МАТЕМАТИКА

УДК 517.54

И.А. Александров

О СВЯЗИ МЕТОДА ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ С МЕТОДАМИ ГОЛУЗИНА И КУФАРЕВА

Указывается способ получения вариационной формулы Голузина и вариационной формулы Куфарева, основанный на вариации управляющей функции в уравнении Лёвнера.

Ключевые слова: *уравнение Лёвнера, вариационные формулы Голузина и Куфарева.*

Анонсированный в 1954 г. П.П. Куфаревым [1] метод, объединяющий метод параметрических представлений и метод внутренних вариаций в теории конформных отображений, был развит и получил широкое применение в большом числе работ, выполненных в томской школе теории функций комплексного переменного П.П. Куфаревым, И.А. Александровым, А.И. Александровым, В.А. Андреевым, М.А. Арендарчук, В.В. Барановой, Л.М. Бер, Н.В. Гениной, В.Я. Гутлянским, В.И. Каном, Т.В. Касаткиной, Г.Я.Кесельманом, Л.С. Копаневой, С.А. Копаневым, М.Р. Куваевым, В.П. Мандиком, Ю.А. Мартыновым, В.А. Назаровой, М.Н. Никульшиной, Р.С. Поломошновой, В.И. Поповым, Г.А. Поповой, А.Е. Прохоровой, М.И. Редьковым, Г.Д. Садритдиновой, В.В. Соболевым, А.С. Сорокиным, Л.В. Спорышевой, П.И. Сижуком, А.Н. Сыркашевым, А.Э. Фалес, Б.Г. Цветковым, В.В. Черниковым, В.В. Щепетевым и другими.

П.П. Куфарев взял за исходную формулу Г.М. Голузина [2] и искусно применил её к отображениям круга на плоскость с укорачивающимся разрезом, т.е. к левнеровским областям. Применение полученной Куфаревым формулы к экстремальным задачам позволило характеризовать экстремальные отображения для большого числа функционалов не одним, как делалось ранее, а двумя дополняющими друг друга уравнениями и во многих случаях довести исследование экстремальной задачи до полного решения.

В этой статье дадим вывод вариационной формулы Куфарева иным способом, оставаясь строго в рамках метода параметрических представлений. В статье [3] аналогичным способом была получена вариационная формула Голузина. Она используется в данной работе с кратким повторением её вывода.

Пусть функция $f(z) = z + c_2 z^2 + \ldots \in S$ отображает круг $E_z = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ на область D_0, полученную из w-плоскости проведением жорданового кусочно-гладкого разреза C_0, начинающегося в конечной точке плоскости, не проходящего через точку $w = 0$ и оканчивающегося в бесконечности. Пусть $w = \varphi(\tau)$, $0 \le \tau < \infty$, – параметрическое уравнение кривой C_0. Область D_τ получается присоединением к D_0 дуги $\{w\colon w = \varphi(t),\ 0 \le t \le \tau\}$ и отображается при конечном τ функцией $\varsigma = F(w, \tau)$, $F(0, \tau) = 0$, $F'_w(0,\tau) > 0$, на круг E_ζ. Такое отображение единственно. Изменяя надлежащим образом параметризацию кривой C_0, можно добиться того, что $F'_w(0,\tau) = e^{-\tau}$. Будем считать параметризацию C_0 выбранной сразу же в соответствии с этим условием.

Образуем функцию $\varsigma(\tau, z) = F(f(z), \tau)$. Она отображает круг E_z на круг E_ζ с разрезом по жордановой кусочно-гладкой кривой, не проходящей через нуль. Очевидно, $\varsigma(0, z) = z$, $z \in E_z$.

Пусть $w = \Psi(z, \tau)$ – функция, обратная к $F(w, \tau)$ при фиксированном τ. Легко видеть, что $\Psi(z, 0) = f(z)$, $\Psi(0, \tau) = 0$, $\Psi'_z(0,\tau) = e^{\tau}$.

Существует кусочно-гладкая функция $\mu(\tau)$, $0 \le \tau \le \infty$, $|\mu(\tau)| = 1$, – её называют управляющей, – такая, что $\varsigma(\tau, z)$ является решением уравнения Лёвнера [4]

$$\frac{d\varsigma}{d\tau} = -\varsigma\frac{\mu(\tau)+\varsigma}{\mu(\tau)-\varsigma}, \quad \varsigma(0,z) = z \in E_z, \tag{1}$$

и

$$\lim_{\tau\to\infty} e^{\tau}\varsigma(\tau,z) = f(z).$$

Кроме того, $\lim\limits_{\tau\to\infty}\varsigma(\tau,z) = 0$, каково бы ни было $\mu(\tau)$ в уравнении (1).

Пусть $q_1(\tau)$, $q_2(\tau)$, $0 \le \tau < \infty$, – вещественные непрерывные функции, $|q_1(\tau)| \le e^{-\tau}M$, $|q_2(\tau)| < M$, $M > 0$. Управляющей функции

$$\mu(\tau,\lambda) = \mu\left(\int_0^{\tau}(1+\lambda q_1(\tau))\,d\tau\right)e^{i\lambda q_2(\tau)},$$

λ – вещественное число, $|\lambda|M < 1$, соответствует решение $\varsigma(\tau, z; \lambda)$ уравнения Лёвнера

$$\frac{d\varsigma}{d\tau} = -\varsigma\frac{\mu(\tau;\lambda)+\varsigma}{\mu(\tau;\lambda)-\varsigma}, \quad \varsigma|_{\tau=0} = z \in E_z. \tag{2}$$

Функция $\varsigma(\tau, z; \lambda)$ однолистно и конформно отображает E_z в единичный круг и

$$\lim_{\lambda\to 0}\varsigma(\tau,z;\lambda) = \varsigma(\tau,z)$$

равномерно внутри E_z, так как $\mu(\tau; \lambda) \to \mu(\tau)$ при $\lambda \to 0$.

Заменим в уравнении (2) переменную τ на t по формуле $t = \varphi(\tau)$, где

$$\varphi(\tau) = \int_0^{\tau}[\tau + \lambda q_1(\tau)]d\tau.$$

Поскольку в дальнейшем нас будет интересовать только линейная относительно λ часть разложения $\varsigma(\tau, z; \lambda) = \varsigma(t, z)[1 + \lambda\Phi(t, z) + o(\lambda)]$, то достаточно ограничиться при замене τ на t записью уравнения для $\varsigma(\tau, z; \lambda)$ в виде

$$\frac{d\varsigma}{dt} = -[1-\lambda q_1(t)]\varsigma\frac{\mu(t)e^{i\lambda q_2(t)}+\varsigma}{\mu(t)e^{i\lambda q_2(t)}-\varsigma}, \quad \varsigma(0,z;\lambda) = z. \tag{3}$$

В результате выполнения простых операций с использованием разложений в ряд Тейлора по степеням λ находим для $\Phi(t, z)$, $\Phi(0, z) = 0$, уравнение

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{2\mu\varsigma}{(\mu-\varsigma)^2}\Phi + \frac{\mu+\varsigma}{\mu-\varsigma}q_1 + \frac{2i\mu\varsigma}{(\mu-\varsigma)^2}q_2.$$

Его решение дается формулой

$$\Phi(t,z) = \frac{\varsigma_z'(t,z)}{\varsigma(t,z)}\int_0^t P(\tau,z)\,d\tau,$$

где
$$P(\tau,z) = \frac{\varsigma(\tau,z)}{\varsigma_z'(\tau,z)}\left\{\frac{\mu(\tau)+\varsigma(\tau,z)}{\mu(\tau)+\varsigma(\tau,z)}q_1(\tau) + \frac{2i\mu(\tau)\varsigma(\tau,z)}{[\mu(\tau)-\varsigma(\tau,z)]^2}q_2(\tau)\right\}.$$

Таким образом, формула

$$\varsigma^*(t,z) = \varsigma(t,z) + \lambda\varsigma_z'(t,z)\int_0^t P(\tau,z)d\tau + \lambda^2 N(t,z) \tag{4}$$

показывает как изменится решение $\varsigma(t, z)$ уравнения Левнера при замене в нем управляющей функции $\mu(\tau)$ на $\mu(\lambda)$. Функция $N(t, z)$ равномерно по t ограничена внутри E_z.

Дальнейшие построения связаны с конкретным выбором $q_1(\tau)$ и $q_2(\tau)$.

Пусть

$$q_1(\tau) = AH_1^2\frac{2\mu\varsigma_1}{(\mu-\varsigma_1)^2} + \overline{A}\overline{H_1^2}\frac{2\mu\overline{\varsigma_1^{-1}}}{\left(\mu-\overline{\varsigma_1^{-1}}\right)^2},$$

$$q_2(\tau) = \frac{1}{2i}\left[AH_1^2\frac{\mu+\varsigma_1}{\mu-\varsigma_1} + \overline{A}\overline{H_1^2}\frac{\mu+\overline{\varsigma_1^{-1}}}{\mu-\overline{\varsigma_1^{-1}}}\right],$$

где A – постоянная, $\varsigma_1 = \varsigma(t, z_1)$, $\varsigma_{z_1}' = \varsigma_z'(t,z_1)$, $H_1 = z_1\varsigma_{z_1}'/\varsigma_1$, z_1 – точка из $E_z\backslash\{0\}$.

Тогда

$$P(\tau,z) = AH_1^2\frac{\varsigma}{\varsigma_z'}\left[\frac{\mu+\varsigma}{\mu-\varsigma}\frac{2\mu\varsigma}{(\mu-\varsigma_1)^2} + \frac{\mu+\varsigma_1}{\mu-\varsigma_1}\frac{2\mu\varsigma}{(\mu-\varsigma)^2}\right] +$$
$$+\overline{A}\overline{H_1^2}\left[\frac{\mu+\varsigma}{\mu-\varsigma}\frac{2\mu\overline{\varsigma_1^{-1}}}{(\mu-\overline{\varsigma_1^{-1}})^2} + \frac{\mu+\overline{\varsigma_1^{-1}}}{\mu-\overline{\varsigma_1^{-1}}}\frac{2\mu\varsigma}{(\mu-\varsigma)^2}\right].$$

Для двух различных решений u, v уравнения Левнера, как легко проверить, имеет место формула

$$\frac{\mu+u}{\mu-u}\frac{2\mu v}{(\mu-v)^2} = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{u+v}{u-v}\right) + \frac{u+v}{u-v}\frac{v}{z_z'}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{v_z'}{v}\right),$$

позволяющая представить $P(\tau, z)$ в виде

$$P(\tau,z) = \frac{A}{2}\frac{d}{d\tau}\left[\frac{\varsigma}{\varsigma_z'}H_1^2\frac{\varsigma+\varsigma_1}{\varsigma-\varsigma_1}\right] + \frac{\overline{A}}{2}\frac{d}{d\tau}\left[\frac{\varsigma}{\varsigma_z'}\overline{H_1^2} + \frac{\varsigma+\overline{\varsigma_1^{-1}}}{\varsigma-\overline{\varsigma_1^{-1}}}\right],$$

и, следовательно, записать формулу (4) в виде

$$\varsigma_*(t,z)=\varsigma(t,z)+\lambda\left\{\frac{A}{2}\left[H_1^2\varsigma\frac{\varsigma+\varsigma_1}{\varsigma-\varsigma_1}-z\varsigma'_z\frac{z+z_1}{z-z_1}\right]+\frac{\overline{A}}{2}\left[\overline{H_1^2}\varsigma\frac{\varsigma+\overline{\varsigma_1^{-1}}}{\varsigma-\overline{\varsigma_1^{-1}}}-z\varsigma'_z\frac{z+\overline{z_1^{-1}}}{z-\overline{z_1^{-1}}}{}_z\right]\right\}+\lambda^2N(t,z).$$

Умножим обе части полученной формулы на e^t и перейдем к пределу при $t\to\infty$. В результате имеем

$$f_*(z)=f(z)+\lambda f(z)\left\{\frac{A}{2}\left[Q^2(z_1)\frac{f(z)+f(z_1)}{f(z)-f(z_1)}-Q(z)\frac{z+z_1}{z-z_1}\right]-\right.$$
$$\left.-\frac{\overline{A}}{2}\left[\overline{Q^2(z_1)}-Q(z)\frac{z+\overline{z_1^{-1}}}{z-\overline{z_1^{-1}}}\right]\right\}+\lambda^2N(z),$$

где

$$Q(z)=\frac{zf'(z)}{f(z)},\quad Q(z_1)=\lim_{\tau\to\infty}H_1.$$

Производная $f_*'(0)$ дается формулой

$$f_*'(0)=1-\lambda\left\{\frac{A}{2}\left[Q^2(z_1)-1\right]-\frac{\overline{A}}{2}\left[\overline{Q^2(z_1)}-1\right]+\lambda^2N(0)\right\}.$$

Функция $f^*(z)=f_*(z)\big/f_*'(0)$ нормирована условиями: $f^*(0)=0$, $f^{*\prime}(0)=1$ и представляет собой вариационную формулу в рассматриваемом подклассе класса S. Она легко распространяется на класс S и известна как вариационная формула Голузина в классе S.

Пользуясь вариационной формулой Голузина

$$f^*(z)=f(z)+\lambda f(z)\left[AQ^2(z_1)\frac{f(z)}{f(z)-f(z_1)}-\frac{A}{2}K(z,z_1)-\frac{\overline{A}}{2}K\left(z,\frac{1}{\overline{z_1}}\right)\right]+o(\lambda),$$

где
$$K(z,\varsigma)=Q(z)\frac{z+\varsigma}{z-\varsigma}+1,$$

представим отображение $\Psi(z,\tau)$ круга E_z на некоторую близкую к D_τ область D_τ^* в виде

$$\Psi^*(z,\tau)=\Psi(z,\tau)+\lambda\Psi(z,\tau)\left[AH^2(\varsigma,\tau)\frac{\Psi(z,\tau)}{\Psi(z,\tau)-\Psi(\varsigma,\tau)}-\frac{A}{2}K_1(z,\varsigma,\tau)-\frac{\overline{A}}{2}K\left(z,\frac{1}{\varsigma},\tau\right)\right]+o(\lambda),$$

где
$$H(z,\tau)=\frac{z\Psi_z'(z,\tau)}{\Psi(z,\tau)},\quad K_1(z,\varsigma,\tau)=H(z,\tau)\frac{z+\varsigma}{z-\varsigma}+1,$$

ς – фиксированная точка в E_z и A – постоянная.

Функция $w^*(w,\tau)=\Psi^*(F(w,\tau),\tau)$, $w^*(0,\tau)=0$, отображает область D_τ на D_τ^*; вместе с тем функция $w^*(w,\tau)$ отображает D_0 на область D_0^*, близкую к D_0. Разложение $w^*(w,\tau)$ по степеням λ имеет вид

$$w^*(w,\tau) = w + \lambda w\left[AH^2(\omega,\tau)\frac{w}{w-\omega} - \frac{A}{2}K_1(F(w,t),\varsigma,\tau) - \frac{\overline{A}}{2}K_1\left(F(w,\tau),\frac{1}{\varsigma},\tau\right)\right] + o(\lambda),$$

где $\omega = f(\varsigma)$. Заменим в этой формуле w на $f(z)$. Получим функцию $f_*(z) = w^*(f(z),\tau)$, однолистно и конформно отображающую круг E_z на область D_0^*. Легко найти, что

$$f_*(z) = f(z) + \lambda f(z)\left[AH^2(\varsigma,\tau)\frac{f(z)}{f(z)-f(\varsigma)} - \frac{A}{2}K(z,\varsigma,\tau) - \frac{\overline{A}}{2}K_1\left(z,\frac{1}{\varsigma},\tau\right)\right] + o(\lambda). \quad (5)$$

Здесь

$$K(z,\varsigma,\tau) = K_1(F(f(z),\tau),\varsigma,\tau) = H(z,\mu)\frac{F(f(z),\tau)+\varsigma}{F(f(z),\tau)-\varsigma} + 1,$$

$$H(z,\tau) = \frac{F(f(z),\tau)}{f(z)F'_w(z,\tau)}.$$

Формула (5) дана Куфаревым. В ней участвует функция $F(w,\tau)$, являющаяся присоединенной функцией для $f(z)$ и удовлетворяющая уравнению Лёвнера

$$\frac{dF}{d\tau} = -F\frac{\mu(\tau)+F}{\mu(\tau)-F}, \quad F(w,0) = f^{-1}(w).$$

Это обстоятельство позволяет во многих вариационных задачах получить два уравнения для функции, присоединенной к экстремальной функции относительно большого числа функционалов, встречающихся в задачах геометрической теории функций комплексного переменного.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Куфарев П.П.* Об одном свойстве экстремальных областей задачи коэффициентов // ДАН СССР. 1954. Т. 97. С. 391 – 393.
2. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.
3. *Александров А.И., Александров И.А.* Вариационная формула Голузина для левнеровских отображений круга // Вестник ТГУ. Математика и механика. 2008. № 1(2). С. 5 – 10.
4. *Левнер* (*Löwner K*). Untersuchungen űber schlichte konforme Abbildung der Einheitskreises. J. Math. Ann. 1923. 89. P. 103 – 121.

Статья принята в печать 05.05. 2008 г.