdot EN(t) = \alpha E\xi_1 \cdot t. \tag{0.3}$$

Предельное распределение граничных функционалов $\tau(x)$ и $\gamma(x)$ для обобщенных пуассоновских процессов со сносом изучено в работах [3, 4], а асимптотические разложения для полунепрерывных процессов – в [5].

Как и в работах [1, 2], в настоящей статье используется факторизационная техника А.А. Боровкова [6, 7] и методика асимптотического анализа В.И. Лотова [9, 10]. Данный подход состоит из ряда этапов. На первом из них двойное преобразование Лапласа – Стилтьеса (по пространству и времени) над совместным распределением функционалов $\tau(x)$ и $\gamma(x)$:

$$\hat{\hat{F}}(u,\lambda;x) = E\left\{ e^{-u\tau(x)+\lambda\gamma(x)};\ \tau(x)<\infty \right\} =$$

$$= \int_0^\infty e^{-ut} \int_x^\infty e^{\lambda y} P\{\, \tau(x)\in dt,\ \gamma(x)\in dy \,\},\ \mathrm{Re}\, u>0,\ \mathrm{Re}\,\lambda \leq 0, \tag{0.4}$$

выражается через положительную компоненту факторизации функции $1 - z\varphi(\lambda)(1 - zp(\lambda))$, где $\varphi(\lambda)$ ($p(\lambda)$) – преобразование Лапласа – Стилтьеса (производящая функция) величин скачков процесса $\xi(t)$. Затем, используя особенности положительной компоненты факторизации, выделяется главный член асимптотики этого преобразования при $x \to \infty$ и оценивается возникающий при этом остаточный член. Получается так называемое асимптотическое представление преобразования Лапласа – Стилтьеса. Для нахождения вероятности разорения $W(x, t)$ необходимо обратить полученное представление по временной переменной, например, с помощью контурного интегрирования и модификации метода перевала. Эта часть асимптотического анализа (третий этап) является наиболее сложной. Получаемые в итоге полные асимптотические разложения вероятности разорения будут содержать коэффициенты, определяемые с помощью цепочки формул, что является достаточно громоздкой в техническом отношении процедурой и, как следствие, результаты не будут наглядными.

В данной работе метод перевала не применяется. Вместо этого проводится анализ главной части асимптотики преобразования Лапласа – Стилтьеса $\hat{\hat{F}}(u,0;x) = E\left\{ e^{-u\tau(x)};\ \tau(x)<\infty \right\}$ в окрестности точки $u = 0$, что приводит к асимптотическим разложениям с коэффициентами, являющимися функциями переменных u и x. Как функции u они являются преобразованиями Лапласа – Стилтьеса от соответствующих прообразов, которые могут быть найдены из таблиц обратных преобразований Лапласа – Стилтьеса.

Заметим, что в работах [1, 2], в отличие от настоящей, для асимптотического анализа распределения граничных функционалов использовались компоненты факторизации более сложной функции $u/(u - \psi(\lambda))$, где $\psi(\lambda) = \ln E \exp(\lambda\,\xi(1))$. Кроме того, коэффициенты асимптотических разложений имеют вероятностный смысл.

1. Представления для преобразования Лапласа – Стилтьеса

Рассмотрим случайное блуждание $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, $n \geq 1$, порожденное последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин (с.в.) $\xi_1, \xi_2, \ldots$, являющихся величинами скачков обобщенного пуассоновского процесса (0.2). Положим $\mu_k = E\xi_1^k$, $k \geq 1$. Если $\varphi(\lambda) = E\left(e^{\lambda\xi_1}\right)$, $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$, – преобразование Лапласа – Стилтьеса величин скачков процесса $\xi(t)$, то из представления (0.2) нетрудно получить преобразование Лапласа – Стилтьеса для процесса $\xi(t)$:

$$E\left(e^{\lambda\,\xi(t)}\right) = \exp\{\alpha t(\varphi(\lambda)-1)\},\ \mathrm{Re}\,\lambda = 0\,. \tag{1.1}$$

В работе всюду будет предполагаться выполненным следующее условие крамеровского типа на распределение величин скачков процесса $\xi(t)$.

С) 1. Распределение ξ_1 содержит абсолютно непрерывную компоненту.

2. $|\varphi(\lambda)| < \infty$ при $m_- \leq \mathrm{Re}\,\lambda \leq m_+$, $m_- < 0$, $m_+ > 0$. Если $\mu_1 < 0$, то дополнительно предполагаем, что $\varphi(m_+) > 1$; при $\mu_1 > 0$ предполагаем $\varphi(m_-) > 1$.

Для случайного блуждания $\{S_n, n \geq 1\}$ и любого $x \in R$ определим лестничные моменты

$$\eta_+(x) = \inf\{n \geq 1 : S_n \geq x\}, \quad \eta_-(x) = \inf\{n \geq 1 : S_n < x\}$$

(полагая по определению $\inf \varnothing = \infty$) и лестничные высоты $\chi_\pm(x) = S_{\eta_\pm(x)}$. На событиях $\{\eta_\pm(x) = \infty\}$ величины $\chi_\pm(x)$ будем считать неопределенными. Положим $\eta_\pm(0) = \eta_\pm$ и $\chi_\pm = S_{\eta_\pm}$.

Хорошо известно [6, 7], что функция $1 - z\varphi(\lambda)$ допускает следующую факторизацию на прямой $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$:

$$1 - z\varphi(\lambda) = r_{z^+}(\lambda) r_{z^-}(\lambda), \quad |z| \leq 1\,, \tag{1.2}$$

где функции $r_{z^+}^{\pm 1}(\lambda)$ аналитичны в области $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$ и непрерывны вплоть до границы, а $r_{z^-}^{\pm 1}(\lambda)$ аналитичны в области $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$ и непрерывны на границе. Компоненты факторизации (1.2) выражаются через преобразования лестничных моментов и высот:

$$r_{z^\pm}(\lambda) = 1 - E\left\{z^{\eta_\pm} e^{\lambda\chi_\pm}; \eta_\pm < \infty\right\},\ \mathrm{Re}\,\lambda = 0,\ |z| \leq 1\,. \tag{1.3}$$

При выполнении условия С) факторизация (1.2) справедлива в полосе $m_- \leq \mathrm{Re}\,\lambda \leq m_+$.

На множестве преобразований Лапласа – Стилтьеса, т.е. функций $g(\lambda)$, представимых в виде

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda y}\, dG(y), \quad \int_{-\infty}^{\infty} |dG(y)| < \infty\,,$$

определим оператор проектирования на множество A:

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda y} dG(y)\right]^A = \int_A e^{\lambda y} dG(y)\,.$$

Теорема 1.1. *При* Re $u > 0$ *и* Re $\lambda \le 0$ *для двойного преобразования Лапласа – Стилтьеса* (0.3) *имеет место представление*

$$\hat{\hat{F}}(u,\lambda;x) = r_{z^+}(\lambda)\left[r_{z^+}^{-1}(\lambda)\right]^{[x,\infty)}, \tag{1.4}$$

где
$$z = \frac{\alpha}{\alpha+u}.$$

Доказательство. По теореме сложения математических ожиданий для полной группы несовместных событий имеем

$$\hat{\hat{F}}(u,\lambda;x) = E\left\{e^{-u\tau(x)+\lambda\gamma(x)};\ \tau(x)<\infty\right\} =$$

$$= \int_0^\infty e^{-ut} d_t\, E\left\{e^{\lambda\gamma(x)};\tau(x)<t\right\} = \int_0^\infty e^{-ut} d_t \sum_{n=0}^\infty E\left\{e^{\lambda\gamma(x)};\tau(x)<t,\ N(t)=n\right\}. \tag{1.5}$$

Событие $\{N(t)=n\}$ означает, что за время t процесс $\xi(t)$ совершил n скачков в моменты $t_1 = \tau_1$, $t_2 = \tau_1 + \tau_2$, …, $t_n = \tau_1 + \ldots + \tau_n$. Поэтому

$$\{\tau(x)<t,\ N(t)=n\} = \left\{\sum_{i=1}^n \tau_i < t\right\}. \tag{1.6}$$

Если происходит перескок через уровень $x > 0$ скачкообразным процессом $\xi(t)$, то он происходит в некоторый момент скачка, т.е.

$$\tau(x) = \min\,\{n\colon \xi(t_n) \ge x\}. \tag{1.7}$$

Но по определению обобщенного пуассоновского процесса величина $\xi(t_n)$ есть сумма n независимых с.в. $\xi_1' = \xi_{\tau_1}, \ldots, \xi_n' = \xi_{\tau_n}$, имеющих то же самое распределение, что и с.в. ξ_1, …, ξ_n. Поэтому, в силу (1.7),

$$\tau(x) = \eta_+(x) = \min\,\{n\colon S_n \ge x\}, \tag{1.8}$$

где первое равенство понимается по распределению.

С учетом соотношений (1.6) и (1.8) равенство (1.5) можно переписать следующим образом:

$$\hat{\hat{F}}(u,\lambda;x) = \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty e^{-ut} d_t\, E\left\{e^{\lambda S_{\eta_+(x)}};\ \eta_+(x)=n,\ \sum_{i=1}^n \tau_i < t\right\}. \tag{1.9}$$

Изменение порядка интегрирования и суммирования в предыдущей формуле законно в силу равномерной сходимости ряда в указанной области изменения переменной λ. Поскольку с.в. $\{\xi_i\}$ и $\{\tau_i\}$ в (1.9) независимы, то

$$\hat{\hat{F}}(u,\lambda;x) = \sum_{n=0}^\infty E\left\{e^{\lambda S_{\eta_+(x)}};\ \eta_+(x)=n\right\} \int_0^\infty e^{-ut} dP\left\{\sum_{i=1}^n \tau_i < t\right\}. \tag{1.10}$$

С.в. $\{\tau_i\}$ распределены по экспоненциальному закону с параметром α, поэтому

$$\int_0^\infty e^{-ut} dP\{\tau_i < t\} = \frac{\alpha}{\alpha+u}, \quad i \ge 1.$$

Так как с.в. $\{\tau_i\}$ независимы, то

$$\int_0^\infty e^{-ut} dP\left\{\sum_{i=1}^n \tau_i < t\right\} = \left(\frac{\alpha}{\alpha+u}\right)^n. \tag{1.11}$$

Подставляя правую часть равенства (1.11) в формулу (1.10), получаем

$$\hat{\hat{F}}(u,\lambda;x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{\alpha+u}\right)^n E\left\{e^{\lambda S_{\eta_+(x)}};\ \eta_+(x)=n\right\}=$$

$$=E\left\{e^{\lambda S_{\eta_+(x)}}z^{\eta_+(x)};\ \eta_+(x)<\infty\right\},\qquad(1.12)$$

где
$$\mathrm{z}=\frac{\alpha}{\alpha+u}.$$

Доказательство теоремы 1.1 завершает тот факт, что в работе Кемпермана [8] показано, что при Re $\lambda \le 0$ и $|\,z\,| < 1$ (что в нашем случае, очевидно, выполнено)

$$E\left\{e^{\lambda S_{\eta_+(x)}}z^{\eta_+(x)};\ \eta_+(x)<\infty\right\}=r_{z^+}(\lambda)\left[r_{z^+}^{-1}(\lambda)\right]^{[x,\infty)}.$$

Для исследования двойного преобразования $\hat{\hat{F}}(u,\lambda;x)$ нам понадобятся некоторые свойства о положительной компоненте факторизации $r_{z^+}(\lambda)$, известные из [7]. Внутри полосы $m_- \le \mathrm{Re}\,\lambda \le m_+$ функция $\varphi(\lambda)$ аналитична и является выпуклой функцией от λ. Из второй части условия C) следует, что при некотором $\varepsilon > 0$ функция $1 - z\varphi(\lambda)$ имеет два вещественных нуля $\lambda_\pm(z)$, $z \in [1-\varepsilon, 1]$, $\lambda_-(z) \le \lambda_+(z)$. Функции $\lambda_\pm(z)$ могут быть аналитически продолжены в некоторую окрестность отрезка $[1-\varepsilon, 1]$ при $\mu_1 \ne 0$ и в ту же окрестность, но с разрезом по лучу $z \ge 1$ в случае $\mu_1 = 0$. При этом $\lambda_\pm(z)$ по-прежнему остаются нулями функции $1 - z\varphi(\lambda)$.

Положим $\lambda_\pm = \lambda_\pm(1)$. Тогда, очевидно, $\lambda_\pm = 0$ при $\mu_1 = 0$; $\lambda_- = 0$, $\lambda_+ > 0$ при $\mu_1 < 0$ и $\lambda_- < 0$, $\lambda_+ = 0$ при $\mu_1 > 0$. Известно также [7], что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что положительная компонента факторизации $r_{z^+}(\lambda)$ аналитична в области Re $\lambda < \lambda_+ + \delta$, непрерывна на границе и единственным ее нулем в области Re $\lambda \le \lambda_+ + \delta$ для z, близких к единице, является $\lambda_+(z)$. Функция

$$v_z(\lambda)=\frac{r_{z^+}(\lambda)}{\lambda-\lambda_+(z)}$$

аналититична в области Re $\lambda < \lambda_+ + \delta$ и непрерывна на границе, $|\,z-1\,| < 1$.

Определим множества

$$U_\varepsilon=\{u:0<\mathrm{Re}\,u<\varepsilon,\left|\ \mathrm{Im}\,u\ \right|<\varepsilon\}$$

и
$$K_\varepsilon=\{u:0<\mathrm{Re}\,u<\varepsilon,\ \left|\ \mathrm{Im}\,u\ \right|\ge\varepsilon\}.$$

Теорема 1.2. *Предположим, что выполнено условие* C). *Тогда существуют такие числа* $\varepsilon > 0$ *и* $\delta > 0$, *что при* Re $\lambda \le \lambda_+$, *u*I U_ε *и* $x \to \infty$ *имеет место представление*

$$\hat{F}(u,\lambda;x)=f_z(\lambda)e^{(\lambda-\lambda_+(z))x}\left[1+O\left(e^{-(\lambda_++\delta)x}\right)\right]+\int_x^\infty e^{\lambda y}\,d\varphi_z(y),\qquad(1.13)$$

где
$$z=\frac{\alpha}{\alpha+u},$$

$$f_z(\lambda)=\frac{v_z(\lambda)}{v_z\left(\lambda_+(z)\right)}=\frac{r_{z^+}(\lambda)}{(\lambda-\lambda_+(z))\,r'_{z^+}\left(\lambda_+(z)\right)}\,, \tag{1.14}$$

$$|\,\varphi_z(y)\,|\le C\,e^{-(\lambda_++\delta)y},\quad y\ge x,\quad C>0\text{ , равномерно по } u\mathrm{I}\ U_\varepsilon\,. \tag{1.15}$$

При Re $\lambda \le \lambda_+$, uI K_ε *и* $x\to\infty$ *имеет место представление*

$$\widehat{F}(u,\lambda;x)=\int\limits_x^\infty e^{\lambda y}\,d\psi_u(y), \tag{1.16}$$

где

$$|\,\psi_u(y)\,|\le\frac{C}{|\,u+\alpha\,|}e^{-(\lambda_++\delta)y},\quad y\ge x,\quad C>0\text{, равномерно по } u\mathrm{I}\ K_\varepsilon\,. \tag{1.17}$$

Доказательство. Для случайного блуждания $\{S_n,\ n\ge 1\}$ представление (1.13) и оценка (1.15) получены в работе [9, теорема 1.1] для функции $F(z,\,\lambda;\,x)=E\left\{z^{\eta_+(x)}e^{\lambda S_{\eta_+(x)}};\,\eta_+(x)<\infty\right\}$, когда $z\in L_{\tilde\varepsilon}=\{\,z:|\,z\,|<1,|\,z-1\,|<\tilde\varepsilon\}$. Поскольку исследуемое нами преобразование $\widehat{F}(u,\lambda;x)$ и функция $F(z,\,\lambda;\,x)$ связаны равенством $\widehat{F}(u,\lambda;x)=F\left(\frac{\alpha}{\alpha+u},\lambda;\,x\right)$, а отображение $z=\frac{\alpha}{\alpha+u}$ переводит множество U_ε в $L_{\tilde\varepsilon}$ с $\tilde\varepsilon=\frac{\alpha}{\alpha+\varepsilon}$, то (1.13) и (1.15) следуют из указанной теоремы в [9].

Отметим, что с помощью следствия 3.1 из работы [9] при uI K_ε легко получить оценку

$$|\,\psi_u(y)\,|\le C\,e^{-(\lambda_++\delta)y},\quad y\ge x,$$

однако этого в нашем случае недостаточно.

Пусть при Re $\lambda\le\lambda_+$, uI U_ε

$$\begin{aligned} r_{\alpha/(\alpha+u)^+}(\lambda)&\equiv h_{u^+}(\lambda)=\int\limits_0^\infty e^{\lambda y}dF_u(y),\\ r^{-1}_{\alpha/(\alpha+u)^+}(\lambda)&\equiv h^{-1}_{u^+}(\lambda)=\int\limits_0^\infty e^{\lambda y}dG_u(y). \end{aligned} \tag{1.18}$$

При любом $\varepsilon>0$ образ множества K_ε при отображении $z=\frac{\alpha}{\alpha+u}$ принадлежит множеству $|\,z-1\,|\ge\tilde\varepsilon$, $|\,z\,|\le 1$ при некотором $\tilde\varepsilon$. Поскольку для таких z разложения (1.18) имеют место при Re $\lambda\le\delta_1=\lambda_++\delta$, по формуле обращения преобразований Лапласа – Стилтьеса имеем

$$F_u(y)=\frac{1}{2\pi\,i}\int\limits_{\mathrm{Re}\lambda=\delta_1}\frac{h_{u^+}(\lambda)}{\lambda}e^{-\lambda y}d\lambda=\frac{1}{2\pi\,i}\int\limits_{\mathrm{Re}\lambda=\delta_1}\frac{1-(\alpha/(\alpha+u))\varphi(\lambda)}{\lambda\,h_{u^-}(\lambda)}e^{-\lambda y}d\lambda=$$

$$=\frac{1}{2\pi\,i}\int\limits_{\mathrm{Re}\lambda=\delta_1}\frac{e^{-\lambda y}}{\lambda\,h_{u^-}(\lambda)}\,d\lambda-\frac{\alpha}{\alpha+u}\cdot\frac{1}{2\pi\,i}\int\limits_{\mathrm{Re}\lambda=\delta_1}\frac{\varphi(\lambda)}{\lambda\,h_{u^-}(\lambda)}e^{-\lambda y}d\lambda=I_1-I_2.$$

Интеграл $I_1 = 0$, так как подынтегральная функция аналитична для $\mathrm{Re}\lambda > 0$. Поскольку подынтегральная функция в I_2 аналитична при $0 < \mathrm{Re}\,\lambda < \delta_1$ и непрерывна на границе $\mathrm{Re}\,\lambda = \delta_1$, то

$$|I_2| \le \frac{C_2}{|\alpha + u|} e^{-y\delta_1}.$$

Далее,

$$G_u(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathrm{Re}\lambda=\delta_1} \frac{h_{u^+}^{-1}(\lambda)}{\lambda} e^{-\lambda y} d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathrm{Re}\lambda=\delta_1} \frac{h_{u^-}(\lambda)(\alpha/(\alpha+u))\varphi(\lambda)}{\lambda\,(1-(\alpha/(\alpha+u))\varphi(\lambda))} e^{-\lambda y} d\lambda +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathrm{Re}\lambda=\delta_1} \frac{h_{u^-}(\lambda) e^{-\lambda y}}{\lambda} d\lambda = I_3 - I_4,$$

где

$$I_4 = 0 \text{ и } |I_3| \le \frac{C_3}{|\alpha+u|} e^{-y\delta_1}.$$

В силу представлений (1.4) и (1.18) имеем

$$\widehat{F}(u,\lambda;x) = \int_x^\infty e^{\lambda y}\, d_y \int_0^{y-x} F_u(y-v) dG_u(v) = \int_x^\infty e^{\lambda y}\, d\psi_u(y),$$

откуда с помощью полученных выше оценок получаем

$$|\psi_u(y)| \le |F_u(y)| \int_0^\infty |dG_u(y)| + |G_u(y)| \int_0^\infty |dF_u(y)| \le \frac{C}{|\alpha+u|} e^{-y\delta_1}, \quad \delta_1 = \lambda_+ + \delta.$$

2. Асимптотические разложения вероятности разорения

В силу формулы обращения для преобразований Лапласа – Стилтьеса имеем

$$W(x,t) = P\{\tau(x) < t\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\widehat{F}(u,0;x)}{u} e^{tu}\, du \equiv I(x;t), \tag{2.1}$$

где $c > 0$. Подынтегральная функция в (2.1) аналитична в полуплоскости $\mathrm{Re}\,u > 0$, непрерывна и ограничена вплоть до границы $\mathrm{Re}\,u = 0$, за исключением некоторой малой окрестности точки $u = 0$. Так как по лемме Жордана

$$\lim_{A\to\infty} \int_{\pm iA}^{\pm iA+c} \frac{\widehat{F}(u,0;x)}{u} e^{tu}\, du = \lim_{A\to\infty} \int_0^c \frac{\widehat{F}(z\pm iA,0;x)}{z\pm iA} e^{t(z\pm iA)}\, dz = 0,$$

то контур интегрирования в (2.1) можно заменить на мнимую ось. При этом лежащую на ней точку $u = 0$ обойдем справа по окружности радиуса ε ($\varepsilon > 0$ – произвольное достаточно малое число). Обозначим этот контур K, и пусть $K_1 = K \text{ X } U_\varepsilon$, $K_2 = K \text{ X } K_\varepsilon$.

Запишем интеграл $I(x;t)$ в следующем виде:

$$I(x;t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_1} \frac{\widehat{F}(u,0;x)}{u} e^{tu}\, du + \frac{1}{2\pi i} \int_{K_2} \frac{\widehat{F}(u,0;x)}{u} e^{tu}\, du = I_1(x;t) + I_2(x;t). \tag{2.2}$$

В силу оценки (1.17) нетрудно видеть, что для некоторого $\delta > 0$ при $x \to \infty$

$$I_2(x;t) = O\left(e^{-(\lambda_+ + \delta)x}\right). \tag{2.3}$$

Из представления (1.13) при $\lambda = 0$ следует, что для некоторого $\delta > 0$ и $x \to \infty$

$$\widehat{F}(u, 0; x) = E\left\{ e^{-u\tau(x)};\ \tau(x) < \infty \right\} = f(u) e^{-\lambda_+(u)x} + O\left(e^{-(\lambda_+ + \delta)x} \right), \tag{2.4}$$

где

$$f(u) = \frac{v_{\alpha/(\alpha+u)}(0)}{v_{\alpha/(\alpha+u)}(\lambda(u))} = \frac{1 - E\left\{ (\alpha/(\alpha+u))^{\eta_+};\ \eta_+ < \infty \right\}}{\lambda_+(u) E\left\{ \chi_+ (\alpha/(\alpha+u))^{\eta_+} \exp\left(\lambda_+(u)\chi_+ \right);\ \eta_+ < \infty \right\}}. \tag{2.5}$$

Соотношение (2.4) выполняется равномерно по uI U_ε при некотором $\varepsilon > 0$ (значение правой части (2.4) в точке $u = 0$ можно доопределить по непрерывности).

Асимптотический анализ интеграла $I_1(x; t)$ проводится с учетом представления (2.4) по схеме, изложенной в [1, 2] и состоящей из двух этапов. На первом этапе подынтегральная функция $\widehat{F}(u, 0; x)$ заменяется асимптотическим разложением в окрестности точки $u = 0$. При этом следует отметить, что в случае $\mu_1 = 0$ точка $u = 0$ является точкой ветвления второго порядка подынтегральной функции, а в случае $\mu_1 \neq 0$ подынтегральная функция аналитична в окрестности точки $u = 0$. Поэтому в зависимости от значения μ_1 функция $\widehat{F}(u, 0; x)$ будет иметь разное асимптотическое представление. Так при $\mu_1 = 0$ для uI U_ε имеют место разложения

$$\lambda_+(u) = \alpha_1 \sqrt{u} + \alpha_2 u + \alpha_3 u^{3/2} + \ \ldots; \tag{2.6}$$

$$\exp\left\{ -x\lambda_+(u) \right\} = e^{-\alpha_1\sqrt{u}} \left\{ 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \varsigma_j\left(\sqrt{u} \right) \right\}; \tag{2.7}$$

$$f(u) = 1 + \beta_1 \sqrt{u} + \beta_2 u + \ldots, \tag{2.8}$$

где корень квадратный понимается в смысле главного значения.

Здесь

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{2}{\mu_2}},\ \ \alpha_2 = \frac{\mu_3}{\mu_2^2},\ \ \beta_1 = -\alpha_1 \frac{E\chi_+^2}{E\chi_+};$$

$\varsigma_j\left(\sqrt{u} \right)$ – полиномы относительно $\sqrt{u}$ степени не выше $2j$,

$$\varsigma_1\left(\sqrt{u} \right) = -\alpha_2 u,\ \ \varsigma_2\left(\sqrt{u} \right) = \frac{1}{2}\alpha_2^2 u^2 - \alpha_3 u^{3/2}.$$

При исследовании асимптотики вероятности разорения $W(x; t)$ в случаях $\mu_1 = 0$ и $\mu_1 \neq 0$ используется разная нормировка с.в. $\tau(x)$. Так, при $\mu_1 = 0$ рассматривается нормированная с.в. $\tau(x)/x^2$, что равносильно замене переменной u в (2.4) на u / x^2. Подстановка асимптотических разложений (2.7) и (2.8) в (2.4) приводит к следующему разложению при $x \to \infty$, справедливому для любых u и x, таких, что u / x^2I U_ε:

$$\widehat{F}(u / x^2, 0; x) = E\left\{ e^{-u\,\tau(x)/x^2};\ \tau(x) < \infty \right\} =$$

$$= e^{-\alpha_1\sqrt{u}} \left\{ 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j u^{j/2} x^{-j} \right\} \left\{ 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \varsigma_j(\sqrt{u}) x^{-j} \right\} + O\left(e^{-\delta x} \right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} f_j(u) x^{-j} + O\left(e^{-\delta x} \right) , \tag{2.9}$$

где $$f_0(u) = e^{-\alpha_1 \sqrt{u}}, \quad f_1(u) = e^{-\alpha_1 \sqrt{u}} \left[\beta_1 \sqrt{u} - \alpha_2 u \right].$$

Напомним, что $\lambda_+ = 0$ при $\mu_1 = 0$.

Коэффициенты полученных разложений функции $\widehat{F}(u, 0; x)$, при соответствующей нормировке, являются функциями u и x, как при $\mu_1 = 0$ (см. (2.9)), так и при $\mu_1 \neq 0$. Как функции u они представляют собой преобразования Лапласа – Стилтьеса соответствующих прообразов, которые могут быть найдены из таблиц обратных преобразований Лапласа – Стилтьеса (например, [11]). Следующий этап состоит в обосновании законности почленного обращения разложения функции $\widehat{F}(u, 0; x)$, который проводится аналогично проделанному в [2] и не приводится здесь. Приведем окончательные результаты.

Теорема 2.1. *Предположим, что выполнено условие крамеровского типа C). Пусть* $\mu_1 = E\xi_1 = 0$ *и* $x \to \infty$. *Тогда для любых* $t > 0$ *и* $m \geq 0$

$$P\left\{ \frac{\tau(x)}{x^2} < t \right\} = \sum_{j=0}^{m} F_j(t) x^{-j} + O\left(x^{-m-1} \right) ,$$

где

$$F_j(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{f_j(u)}{u} e^{tu} du, \quad c > 0, \; j \geq 0,$$

– прообразы членов разложения (2.9),

$$F_0(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha_1/\sqrt{2t}}^{\infty} e^{-y^2/2} dy .$$

Теорема 2.2. *Предположим, что выполнено условие крамеровского типа C). Пусть* $\mu_1 = E\xi_1 \neq 0$ $\tilde{\mu}_1 = \varphi'(\lambda_+)$ *и* $x \to \infty$. *Тогда для любых* $t > 0$ *и* $m \geq 0$

$$P\left\{ \frac{\tau(x) - x\tilde{\mu}_1^{-1}}{\sqrt{x}} < t \right\} = P\{ \tau(x) < \infty \} + \sum_{j=0}^{m} \tilde{F}_j(t) x^{-j} + O\left(x^{-m-1} \right),$$

где

$$P\{ \tau(x) < \infty \} = 1 \;\; \textit{при} \; \mu_1 > 0$$

и

$$P\{ \tau(x) < \infty \} = C e^{-\lambda_+ x} \left(1 + O(e^{-(\lambda_+ + \delta)x}) \right) \; \textit{при} \; \mu_1 < 0,$$

$$C = \frac{1 - P\left\{ \eta_+ < \infty \right\}}{\lambda_+ E\left\{ e^{\lambda_+ \chi_+}; \eta_+ < \infty \right\}} \;\; \textit{и} \; \delta > 0.$$

Здесь $\tilde{F}_j(t)$, $j \geq 0$, *– прообразы членов разложения функции* $\widehat{F}\left(\frac{u - x\tilde{\mu}_1^{-1}}{\sqrt{x}}, 0;\; x \right)$ *в окрестности точки* $u = 0$.

3. Заключительные замечания

1. Результаты данной работы без каких-либо осложнений переносятся на случай обобщенных процессов Пуассона с решетчатыми скачками, подчиняющимися условию С) Крамера. Изменения в доказательствах сведутся к замене интегралов суммами. Необходимые сведения о свойствах факторизационных компонент для этого случая содержатся в [12].

2. Во втором пункте условия С) предполагается, что при $\mu_1 \neq 0$ должно выполняться неравенство $\varphi(m_{\pm}) > 1$. Если $\varphi(m_{\pm}) = 1$, то результаты данной работы остаются справедливыми при дополнительном ограничении $\varphi'(\lambda_{\pm}) < \infty$ (см. [6, гл.4, теорема 11]).

3. Если $\varphi(m_{\pm}) < 1$, то экспоненциальный характер асимптотики вероятности разорения не сохраняется. В этой ситуации вероятность разорения является *надстепенной* (см. [6, гл.4, теорема 12]).

4. Случай $\varphi(m_{\pm}) = 1$, $\left|\varphi'(\lambda_{\pm})\right| = \infty$, оказывается «переходным» между двумя типами асимптотик: экспоненциальной и надстепенной. При этом характер «перехода» является достаточно сложным (см. [6, гл.4, п.5]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Семенов А.Т.* Асимптотические разложения вероятности разорения для процессов Леви. I // Вестник ТГУ. Приложение. 2006. № 19. С. 191 – 198.
2. *Семенов А.Т.* Асимптотические разложения вероятности разорения для процессов Леви. II // Там же. С. 198 – 202.
3. *Королюк В.С.* Граничные задачи для сложных пуассоновских процессов. Киев: Наукова думка, 1975.
4. *Фохт А.И.* О распределении величины первого перескока для обобщенного пуассоновского процесса // Теория вероятностей и ее применения. 1974. Т. 19. № 1. С. 159 – 163.
5. *Королюк В.С.*, *Боровских Ю.В.* Аналитические проблемы асимптотики вероятностных распределений. Киев: Наукова думка, 1981.
6. *Боровков А.А.* Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1972.
7. *Боровков А.А.* Новые предельные теоремы в граничных задачах для сумм независимых слагаемых // Сибирский математический журнал. 1962. Т. 3. № 5. С. 645 – 694.
8. *Kemperman J.H.B.* A Wiener-Hopf type method for a general random walk with a two-sided boundary // Ann. Math. Stat. 1963. V. 34. No. 4. P. 1168 – 1193.
9. *Лотов В.И.* Предельные теоремы в одной граничной задаче для случайных блужданий // Сибирский математический журнал. 1999. Т. 40. № 5. С. 1095 – 1108.
10. *Лотов В.И.* Асимптотический анализ распределений в двуграничных задачах. I. II // Теория вероятностей и ее применения. 1979. Т. 24. № 3. С. 475 – 485; 1979. Т. 24. № 4. С. 873 – 879.
11. *Бейтмен Г.*, *Эрдейн А.* Таблицы интегральных преобразований. Т.1. М.: Наука, 1969.
12. *Боровков А.А.*, *Рогозин Б.А.* Граничные задачи для некоторых двумерных случайных блужданий // Теория вероятностей и ее применения. 1964. Т. 9. № 3. С. 401 – 430.

Статья принята в печать 16.10.2008 г.