

УДК 62-503.55

С.В. Архипов

РАСЧЕТ ДИНАМИКИ ЛИНЕЙНЫХ УПРУГО СВЯЗАННЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ С УПРУГО ПРИСОЕДИНЕННЫМИ МАССАМИ В ПРОГРАММНОМ ПАКЕТЕ «MOCODISS»

Излагается общий подход в реализации алгоритмов расчета поперечных колебаний одномерных стержневых систем с массами на основе применения метода сплайн-преобразования координат. Приводится описание программного пакета MOCODISS, реализующего данный метод. Проведен сравнительный анализ точности расчетов на ряде модельных задач. Выявлен вычислительно значимый диапазон изменения жесткости упругих шарниров, связывающих стержни одномерной системы.

Ключевые слова: колебания, стержневая одномерная система, упругие шарниры, цепочки дискретных масс, метод сплайн-преобразования координат, программная реализация.

Необходимость создания надежных, прочных машиностроительных конструкций с минимальными затратами создает потребность в современных программных системах для их расчета и оптимального проектирования. Использование таких программных систем позволяет качественно выполнять расчеты, сократить цикл проектирования, выполнить диагностику существующих деталей и конструкций.

Программный пакет MOCODISS (*Modeling of Continuous-Discrete Systems*) предназначен для осуществления прочностного расчета и оптимального проектирования непрерывно-дискретных конструкций в виде стержневой системы, нагруженной цепочками упруго связанных масс.

В основу алгоритмов MOCODISS заложен расчет задач динамики и статики линейных стержневых систем аналитическим методом сплайн-преобразования координат, отличающимся учетом упругих шарниров, неоднородного упругого основания и упруго присоединенных разветвляющихся цепочек масс.

Основы теории сплайн-приближений и некоторых ее применений заложены в работах Дж. Алберга, Э. Нильсона, Дж. Уолша [1], А. Сарда, С. Вейнтрауба, Н.П. Корнейчука [6] и др. Существенный вклад в разработку аналитических методов исследования статики, динамики и устойчивости стержней и одномерных стержневых систем на основе сплайн-преобразований координат внесли В.А. Лазарян [7], С.И. Конашенко, Е.Т. Григорьев, Н.Б. Тульчинская, Н.Е. Наumenко и др.

Построение расчетных схем

При создании расчетной схемы стержневая система аппроксимируется достаточно большим числом $n + 1$ однородных частей, связанных упругими шарнирами (рис. 1). Предполагается, что каждая однородная часть расположена на однородном (за исключением сосредоточенных включений) упругом основании. Все связи между частями стержня осуществлены упругими шарнирами с двумя характеристиками жесткости k_{M_i} и k_{Q_i} (рис. 2). На каждом однородном участке имеется

N точечных масс M_{rq} ($r = \overline{1, n+1}$, $q = \overline{1, N}$), жестко прикрепленных в сечениях $x = d_{rq}$. Кроме того, сечения $x = d_{rq}$ упруго защемлены с жесткостью k_{2rq} , и в том же сечении имеется упругая опора стержня с жесткостью k_{1rq} . В сечениях $x = d_{rq}$ стержневой системы упруго присоединены цепочки сосредоточенных масс $M_{rqp\ell}$, соединенных между собой упругими элементами жесткости $c_{rqp\ell}$. При этом каждая система масс прикреплена только к одному сечению составного стержня. В некоторых сечениях к стержню может быть присоединено несколько одномерных систем масс. Любая масса одномерной системы в свою очередь упруго прикреплена с жесткостью $\tilde{c}_{rqp\ell}$ к неподвижному основанию. В индексе $rqp\ell$ буква r означает номер участка стержня, q – номер сечения, p – номер одномерной системы масс из прикрепленных к данному сечению стержня, $p = \overline{1, P}$, ℓ – номер массы в одномерной цепочке, отсчитываемой от сечения стержня, $\ell = \overline{1, K}$.

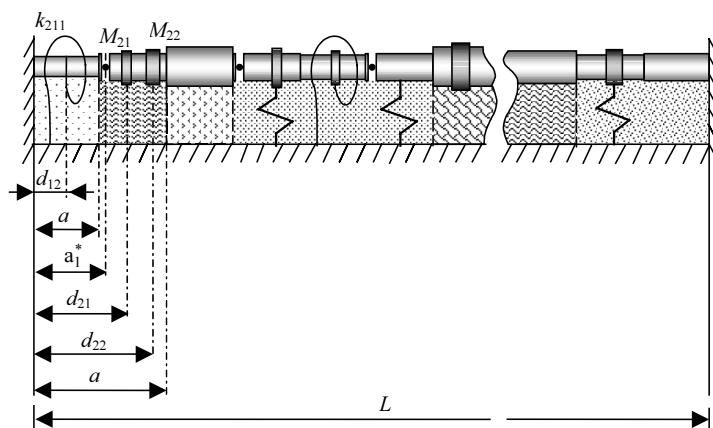


Рис. 1. Схема непрерывно-дискретной системы, состоящей из стержневой системы и упругого основания

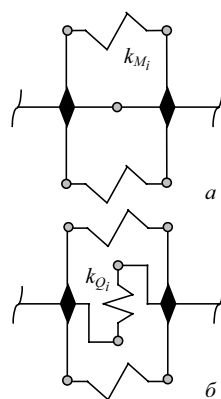


Рис. 2. Схемы упругих шарниров: а – первого рода; б – второго рода

Для облегчения преобразований формул, содержащих обобщенные функции, принято, что точечные включения в жесткость стержня (упругие шарниры) расположены бесконечно близко к сечениям скачков $x = a_i$, но не в сечениях скачков жесткости и интенсивности массы. Для краткости обозначено $a_i^* = a_i + 0$. В случае сосредоточенных включений в интенсивность массы и параметры основания на концах стержня эти включения сдвигаются на бесконечно малые расстояния так, чтобы они оказались внутри стержневой системы.

Принятые допущения, особенно в части постановки индексов и пределов их изменения, нуждаются в пояснениях. То обстоятельство, что для жестко прикрепленных масс M_{rq} и точечных включений в жесткость основания k_{1rq} , k_{2rq} приняты одинаковые индексы, не означает, что в каждом сечении $x = d_{rq}$ имеются масса M_{rq} , упругая опора жесткости k_{1rq} и упругое защемление сечения жесткости k_{2rq} . Некоторые из этих масс и жесткостей могут быть равными нулю, а это означает,

что соответствующих масс и связей не существует. Однако принято, что на каждом участке стержня с номером n последовательно нумеруются все сечения $x = d_{rq}$, в которых находится хотя бы один из перечисленных элементов. При этом число N сечений $x = d_{rq}$ принимаем максимальным, достигаемым на каком-то из $(n+1)$ участков рассматриваемой стержневой системы. Подобные рассуждения относятся и к наличию в расчетной схеме упругих шарниров, упругого кусочно-постоянного основания и упруго присоединенных цепочек масс.

Изложенный принцип построения расчетных схем позволяет рассматривать достаточно широкий класс механических конструкций, объединенных общим математическим описанием.

Математическая модель

Математическая формулировка задачи о собственных колебаниях составного стержня на упругом основании с упруго присоединенными цепочками дискретных масс с учетом сил диссипации по Фойгту приводит [2] к дифференциальному уравнению в частных производных и системе обыкновенных дифференциальных уравнений (1) при начальных условиях (2) и одном из краевых условий вида (3).

$$\begin{aligned} & \left(1 + \mu_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[k_2(x) \frac{\partial w}{\partial x} \right] + k_1(x) w \right\} + m(x) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial w}{\partial t} \right] = \\ & = \sum_{r=1}^{n+1} \sum_{q=1}^N \sum_{p=1}^P c_{rqpl} \left(1 + \mu_1 \frac{d}{dt}\right) [y_{rqpl}(t) - w(d_{rq}, t)] \sigma_1(x - d_{rq}), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & M_{rqpl} [\ddot{y}_{rqpl} + \mu_0 \dot{y}_{rqpl}] + \left(1 + \mu_1 \frac{d}{dt}\right) \times \\ & \times \{ c_{rqpl} (y_{rqpl} - y_{rq, \ell-1}) + c_{rq, \ell+1} (y_{rqpl} - y_{rq, \ell+1}) + \tilde{c}_{rqpl} y_{rqpl} \} = 0; \\ & w(x, 0) = w_0(x), \quad w(x, 0) = \dot{w}_0(x), \quad y_{rqpl}(0) = \ddot{y}_{rqpl0}, \quad \dot{y}_{rqpl}(0) = \dot{y}_{rqpl0}, \\ & r = \overline{1, n+1}, \quad q = \overline{1, N}, \quad p = \overline{1, P}, \quad \ell = \overline{1, K}; \end{aligned} \quad (2)$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0; \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (3)$$

В системе (1) обозначено $w(x, t)$ – динамический прогиб стержневой системы; $y_{rqpl}(t)$ – перемещения массы M_{rqpl} ; σ_0 и σ_1 – соответственно функция единичного скачка (функция Хевисайда) и единичная импульсная функция (функция Дирака); μ_0 и μ_1 – коэффициенты внешнего и внутреннего вязкого сопротивления по Фойгту; $EI(x)$ и $m(x)$ – распределенные параметры изгибной жесткости (4) и интенсивности массы (5) стержневой системы; $k_1(x)$, $k_2(x)$ – распределенные параметры неоднородного упругого основания стержневой системы (6).

$$\begin{aligned} EI(x) = EI_0 & \left\{ \left[1 + \sum_{i=1}^n \alpha_i \sigma_0(x - a_i) \right]^{-1} + \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^n \left[\left(-\frac{EI_0}{k_{Qi}} \left(\frac{Z'(a_i^*)}{Z(a_i^*)} \right)^2 + \frac{EI_0}{k_{Mi}} \right) \sigma_1(x - a_i^*) - \frac{EI_0}{k_{Qi}} \frac{Z'(a_i^*)}{Z(a_i^*)} \sigma_2(x - a_i^*) \right] \right\}^{-1}; \end{aligned} \quad (4)$$

$$m(x) = m_0 \left\{ 1 + \sum_{i=1}^n \beta_i \sigma_0(x - a_i) + \sum_{r=1}^{n+1} \sum_{q=1}^N \frac{M_{rq}}{m_0} \sigma_1(x - d_{rq}) \right\}; \quad (5)$$

$$k_1(x) = \bar{k}_0 \left\{ 1 + \sum_{i=1}^n \bar{k}_i \sigma_0(x - a_i) + \sum_{r=1}^{n+1} \sum_{q=1}^N \frac{k_{1rq}}{\bar{k}_0} \sigma_1(x - d_{rq}) \right\}, \quad k_2(x) = \sum_{r=1}^{n+1} \sum_{q=1}^N k_{2rq} \sigma_1(x - d_{rq}). \quad (6)$$

В (4) – (6) и далее $Z = -M(x) \cdot (EI_0)^{-1} = I(x) \cdot (I_0)^{-1} \cdot X''$ – взятый с коэффициентом $-(EI_0)^{-1}$ изгибающий момент $M(x)$ в сечении x ; EI_0 , m_0 и $\bar{k}_0$ – соответственно изгибная жесткость, интенсивность массы и жесткость основания на базисном, например первом, участке стержня при $0 < x < a_1$; α_i , β_i и $\bar{k}_i$ – параметры скачков момента инерции, интенсивности массы и жесткости упругого основания в сечениях $x = a_i$.

Для решения задачи (1) – (3) применялся метод разделения переменных, согласно которому сначала разыскиваются частные нетривиальные решения системы (1), удовлетворяющие только крайевым условиям (3) вида $T(t)X(x)$ и $A_{rq\ell}T(t)$. В результате из второй части системы (1), описывающей движение дискретного множества масс, получены рекуррентные соотношения для определения амплитуд $A_{rq\ell}$ перемещений каждой дискретной массы $M_{rq\ell}$ относительно перемещений сечений $x = d_{rq}$ крепления $rq\ell$ -й цепочки к стержню:

$$A_{rq\ell, \ell+1} = -\frac{1}{\bar{\omega}_{rq\ell}} \left[A_{rq\ell, \ell-1} \bar{\omega}_{rq\ell}^2 + A_{rq\ell} (v^2 - \tilde{\omega}_{rq\ell}^2) \right], \quad \ell = 1, K_{rq} - 1. \quad (7)$$

Для (7) следует принять $A_{rq\ell} = A_{rq\ell}^* X(d_{rq})$, где

$$A_{rq\ell}^* = \frac{\omega_{rq\ell}^2}{\tilde{\omega}_{rq\ell}^2 - v^2} - \frac{\bar{\omega}_{rq\ell}^2 \omega_{rq\ell}^2}{\tilde{\omega}_{rq\ell}^2 - v^2} - \frac{\bar{\omega}_{rq\ell}^2 \omega_{rq\ell}^2}{\tilde{\omega}_{rq\ell}^2 - v^2} \dots \frac{\bar{\omega}_{rq\ell}^2 \omega_{rq\ell}^2}{\tilde{\omega}_{rq\ell}^2 - v^2}.$$

В последней формуле для написания цепной дроби использовано правило Роджерса, т.е. знак «–», которым заканчивается знаменатель дроби, показывает, что последующая дробь должна быть поставлена в знаменателе, а также обозначены квадраты парциальных частот:

$$\omega_{rq\ell}^2 = \frac{c_{rq\ell}}{M_{rq\ell}}, \quad \tilde{\omega}_{rq\ell}^2 = \frac{c_{rq\ell} + c_{rq\ell, \ell+1} + \tilde{c}_{rq\ell}}{M_{rq\ell}}, \quad \bar{\omega}_{rq\ell}^2 = \frac{c_{rq\ell, \ell+1}}{M_{rq\ell}}.$$

Далее, построен алгоритм [2], по которому задача о колебаниях стержневой системы с упруго присоединенными цепочками дискретных масс приводится к задаче о колебаниях стержневой системы с жестко присоединенными приведенными массами M_{rq}^*

$$\begin{aligned} X'' = & \left\{ \left[1 + \sum_{i=1}^N \alpha_i \sigma_0(x - a_i) \right]^{-1} + \sum_{i=1}^n \frac{EI_0}{k_{Mi}} \sigma_1(x - a_i^*) \right\} Z - \sum_{i=1}^n \frac{EI_0}{k_{Qi}} Z'(a_i^*) \sigma_2(x - a_i^*), \\ Z'' = & \lambda^4 \left\{ 1 - \frac{\bar{k}_0}{m_0 v^2} + \sum_{i=1}^n \left[\beta_i - \frac{\bar{k}_i \bar{k}_0}{m_0 v^2} \right] \sigma_0(x - a_i) \right\} X + \\ & + \sum_{r=1}^{n+1} \sum_{q=1}^N \left\{ \left[\frac{M_{rq}^* \lambda^4}{m_0} - \frac{k_{1rq}}{EI_0} \right] X(d_{rq}) \sigma_1(x - d_{rq}) + \frac{k_{2rq}}{EI_0} X'(d_{rq}) \sigma_2(x - d_{rq}) \right\}, \end{aligned} \quad (8)$$

определяемыми по формуле

$$M_{rq}^* = M_{rq} + \sum_{p=1}^P M_{rqp1} \frac{\omega_{rqp1}^2}{v^2} [A_{rqp1}^* - 1]. \quad (9)$$

Во втором из уравнений (8) выражение $\lambda^4 = m_0 v^2 (EI_0)^{-1}$ определяет собственные числа задачи λ .

Уравнения (8) содержат кусочно-постоянные и сингулярные коэффициенты. Применив к (8) сплайн-преобразование координат вида

$$x = \gamma_0 \xi + \sum_{i=1}^n \gamma_i (\xi - b_i) \sigma_0 (\xi - b_i), \quad (10)$$

получим уравнение для форм собственных колебаний $X(\xi)$:

$$\begin{aligned} X_{\xi}^{IV} - \lambda^4 X = & \sum_{\alpha=0}^1 \sum_{r=1}^{n+1} \sum_{q=1}^N h_{\alpha r q} X_{\xi}^{(\alpha)}(c_{rq}) \sigma_{\alpha+1}(\xi - c_{rq}) + \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{i=1}^n \varsigma_{\alpha i} X_{\xi}^{(\alpha)}(b_i - 0) \sigma_{4-\alpha}(\xi - b_i) + \\ & + \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{i=1}^n e_{\alpha i} X_{\xi}^{(\alpha+1)}(b_i - 0) \sigma_{\alpha+2}(\xi - b_i^*). \end{aligned} \quad (11)$$

Если построить решение уравнения (11) операционным методом и исключить затем промежуточные параметры $X_{\xi}^{(\alpha)}(c_{rq})$ и $X_{\xi}^{(\alpha)}(b_i - 0)$, то формы $X(\xi)$ могут

быть найдены в виде $X(\xi) = \sum_{\zeta=0}^3 X_{\xi}^{(\zeta)}(0) \Phi_{\zeta}(\xi)$, где функции $\Phi_{\zeta}(\xi)$, $\zeta = 1, 2, 3, 4$

можно интерпретировать как обобщенные функции А.Н. Крылова [2].

Далее, из краевых условий (3) известным образом определяются собственные числа λ_s ($s = 1, 2, 3, \dots$) задачи. Затем для каждого собственного числа λ_s рассчитываются формы собственных колебаний $X_s(\xi)$ и соответствующие им собственные частоты v_s . Наконец, применяя обратное сплайн-преобразование аргумента [2] формы собственных колебаний $X_s(\xi)$ пересчитываются по исходной координате x . Выводится условие ортогональности форм собственных колебаний непрерывно-дискретной системы и определяется общее решение задачи (1) – (3).

Полученные аналитические выражения позволяют составить сравнительно несложные алгоритмы вычислений на ЭВМ собственных характеристик непрерывно-дискретной системы.

Программный пакет MOCODISS

MOCODISS предоставляет средства для создания расчетных моделей в интерактивном режиме с использованием графического и табличного редакторов. Имеются визуальные средства для включения в расчетную схему стержневых элементов с кусочно-постоянными параметрами, упругих шарниров с одной или двумя степенями свободы, жестко закрепленных масс, отдельных упругих опор с одной или двумя характеристиками жесткости, неоднородного упругого основания и упруго присоединенных к стержням цепочек масс.

MOCODISS является многооконным приложением, т.е. пользователь, к примеру, может одновременно использовать табличный и графический редакторы. В интерфейс MOCODISS включены такие функции редактирования, как отмена действия, копирование, выделение частей составной конструкции, диагностика исходных данных и др.

В режиме просмотра результатов расчета пользователю доступны формы собственных колебаний и эпюры усилий в стержневых элементах в графическом и

табличном варианте. Предоставляется возможность сохранения и распечатки графической и текстовой информации.

Примеры вычислений в программном пакете MOCODISS

Для обоснования точности разработанных алгоритмов, реализованных в MOCODISS, проведены многочисленные сравнения с известными точными и численными решениями тестовых задач. Следующие примеры представляют лишь часть из них. Здесь для сравнительного анализа использовался программный пакет COMPASS [4], реализующий метод конечных элементов (КЭ).

Для тестирования точности разработанного метода рассматривалась задача о собственных колебаниях консольного стержня [5], высота которого уменьшается по линейному закону, а ширина равна единице (рис. 3). Стержень длиной $0,1 \cdot L$ разбивался на десять равных частей, начиная от свободного конца. При $0 < x < x_1$ жесткость $EI_0 = 0,2995Eb^3/3$, а интенсивность массы $m_0 = 0,4667b\rho$, где ρ – плотность материала. Значения $\alpha_i, i = \overline{1,9}$ принимались равными 1,29; 2,11; 3,14; 4,37; 5,80; 7,44; 9,30; 11,34; 13,66. Длина b равна 0,25 м, длина стержня L – 15 м, модуль упругости материала $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, а плотность материала $\rho = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м³.

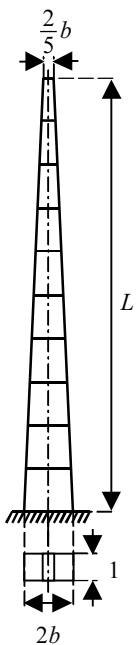


Рис. 3. Консольный стержень, ширина которого равна единице, а высота уменьшается по направлению к свободному концу по линейному закону

В табл. 1 приведены результаты вычислений низших собственных частот ν_i и соответствующих им чисел $\tilde{\lambda}_i = \lambda_i L$ консольного стержня по программам MOCODISS, COMPASS и точные значения чисел $\tilde{\lambda}_i$ [5].

Таблица 1

Собственные частоты ν_i (Гц) и соответствующие им числа $\tilde{\lambda}_i$ консольного стержня, изображенного на рис. 3

i	MOCODISS		COMPASS				Точное значение
	ν_i	$\tilde{\lambda}_i$	10 КЭ		20 КЭ		
			ν_i	$\tilde{\lambda}_i$	ν_i	$\tilde{\lambda}_i$	$\tilde{\lambda}_i$
1	44,475	4,134	44,478	4,134	44,478	4,134	4,134
2	162,839	7,910	162,859	7,911	162,841	7,911	7,909
3	381,429	12,107	381,632	12,110	381,448	12,107	12,105
4	704,647	16,456	705,663	16,467	704,730	16,457	-
5	1133,817	20,874	1137,226	20,905	1134,135	20,877	-

При расчете собственных частот по программе COMPASS консольный стержень разбивался на 10 участков согласно рис. 3. Параметры жесткости и интенсивности массы стержневых КЭ соответствовали значениям, принятым выше. Для исследования сходимости результатов просчитан случай, когда посередине каждого стержневого КЭ находился дополнительный узел. Из табл. 1. видно, что при

увеличении числа КЭ результаты сходятся к значениям собственных частот, вычисленных по программе MOCODISS.

Рис. 4, а иллюстрирует формы собственных колебаний консольного стержня, вычисленные по программе MOCODISS. Формы, вычисленные по программе MOCODISS, нормированы по их значению на левом конце стержня. При сравнении их с формами, полученными по программе COMPASS (рис. 4, б), следует учитывать, что в COMPASS формы собственных колебаний нормируются по значению $\varphi^T \cdot M \cdot \varphi$, где φ – собственный вектор, а M – матрица масс. Поэтому третья и четвертая формы колебаний стержня, вычисленные по программам MOCODISS и COMPASS, симметричны относительно оси абсцисс. С учетом этого замечания можно отметить хорошее качественное соответствие форм собственных колебаний для данного примера.

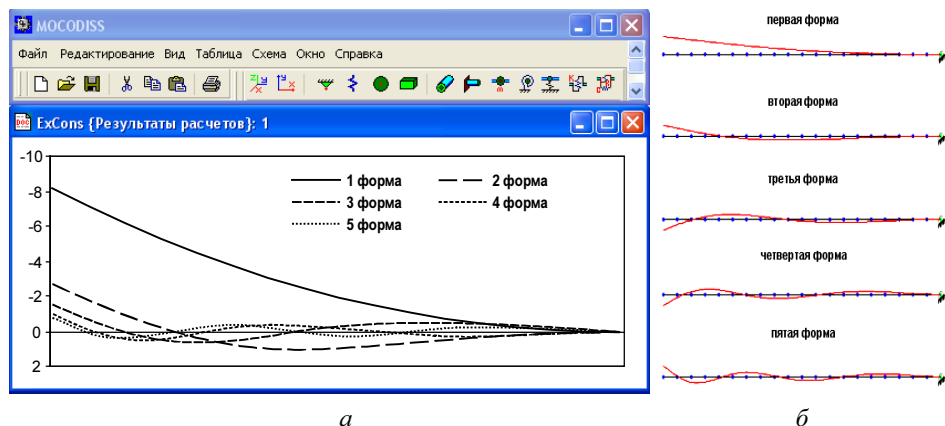


Рис. 4. Формы собственных колебаний консольного стержня построенные: а – по программе MOCODISS, б – по программе COMPASS

Для тестирования алгоритма учета упругих шарниров и дискретных масс рассматривалась задача о собственных колебаниях составного стержня с сингулярной податливостью, обусловленной упругими шарнирами первого и второго рода с упруго присоединенными цепочками дискретных масс (рис. 5). Составной стержень длиной 100 м состоит из пяти однородных стержней равной длины. Первый и второй стержни соединены упругим шарниром второго рода, а четвертый и пятый – шарниром первого рода. Параметры стержневой системы приведены в табличном редакторе (рис. 5). В табл. 2 указаны параметры цепочек масс.

Результаты расчетов собственных частот составной конструкции в сравнении с данными анализа по программе COMPASS приведены в табл. 3. При расчетах по программе COMPASS упругие элементы цепочек масс моделировались в виде невесомых стержней длиной 1 м. При этом жесткость на растяжение и сжатие каждого стержня принималась равной соответствующему значению c_{rqp} табл. 2, а жесткость при изгибе $EI=10^{15}$ Н·м⁻¹. Упругие элементы шарниров также моделировались в виде невесомых стержней с продольной жесткостью, равной k_{Mi} или k_{Qi} , и с жесткостью на изгиб $EI=10^{15}$ Н·м⁻¹. Как и выше, расчеты проводились для двух вариантов. Из табл. 3 видно, что при увеличении числа КЭ значения собственных частот, полученных при использовании системы COMPASS, сходятся к значениям, полученным по программе MOCODISS.

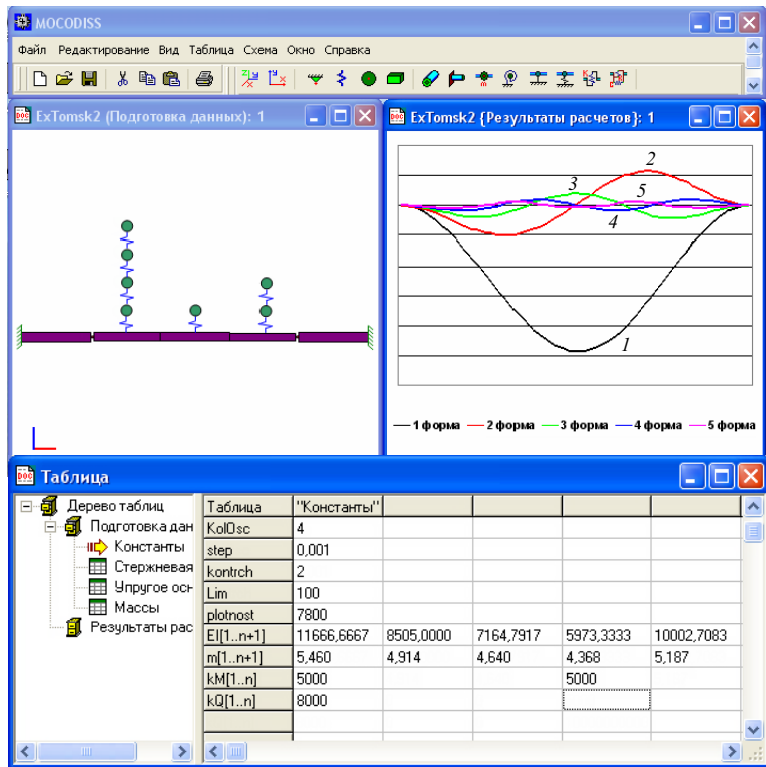


Рис. 5. Рабочие окна программы MOCODISS с открытыми окнами проекта

Как видно на рис. 5, графики форм собственных колебаний стержня не имеют разрывов непрерывности в сечениях с сингулярной податливостью стержня. Наблюдается лишь негладкость первой формы в точках, соответствующих упругим шарнирам. Это объясняется достаточно большой жесткостью упругих шарниров.

Таблица 2

Параметры цепочек масс модели изображенной
в рабочем окне проекта на рис. 5

r	q	p	d_{rp} , м	M_{rp} , т	c_{rp} , МН/м
2	1	1	30	4	600
		2		4	600
		3		4	600
		4		4	600
3	1	1	50	10	600
		2		-	-
		3		-	-
		4		-	-
4	1	1	70	2	200
		2		2	200
		3		-	-
		4		-	-

Таблица 3

Собственные частоты (Гц) динамической системы, изображенной на рис. 5

Номер тона	MOCODISS	COMPASS	
		10 стержневых КЭ	16 стержневых КЭ
1	2,9759	2,9898	2,9896
2	7,7812	7,9144	7,9142
3	14,9055	15,4213	15,4212
4	25,5431	26,4494	26,4494
5	36,9362	37,5433	37,5432

Приведенный пример показывает, что жесткость упругих шарниров оказывает существенное влияние на динамические характеристики составных конструкций. В этой связи проводились расчеты в широком диапазоне изменения жесткостных характеристик упругих шарниров. Одно из тестирований динамических характеристик проводились на конструкции, рассмотренной выше. При этом варьировались жесткости упругого шарнира второго рода при $k_{M1} = k_{Q1}$. Остальные параметры составной конструкции оставались без изменения.

Результаты расчетов низших собственных частот вариантов исполнения конструкции приведены на рис. 6. Здесь для каждого тона колебаний приведены две линии. Верхняя линия соответствует значениям собственных частот, вычисленным по программе COMPASS, а нижняя – MOCODISS. По оси абсцисс отложены значения жесткости упругого шарнира второго рода.

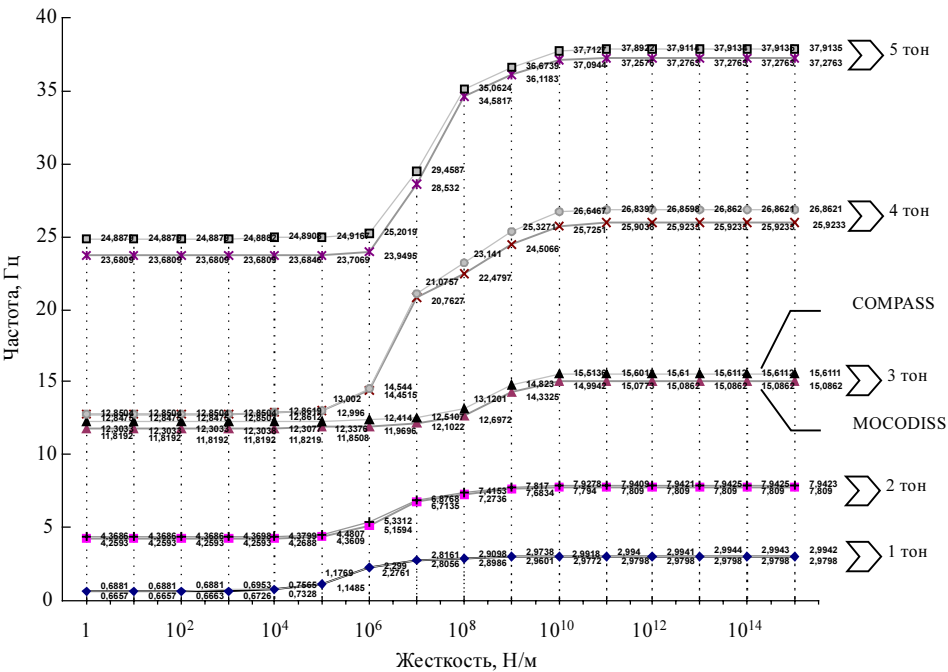
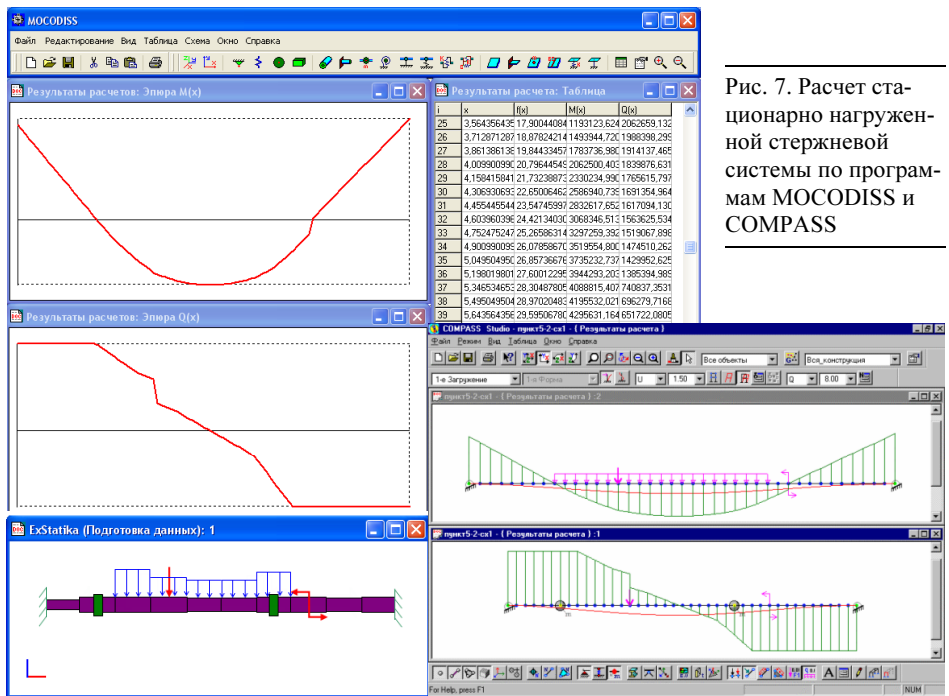


Рис. 6. Значения собственных частот конструкции, вычисленные по программам MOCODISS и COMPASS для различных вариантов жесткости упругого шарнира второго рода

Как видно из рис. 6, изменение жесткости упругого шарнира второго рода в диапазоне значений $k_{M1} = k_{Q1} < 10^5$ и $k_{M1} = k_{Q1} > 10^{12}$ (Н·м⁻¹) не приводит к существенным изменениям собственных частот системы. В свою очередь, при вариациях жесткости упругого шарнира в диапазоне от 10^5 до 10^{12} Н·м⁻¹ собственные частоты системы изменяются значительно. Приведенные рассуждения подтвердились и на ряде других модельных задач, что позволило определить вычислительно значимый диапазон изменения жесткости упругих шарниров в виде системы неравенств

$$\frac{\max_{i=1,n+1} EI_i}{\min_{i=1,n} k_{Mi}} < 10^5, \quad \frac{\max_{i=1,n+1} EI_i}{\min_{i=1,n} k_{Qi}} < 10^5, \quad 10^{-2} < \frac{\max_{i=1,n+1} EI_i}{\max_{i=1,n} k_{Mi}}, \quad 10^{-2} < \frac{\max_{i=1,n+1} EI_i}{\max_{i=1,n} k_{Qi}}.$$

Кроме динамических задач рассматривались задачи о стационарном нагружении стержневых систем. Вопрос о построении математической модели стационарного нагружения стержневой системы с упруго присоединенными цепочками масс на упругом неоднородном основании подробно рассмотрен в работе [2]. Приведем расчет напряженно-деформированного состояния составного стержня (рис. 7) от действия ступенчатой нагрузки сосредоточенной силы и момента.



Стержень длиной 15 метров имеет 10 ступеней равной длины, значения скачков момента инерции α_i : 0,5880; 0,3652; -0,3652; -0,3166; 0; 0,6817; -0,3652; -0,3166; 0,3166; значения скачков распределенной массы β_i : 0,1667; 0,0833; -0,0833; -0,0833; 0; 0,1667; -0,0833; -0,0833; 0,0833. Для первого (левого) участка $m_0 = 1,872$ т·м⁻¹, $EI_0 = 1440$ МН·м². В сечениях $d_{21} = 2,25$ м и $d_{71} = 9,75$ м стержня жестко закреплены массы $M_{21} = 2$ т и $M_{71} = 5$ т. Параметры ступенчатой нагрузки (в обозначениях [2]) следующие: $Q_{21} = Q_{22} = 500$ МН, $Q_{31} = Q_{32} = 300$ МН,

$Q_{41} = Q_{42} = Q_{51} = Q_{52} = 400$ МН и $Q_{61} = Q_{62} = 900$ МН. В сечениях с координатами $d_{41} = 5,25$ м и $d_{81} = 11,25$ м приложены сосредоточенные соответственно сила $P_{41} = 600$ МН и момент $G_{81} = 900$ МН·м.

На рис. 7 представлены результаты расчетов изгибающих моментов и поперечных сил статически нагруженного составного стержня в сравнении с COM-PASS. Как и ожидалось, эпюра изгибающих моментов имеет скачок в сечении приложения сосредоточенного момента. В свою очередь, эпюра поперечных сил имеет скачок в сечении приложения внешней сосредоточенной силы. В окрестности скачков интенсивности внешней нагрузки эпюра поперечных сил негладкая. Эти результаты хорошо согласуются с общим представлением поведения функций $M(x)$ и $Q(x)$. Из рис. 7 можно отметить хорошее соответствие эпюр изгибающих моментов и поперечных сил, вычисленных по программам COMPASS и MOCODISS.

Заключение

Результаты сравнительного анализа на примере расчетов многовариантных модельных задач свидетельствуют о вычислительной эффективности программного пакета MOCODISS. Показано, что значения собственных частот, вычисленные при помощи метода конечных элементов, сходятся к результатам, полученным по программе MOCODISS при увеличении дискретизации конечно-элементной расчетной схемы. Определен диапазон изменения жесткости упругих шарниров второго рода, существенно влияющий на собственные частоты стержневой системы.

Примеры сравнения программ MOCODISS и COMPASS показывают возможность применения разработанной программы для выработки рекомендаций по выбору конечно-элементной модели стержневых систем с учетом необходимой точности решения поставленной задачи.

В перспективе развития программного пакета рассматривается расширение базовых элементов расчетной схемы добавлением упруго связанных твердых тел, а также пластин в качестве несущего основания [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. М.: Мир, 1972.
2. Архипов С.В. Обобщенные функции в задачах механики составных конструкций. Улан-Удэ: Изд-во Бурятского госуниверситета, 2007. 160 с.
3. Архипов С.В. Собственные колебания пластины с упруго присоединенными одномерными цепочками твердых тел на упругом основании // V Междунар. науч. конф. «Прочность и разрушение материалов и конструкций»: Материалы конф. 12 – 14 марта 2008 г., Оренбург, Россия / Науч. ред. С.Н. Летута, Г.В. Клевцов. Оренбург: ИПК ГОУ ОГУ, 2008. Т. 2. С. 399 – 404.
4. Безделев В.В., Буклемишев А.В. Программная система COMPASS: руководство пользователя. Иркутск: Изд-во Иркутск. гос. техн. ун-та, 2000.
5. Бисплингхофф Р.Л., Эшли Х., Халфмен Р.Л. Аэроупругость. М., 1958.
6. Корнейчук Н.П., Луштай Н.Е. Наилучшие квадратурные формулы для классов дифференцируемых функций и кусочно-полиномиальное приближение // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1969. Т. 33. № 6.
7. Лазарян В.А., Конашенко С.И. Преобразование аргумента в задачах о поперечных колебаниях стержней // Прикл. матем. 1972. Т. 8. № 7.