УДК 512.623

Е.А. Фомина

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ДВУМЕРНО УПОРЯДОЧЕННЫХ ПОЛЕЙ

В статье представлен метод построения бесконечно узких двумерно упорядоченных полей на базе линейно упорядоченного поля.

Ключевые слова: *линейно упорядоченные поля, базис трансцендентности, двумерно упорядоченные поля.*

Основные определения теории двумерно упорядоченных полей

Основные определения, относящиеся к теории двумерно упорядоченных полей, изложены в [1]. Приведем те из них, которые часто встречаются в тексте статьи.

1. Функция двумерного порядка ζ: $M^3 \to \{0, 1, -1\}$. Говорят, что двумерный порядок на множестве M реализуем на плоскости $\mathbf{R}^2$, если существует инъекция φ: $M \to \mathbf{R}^2$, такая что

$$\forall x, y, z \in M \quad \zeta(x, y, z) = \eta_2(\varphi(x), \varphi(y), \varphi(z)),$$

где η_2 – функция стандартной ориентации плоскости.

2. Поле K, на котором задан двумерный порядок, совместимый с алгебраической структурой поля, называется двумерно упорядоченным полем $<K, \zeta>$, или 2-упорядоченным полем.

3. Базой K_0 двумерно упорядоченного поля K называется множество

$$K_0 = \{x \in K | \zeta(0, 1, x) = 0\}.$$

База K_0 является линейно упорядоченным полем.

4. Верхним конусом K^u поля K называется множество

$$K^u = \{x \in \mathrm{K} | \zeta(0, 1, x) \geq 0\}.$$

Задание верхнего конуса K^u однозначно определяет двумерный порядок в поле K. Поэтому далее 2-упорядоченное поле будем обозначать $<K, K^u>$.

5. Элемент $a \in K^u \setminus K_0$ называется бесконечно близким к базе K_0 элементом, если $\forall n$, $\forall r \in K_0$, $r < a$,

$$(a - r)^n \in K^u \setminus K_0 .$$

Конструкция бесконечно узкого двумерно упорядоченного поля

Определение. Двумерно упорядоченное поле называется бесконечно узким, если все его элементы либо бесконечно близки к базе, либо являются элементами базы.

Пусть всюду далее $\langle K_0, \leq \rangle$ – линейно упорядоченное поле; a – трансцендентный над K_0 элемент. Имеет место следующая

Теорема 1 [3]. Рассмотрим поле $K_1 = K_0(a)$. Множество

$$K_1{}^u = \{f(a) \in K(a) | f'(a) \geq 0\}$$

задаёт в поле K_1 двумерный порядок, при котором поле K_1 является бесконечно узким.

Обобщённая конструкция построения бесконечно узких двумерно упорядоченных полей

Расширение линейно упорядоченного поля K_0 будем проводить следующим образом. Пусть B – базис трансцендентности топологического замыкания $\tilde{K}_0$ над K_0. На $\tilde{K}_0$ единственным образом продолжается линейный порядок с K_0. Рассмотрим поле $K = K_0(B)$. Элементами поля K являются дробно-рациональные функции $f_i(a_1, ..., a_n)$ с коэффициентами из поля K_0.

Теорема 2. Множество

$$K^u = \{f(a_1, ..., a_n) \in K \mid df(a_1, ..., a_n) \geq 0\},$$

где
$$df(a_1,...,a_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n\,;\; x_i = a_i;\; dx_i = 1,$$

задаёт в поле K структуру бесконечно узкого двумерно упорядоченного поля.

Доказательство. Для того чтобы K^u было верхним конусом 2-порядка на поле K, необходимо и достаточно выполнение следующих 4 условий [1]:

(a) $K^u + K^u = K^u$;

(b) $K^u \cup -K^u = K$;

(c) $(K^u \backslash \{0\})^{-1} = -K^u \backslash \{0\}$;

(d) если $x, z \in K^u$, $y \in K^u \backslash K_0$; $zy^{-1}, yx^{-1} \in K^u$, то $zx^{-1} \in K^u$.

Убедимся, что K^u есть верхний конус 2-порядка в поле K.

Проверим выполнение условий (a) – (d).

(a) Проверим замкнутость множества K^u относительно сложения.

Пусть $f(a_1, ..., a_n)$, $g(a_1, ..., a_n) \in K^u$. Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n} \geq 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial g}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial g}{\partial x_n} \geq 0$$

при $x_i = a_i$, где $f(a_1, ..., a_n)$, $g(a_1, ..., a_n) \in K$.

Но тогда имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n} + \frac{\partial g}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial g}{\partial x_n} \geq 0 \quad \text{при } x_i = a_i\,,$$

или
$$\frac{\partial (f+g)}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial (f+g)}{\partial x_n} \geq 0$$

Значит, $(f + g) \in K^u$.

Условие **(b)** выполнено. В самом деле, пусть $f(a_1, ..., a_n) \in K$. Тогда либо $df(x_1, ..., x_n) \geq 0$ при $x_i = a_i$, либо $df(x_1, ..., x_n) \leq 0$ при $x_i = a_i$. В первом случае получаем, что $f(a_1, ..., a_n) \in K^u$, а во втором $-f(a_1, ..., a_n) \in -K^u$. Значит, $K^u \in -K^u = K$.

(c) Пусть $f(a_1, ..., a_n) \in (K^u \backslash \{0\})^{-1}$, значит, $f^{-1}(a_1, ..., a_n) \in K^u \backslash \{0\} \leftrightarrow f^{-1}(a_1, ..., a_n) \geq 0 \leftrightarrow$

$$df^{-1}(a_1,...,a_n) = -\frac{\partial f(a_1,...,a_n)}{f^2(a_1,...,a_n)} \geq 0$$

$\leftrightarrow df(a_1, ..., a_n) \leq 0 \leftrightarrow f(a_1, ..., a_n) \in -K^u \backslash \{0\}$.

Докажем, что условие **(d)** для K^u также выполнено.

Пусть $f(a_1, ..., a_n)$, $g(a_1, ..., a_n) \in K^u$, $h(a_1, ..., a_n) \in K^u \backslash K_0$, hf^{-1}, $gh^{-1} \in K^u$. Покажем, что $gf^{-1} \in K^u$.

Имеем
$$d(hf^{-1}) \geq 0, \quad d(gh^{-1}) \geq 0,$$
т. е.
$$\frac{fdh - hdf}{f^2} \geq 0; \ \frac{hdg - gdh}{h^2} \geq 0;$$
$$fdh - hdf \geq 0; hdg - gdh \geq 0. \qquad (*)$$

Так как $f(a_1, ..., a_n)$, $g(a_1, ..., a_n) \in K^u$, $h(a_1, ..., a_n) \in K^u \backslash K_0$, т.е. $df \geq 0$, $dh > 0$, $dg \geq 0$, то умножим первое неравенство из (*) на dg, а второе неравенство на df. Имеем
$$fdhdg - hdfdg \geq 0; hdgdf - gdhdf \geq 0,$$
или
$$fdhdg \geq hdfdg \geq gdhdf \geq 0,$$
или
$$fdhdg - gdhdf \geq 0.$$

Умножая последнее неравенство на $(dh)^{-1}$, $dh > 0$, имеем
$$fdg - gdf \geq 0,$$
значит, и
$$\frac{fdg - gdf}{f^2} \geq 0, \text{ т.е. } d(gf^{-1}) \geq 0,$$
следовательно, $gf^{-1} \in K^u$, что и требовалось доказать.

Таким образом, в поле $K = K_0(B)$ эффективно задан нетривиальный двумерный порядок.

Покажем, что K – бесконечно узкое двумерно упорядоченное поле.

Пусть $f(a_1, ..., a_n) \in K^u \backslash K_0$. Докажем, что, для любого натурального n, для любого $r \in K_0$, такого, что $r < f(a_1, ..., a_n)$
$$(f - r)^n \in K^u \backslash K_0.$$

Чтобы элемент $(f - r)^n$ принадлежал открытому верхнему конусу, необходимо и достаточно, чтобы
$$d((f - r)^n) > 0.$$

Действительно, имеем для любого натурального n $[n(f - r)^{n-1}df] > 0$, так как $df > 0$ (по определению принадлежности к верхнему конусу), $(f - r) > 0$ (в силу того, что $K = K_0(B)$ является также и линейно упорядоченным полем), и, значит, согласно определению, $f(a_1, ..., a_n)$ – бесконечно близкий к K_0 элемент. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пестов Г.Г.* Двумерно упорядоченные поля. Томск, 2003.
2. *Пестов Г.Г.*, *Фомина Е.А.* О сечениях в базе 2-упорядоченного поля // Вестник ТГУ. 2007. № 301. С. 94 – 96.
3. *Пестов Г.Г.*, *Фомина Е.А.* Конструкция бесконечно узкого двумерно упорядоченного поля // Вестник ТГУ. Математика и механика. 2007. № 1. С. 50 – 53.

Статья принята в печать 24.10.2008 г.