

УДК 532+681.3

А.М. Бубенчиков, В.С. Попонин, В.Н. Мельникова

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ¹

В работе описана математическая постановка и решение пространственных краевых задач методом спектральных элементов. Основной упор сделан на дискретизацию трехмерного уравнения Пуассона. В работе приведен подробный вывод преобразований координат, необходимых для решения задачи в областях сложной геометрии.

Ключевые слова: метод спектральных элементов, уравнение Пуассона, неструктурированные сетки, вязкая жидкость.

1. Спектральный метод

Принцип, лежащий в основе всех сеточных методов, заключается в сведении исходных дифференциальных уравнений в частных производных к системе алгебраических уравнений, которые могут быть решены известными методами. В глобальном спектральном методе решение ищется путём разложения в ряд по некоторой системе ортогональных функций, называемых базисными. Имея представления искомых функций в спектральном пространстве, то есть определив их в виде разложения по базисным функциям, в глобальном спектральном методе строится система интегральных соотношений, получающихся умножением исходных или преобразованных дифференциальных уравнений на тестовую функцию, и далее проводится интегрирование по всей области. Использование глобального спектрального метода ограничено областями простой геометрической формы, что существенно сужает его применимость к реальным физическим процессам.

Метод спектральных элементов основан на тех же самых принципах, что и глобальный спектральный метод. Основное отличие метода спектральных элементов состоит в том, что интегрирование ведётся по части пространства независимых переменных, которую отождествляют с конечным элементом. С учетом свойств базисных функций удастся выразить все интегралы через нули и веса наивысших аппроксимирующих полиномов. Таким образом, мы приходим к системе алгебраических уравнений для определения значений искомой функции в узлах сетки, определённой способом построения конечно-элементного разбиения и положением нулей наивысших полиномов на каждом из элементов разбиения. В таком случае для достижения необходимой точности расчётов и плотности сетки, накрывающей расчётную область, нет необходимости использовать излишне большое число базисных функций на каждом из элементов. Весь комплекс этих мер приводит к существенной экономии вычислительных ресурсов без потери спектральной точности и даёт возможность проводить вычисления в геометрически сложных областях реалистичной формы.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант РФФИ № 08-01-00484-а).

Как и в методе Галеркина, в спектральном методе приближенное решение исходного нелинейного дифференциального оператора

$$G(u) = f \quad (1)$$

разыскивается в виде комбинации по линейно независимой системе элементов $\{\varphi_i\}$, называемой базисом в пространстве искомых функций, или координатной системой:

$$P_N^h = \sum_{i=0}^N c_i \varphi_i. \quad (2)$$

В качестве элементов φ_i используются ортогональные функции, являющиеся собственными функциями задачи Штурма – Лиувилля на единичном отрезке. Числовые коэффициенты $c_0, \dots, c_N$ находятся из системы алгебраических уравнений:

$$\left\langle G\left(\sum_{i=0}^N c_i \varphi_i\right), \psi_j \right\rangle = \langle f, \psi_j \rangle, j = 0..N. \quad (3)$$

Здесь $\{\psi_j\}$ – базис проекционной системы. В принципе, базисы $\{\varphi_i\}$ и $\{\psi_j\}$, имеющие одинаковую размерность, различны, однако ниже мы принимаем $\varphi_i = \psi_i (i = 0..N)$.

Используя спектральное разложение, для достаточно гладких функций можно получить экспоненциальную скорость сходимости приближенного решения к точному [1]. В этом и состоит основное преимущество спектрального метода: очень точные приближенные решения могут быть получены при небольшом числе слагаемых, входящих в $P_N^h u$, причём ошибка аппроксимации будет уменьшаться экспоненциально с ростом N . Таким образом, определив коэффициенты приближенного разложения c_i , можно получить значения искомой функции в любой точке области с заданным порядком точности. Указанная схема характерна для классического глобального спектрального метода.

Недостатком глобального спектрального метода является то, что многочлены Якоби являются ортогональными на отрезке $[-1, 1]$ и, следовательно, утверждения об экспоненциальной скорости сходимости приближенного решения к точному имеют место только в случае, если область интегрирования представляет собой отрезок $\bar{\Omega} = [-1, 1]$. Для того чтобы решить задачу с произвольной областью интегрирования, необходимо найти замену координат, переводящую исходную область интегрирования в единичный отрезок.

Спектральный метод обобщается на случай двух и более измерений путём использования в качестве базисных функций тензорного произведения соответствующих одномерных базисных функций [2].

В случае двух и более измерений задача о нахождении преобразования координат становится достаточно сложной, особенно если область интегрирования имеет сложную форму. Поэтому имеет смысл разбить исходную расчетную область на конечные элементы и искать локальные представления решения через специальные функции, определенные на этих элементах. Однако при дискретизации, полученной на основе локального спектрального метода, матрица системы становится плохо обусловленной, что приводит к медленной сходимости итерационных методов. Эта проблема, как и в случае обычных локальных аппроксимаций, решается с использованием методов на основе пространств Крылова и подбором преобуславливателей.

В настоящей работе в качестве базисных функций мы использовали интерполяционные многочлены, представляющие собой комбинации полиномов Лежандра и их производных и получившие название полиномов Гаусса – Лежандра – Лобатто [2]:

$$u(x) = \sum_{i=0}^N u_i C_i(x); \quad (4)$$

$$C_i(x) = \frac{-1}{N(N+1)L_N(x_i)} \frac{(1-x^2)L'_N}{x-x_i}. \quad (5)$$

$$C_i(x_j) = \delta_{ij},$$

Здесь δ_{ij} – символ Кронекера, x_j – точки Лежандра – Гаусса – Лобатто, определяемые формулой

$$x_0 = -1,$$

$$x_j - \text{нули } L'_N, \quad 1 \leq j \leq N-1,$$

$$x_N = 1. \quad (6)$$

Веса, необходимые для численного интегрирования при использовании интерполяционных функций (4), (5), определяются соотношением

$$\omega_j = \frac{2}{N(N+1)} \frac{1}{L_N(x_j)^2}, \quad j = 0, 1, \dots, N. \quad (7)$$

В то же время сами полиномы Лежандра определяются следующим рекуррентным соотношением:

$$L_0(x) = 1,$$

$$L_1(x) = x,$$

$$L_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x L_n(x) - \frac{n}{n+1} L_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (8)$$

2. Уравнение Пуассона

Рассмотрим уравнение Пуассона:

$$\begin{aligned} -\nabla^2 u &= f(x), \quad x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} &= \varphi(x). \end{aligned} \quad (9)$$

Пусть $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ и $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Рассмотрим проблему построения решения (9) в слабой постановке:

$$-\int_{\Omega} \nabla^2 u v dV = \int_{\Omega} f v dV. \quad (10)$$

К левой части уравнения (10) применим формулу Грина:

$$-\int_{\Omega} \nabla^2 u v dV = -\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dV - \oint_{\partial\Omega} v \cdot \frac{\partial u}{\partial n} dS = \int_{\Omega} f v dV. \quad (11)$$

Здесь $\hat{n} = (n_1, n_2, n_3)$ – нормаль к поверхности $\partial\Omega$. В результате наша задача (9) переформулирована для пространства функций Соболева [3, 4]:

$$u, v \in H_0^1(\Omega) = \left\{ u(x) \mid u|_{\partial\Omega} = 0, \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \right\}. \quad (12)$$

Формулу (10) с учётом (11) можно преобразовать следующим образом:

$$-\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dV = \int_{\Omega} f v dV + \oint_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} dS. \quad (13)$$

Рассмотрим кубическую область $\Omega = (-1, 1)^3 \subset \mathbb{R}^3$. В этом случае интерполяционная формула может быть рассмотрена в виде прямого произведения одномерных базисных функций:

$$u(x) = \sum_{i_1=1, i_2=1, i_3=1}^N U_{i_1, i_2, i_3} \prod_{i=1}^3 C_{p_i}(x_i). \quad (14)$$

На элементе рассмотрим тестовые функции вида

$$v_{q_1, q_2, q_3}(x) = \prod_{i=1}^3 C_{q_i}(x_i). \quad (15)$$

Для простоты предположим, что мы имеем граничные условия Дирихле. В таком случае нет необходимости производить расчёт интеграла

$$\oint_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} dS.$$

С учетом (14), (15), левую часть формулы (13) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) dx dy dz = \\ & = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{i_1=1}^N \sum_{i_2=1}^N \sum_{i_3=1}^N U_{i_1 i_2 i_3} C_{i_1}(x) C_{i_2}(y) C_{i_3}(z) \right) \frac{\partial}{\partial x} (C_{p_1}(x) C_{p_2}(y) C_{p_3}(z)) + \right. \\ & \quad + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sum_{i_1=1}^N \sum_{i_2=1}^N \sum_{i_3=1}^N U_{i_1 i_2 i_3} C_{i_1}(x) C_{i_2}(y) C_{i_3}(z) \right) \frac{\partial}{\partial y} (C_{p_1}(x) C_{p_2}(y) C_{p_3}(z)) + \\ & \quad + \left. \frac{\partial}{\partial z} \left(\sum_{i_1=1}^N \sum_{i_2=1}^N \sum_{i_3=1}^N U_{i_1 i_2 i_3} C_{i_1}(x) C_{i_2}(y) C_{i_3}(z) \right) \frac{\partial}{\partial z} (C_{p_1}(x) C_{p_2}(y) C_{p_3}(z)) \right) dx dy dz = \\ & = \sum_{i_1=1}^N \sum_{i_2=1}^N \sum_{i_3=1}^N U_{i_1 i_2 i_3} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\frac{\partial}{\partial x} (C_{i_1}(x) C_{i_2}(y) C_{i_3}(z)) \frac{\partial}{\partial x} (C_{p_1}(x) C_{p_2}(y) C_{p_3}(z)) + \right. \\ & \quad + \frac{\partial}{\partial y} (C_{i_1}(x) C_{i_2}(y) C_{i_3}(z)) \frac{\partial}{\partial y} (C_{p_1}(x) C_{p_2}(y) C_{p_3}(z)) + \\ & \quad + \left. \frac{\partial}{\partial z} (C_{i_1}(x) C_{i_2}(y) C_{i_3}(z)) \frac{\partial}{\partial z} (C_{p_1}(x) C_{p_2}(y) C_{p_3}(z)) \right) dx dy dz = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i_1=1}^N \sum_{i_2=1}^N \sum_{i_3=1}^N U_{i_1 i_2 i_3} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(C_{i_2}(y) C_{i_3}(z) C_{p_2}(y) C_{p_3}(z) \frac{\partial}{\partial x} C_{i_1}(x) \frac{\partial}{\partial x} C_{p_1}(x) + \right. \\
&\quad \left. + C_{i_1}(x) C_{i_3}(z) C_{p_2}(y) C_{p_3}(z) \frac{\partial}{\partial y} C_{i_2}(y) \frac{\partial}{\partial y} C_{p_2}(y) + \right. \\
&\quad \left. C_{i_1}(x) C_{i_2}(y) C_{p_1}(x) C_{p_2}(y) \frac{\partial}{\partial x} C_{i_3}(z) \frac{\partial}{\partial z} C_{p_3}(z) \right) dx dy dz = \\
&= \sum_{i_1=1}^N \sum_{i_2=1}^N \sum_{i_3=1}^N U_{i_1 i_2 i_3} \left(\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(C_{i_2}(y) C_{p_2}(y) C_{i_3}(z) C_{p_3}(z) \frac{\partial}{\partial x} C_{i_1}(x) \frac{\partial}{\partial x} C_{p_1}(x) \right) dx dy dz + \right. \\
&\quad \left. + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(C_{i_1}(x) C_{p_1}(x) C_{i_3}(z) C_{p_3}(z) \frac{\partial}{\partial y} C_{i_2}(y) \frac{\partial}{\partial y} C_{p_2}(y) \right) dx dy dz + \right. \\
&\quad \left. + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(C_{i_1}(x) C_{p_1}(x) C_{i_2}(y) C_{p_2}(y) \frac{\partial}{\partial z} C_{i_3}(z) \frac{\partial}{\partial z} C_{p_3}(z) \right) dx dy dz \right) = \\
&= \sum_{i_1=1}^N \sum_{i_2=1}^N \sum_{i_3=1}^N U_{i_1 i_2 i_3} \left(\int_{-1}^1 \frac{\partial}{\partial x} C_{i_1}(x) \frac{\partial}{\partial x} C_{p_1}(x) dx \int_{-1}^1 C_{i_2}(y) C_{p_2}(y) dy \int_{-1}^1 C_{i_3}(z) C_{p_3}(z) dz + \right. \\
&\quad \left. + \int_{-1}^1 C_{i_1}(x) C_{p_1}(x) dx \int_{-1}^1 \frac{\partial}{\partial y} C_{i_2}(y) \frac{\partial}{\partial y} C_{p_2}(y) dy \int_{-1}^1 C_{i_3}(z) C_{p_3}(z) dz + \right. \\
&\quad \left. + \int_{-1}^1 C_{i_1}(x) C_{p_1}(x) dx \int_{-1}^1 C_{i_2}(y) C_{p_2}(y) dy \int_{-1}^1 \frac{\partial}{\partial z} C_{i_3}(z) \frac{\partial}{\partial z} C_{p_3}(z) dz \right).
\end{aligned}$$

Воспользуемся квадратурными формулами Гаусса. Получим

$$\begin{aligned}
&\sum_{i_1=1}^N \sum_{i_2=1}^N \sum_{i_3=1}^N U_{i_1 i_2 i_3} \left(\sum_{j=1}^N \omega_j \frac{\partial}{\partial x^j} C_{i_1}(x^j) \frac{\partial}{\partial x^j} C_{p_1}(x^j) \sum_{k=1}^N \omega_k C_{i_2}(y^k) C_{p_2}(y^k) \sum_{l=1}^N \omega_l C_{i_3}(z^l) C_{p_3}(z^l) + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=1}^N \omega_j C_{i_1}(x^j) C_{p_1}(x^j) \sum_{k=1}^N \omega_k \frac{\partial}{\partial y^k} C_{i_2}(y^k) \frac{\partial}{\partial y^k} C_{p_2}(y^k) \sum_{l=1}^N \omega_l C_{i_3}(z^l) C_{p_3}(z^l) + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=1}^N \omega_j C_{i_1}(x^j) C_{p_1}(x^j) \sum_{k=1}^N \omega_k C_{i_2}(y^k) C_{p_2}(y^k) \sum_{l=1}^N \omega_l \frac{\partial}{\partial z^l} C_{i_3}(z^l) \frac{\partial}{\partial z^l} C_{p_3}(z^l) \right) = \\
&= \sum_{i_1=1}^N \sum_{i_2=1}^N \sum_{i_3=1}^N U_{i_1 i_2 i_3} \left(\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \omega_j \omega_k \omega_l \frac{\partial}{\partial x^j} C_{i_1}(x^j) \frac{\partial}{\partial x^j} C_{p_1}(x^j) C_{i_2}(y^k) C_{p_2}(y^k) C_{i_3}(z^l) C_{p_3}(z^l) + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \omega_j \omega_k \omega_l C_{i_1}(x^j) C_{p_1}(x^j) \frac{\partial}{\partial y^k} C_{i_2}(y^k) \frac{\partial}{\partial y^k} C_{p_2}(y^k) C_{i_3}(z^l) C_{p_3}(z^l) + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \omega_j \omega_k \omega_l C_{i_1}(x^j) C_{p_1}(x^j) C_{i_2}(y^k) C_{p_2}(y^k) \frac{\partial}{\partial z^l} C_{i_3}(z^l) \frac{\partial}{\partial z^l} C_{p_3}(z^l) \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i_1=1}^N \sum_{i_2=1}^N \sum_{i_3=1}^N U_{i_1 i_2 i_3} \sum_{J=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \omega_J \omega_k \omega_l \left(\frac{\partial}{\partial x^J} C_{i_1}(x^J) \frac{\partial}{\partial x^J} C_{p_1}(x^J) C_{i_2}(y^k) C_{p_2}(y^k) C_{i_3}(z^l) C_{p_3}(z^l) + \right. \\
 &\quad + C_{i_1}(x^J) C_{p_1}(x^J) \frac{\partial}{\partial y^k} C_{i_2}(y^k) \frac{\partial}{\partial y^k} C_{p_2}(y^k) C_{i_3}(z^l) C_{p_3}(z^l) + \\
 &\quad \left. + C_{i_1}(x^J) C_{p_1}(x^J) C_{i_2}(y^k) C_{p_2}(y^k) \frac{\partial}{\partial z^l} C_{i_3}(z^l) \frac{\partial}{\partial z^l} C_{p_3}(z^l) \right) = \\
 &= \sum_{i_1=1}^N \sum_{i_2=1}^N \sum_{i_3=1}^N U_{i_1 i_2 i_3} \left(\sum_{J=1}^N \omega_J \frac{\partial}{\partial x^J} C_{i_1}(x^J) \frac{\partial}{\partial x^J} C_{p_1}(x^J) \delta_{i_2, p_2} \omega_{i_2} \delta_{i_3, p_3} \omega_{i_3} + \right. \\
 &\quad + \sum_{k=1}^N \omega_k \frac{\partial}{\partial y^k} C_{i_2}(y^k) \frac{\partial}{\partial y^k} C_{p_2}(y^k) \delta_{i_1, p_1} \omega_{i_1} \delta_{i_3, p_3} \omega_{i_3} + \\
 &\quad \left. + \sum_{l=1}^N \omega_l \frac{\partial}{\partial z^l} C_{i_3}(z^l) \frac{\partial}{\partial z^l} C_{p_3}(z^l) \delta_{i_1, p_1} \omega_{i_1} \delta_{i_2, p_2} \omega_{i_2} \right). \quad (16)
 \end{aligned}$$

Аналогичным образом преобразуется и правая часть (13). Таким образом, используя формулы (16), а также меняя индексы p_1, p_2, p_3 , получим матрицу системы и вектор правой части.

3. Преобразования координат

Поскольку многочлены (5) являются ортогональными лишь на единичном кубе, то для областей более сложной геометрии необходимо осуществить замену координат, переводящую исходную область интегрирования к единичному кубу. Пусть $x = x(\xi)$ – некоторое преобразование координат, где $\xi_i \in [-1, 1]$ для всех $i = 1, 2, 3$. Тогда

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \chi} \frac{\partial \chi}{\partial x}; \\
 \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \chi} \frac{\partial \chi}{\partial y}; \\
 \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial \chi} \frac{\partial \chi}{\partial z}.
 \end{aligned} \quad (17)$$

Формулы (17) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{1}{J} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \chi} - \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \chi} \right) + \frac{\partial u}{\partial \eta} \left(-\frac{1}{J} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \chi} - \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \chi} \right) + \frac{\partial u}{\partial \chi} \frac{1}{J} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) = \\
 &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \left(\frac{1}{J} \right) (J_{22} J_{33} - J_{32} J_{23}) + \frac{\partial u}{\partial \eta} \left(-\frac{1}{J} \right) (J_{21} J_{33} - J_{31} J_{23}) + \frac{\partial u}{\partial \chi} \left(\frac{1}{J} \right) (J_{21} J_{32} - J_{22} J_{31}); \\
 \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \left(-\frac{1}{J} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \chi} - \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \chi} \right) + \frac{\partial u}{\partial \eta} \left(\frac{1}{J} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \chi} - \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \chi} \right) + \frac{\partial u}{\partial \chi} \left(-\frac{1}{J} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) = \\
 &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \left(-\frac{1}{J} \right) (J_{12} J_{33} - J_{13} J_{32}) + \frac{\partial u}{\partial \eta} \left(\frac{1}{J} \right) (J_{11} J_{33} - J_{13} J_{31}) + \frac{\partial u}{\partial \chi} \left(-\frac{1}{J} \right) (J_{13} J_{32} - J_{12} J_{31});
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \left(\frac{1}{J} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \chi} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \chi} \right) + \frac{\partial u}{\partial \eta} \left(-\frac{1}{J} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \chi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \chi} \right) + \frac{\partial u}{\partial \chi} \left(\frac{1}{J} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) = \\ &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \left(\frac{1}{J} \right) (J_{12} J_{23} - J_{13} J_{22}) + \frac{\partial u}{\partial \eta} \left(-\frac{1}{J} \right) (J_{11} J_{23} - J_{13} J_{21}) + \frac{\partial u}{\partial \chi} \left(\frac{1}{J} \right) (J_{11} J_{22} - J_{13} J_{23}). \end{aligned}$$

Здесь J – определитель матрицы Якоби, J_{ij} – компоненты матрицы Якоби.

Заключение

Таким образом, в работе приведена математическая постановка численного решения пространственных краевых задач методом спектральных элементов. Приведен вывод преобразований координат, необходимых для решения задач в областях сложной геометрии.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Van de Vosse F.N.* Spectral Element Methods: Theory and Application, 1999.
2. *Boyd John P.* Chebyshev and Fourier Spectral Methods. Second Edition, University of Michigan, 2000.
3. *Флетчер К.* Вычислительные методы в динамике жидкостей. – М.: Мир, 1991.
4. *Helenbrook B.T.* A Two-Fluid Spectral Element Method. Department of Mechanical and Aeronautical Engineering, 1999.

Статья принята в печать 10.11.2008 г.