

МЕХАНИКА

УДК 612.13

М.А. Бубенчиков

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ЭЛЕКТРОЛИТА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Рассмотрен класс автомодельных задач о течении вязкой несжимаемой многокомпонентной среды, составленной анионами, катионами и нейтральными молекулами в круглых трубах и пространстве между круговыми цилиндрами со смещенными осями образующих цилиндров при наличии аксиального движения среды и внешнего поперечного однородного магнитного поля. При моделировании движения заряженных частиц учтены конвенция, диффузия и миграция таких частиц, возникающая под действием электрических и магнитных полей. Обезразмеренная система определяющих стационарный процесс эллиптических уравнений интегрируется численно с использованием двухсторонних симметричных разностей для производных и итерационных процедур Гаусса – Зейделя. Численный алгоритм тестируется на точных решениях о течении непроводящей среды и экспериментальных данных о МГД-течениях в каналах. Изучается влияние параметров зарядности ионов и чисел Гартмана на характер разделения пар ионов в пространстве.

Ключевые слова: магнитное поле, амбиполярная диффузия, электролит, МГД-течение.

Автомодельное течение электропроводящей жидкости в цилиндрическом канале

Под автомодельностью течения будем понимать условия, позволяющие понизить размерность задачи, являющейся математическим описанием данного процесса.

В принятом выше смысле, все стационарные или, например, все плоские течения также являются автомодельными, поскольку в первом случае из рассмотрения исчезает время, а во втором – одна из пространственных координат, перпендикулярная плоскости течения. Но наиболее интересными, являются случаи, когда размерность задачи удастся понизить не менее чем на две единицы. Один из таких примеров будет рассмотрен в настоящей работе.

Будем исследовать стационарные течения проводящих несжимаемых сред по цилиндрическим трубам сложной, но постоянной формы поперечного сечения. В этом случае, начиная с некоторого расстояния от входа, линии тока обязательно станут параллельными друг другу и параллельными оси трубы. Неизвестными величинами в рассматриваемой ситуации будут: поле скоростей $\vec{V}$, электрическое напряжение $\vec{E}$ и магнитная индукция $\vec{B}$. Введем в рассмотрение систему декартовых координат, такую, что ось z будет направлена по оси трубы, а оси x и y будут располагаться в плоскости, перпендикулярной этой оси. Покажем, что для

данного случая бесконечно длинной трубы постоянного сечения решение задачи сводится к определению двух функций: $V_z = U(x, y)$ и $B_z = B(x, y)$, а электрическое поле из уравнений можно исключить [1]. Так же как и в задаче о стабилизированном течении непроводящей жидкости, в рассматриваемых условиях распределение всех механических и физических величин будут зависеть только от x и y . Более того, осевой градиент давления, входящий в соответствующую проекцию векторного уравнения импульсов, будет сохранять свою величину вдоль оси трубы, т.е. будет константой. В этих условиях электрический ток вдоль трубы невозможен, таким образом, проекция закона Ома на осевые направления при учете того, что $\vec{V} = (0, 0, U)$ будет иметь вид

$$j_z = 0, \quad (1)$$

Т.е. индуцированные токи будут располагаться в плоскостях сечений трубы, параллельных плоскости Oxz , а индуцированная составляющая магнитного поля будет направлена по оси Oz . Принимая во внимание наличие однородного внешнего поперечного магнитного поля с компонентами $\vec{B} = (0, B_0, 0)$ и условие соленоидальности

$$\operatorname{div}(\vec{B}) = \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0,$$

закключаем, что суммарные компоненты магнитного поля будут следующими:

$$B_x = 0, \quad B_y = B_0, \quad B_z = B(x, y).$$

При этом, как легко видеть из уравнения Ампера:

$$\operatorname{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}.$$

Величину $\frac{B(x, y)}{\mu_0}$ можно рассматривать как «функцию тока» плоского поля векторов $\vec{j}(j_x, j_y)$, так что

$$\mu_0 j_x = -\frac{\partial B}{\partial y}, \quad \mu_0 j_y = \frac{\partial B}{\partial x}. \quad (2)$$

Возвращаясь теперь к векторному уравнению Навье – Стокса, перепишем его в проекциях на оси координат в виде

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{\mu_0} B \frac{\partial B}{\partial x}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{1}{\mu_0} B \frac{\partial B}{\partial y}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho v \nabla^2 U + \frac{B_0}{\mu_0} \frac{\partial B}{\partial y}. \quad (4)$$

Запишем, что первые два из этих уравнений приводятся к равенствам

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = 0, \quad (5)$$

выражающим что сумма $p + \frac{B^2}{2\mu_0}$ является функцией только z . Замечая, что, как

указано выше, B зависит только от x и y , заключим, что $\frac{\partial p}{\partial z}$ представляет функцию только z , но тогда из уравнения импульсов в проекции на ось z , в котором левая часть – функция только z , а правая – только x и y , следует, что каждая из этих частей в отдельности равна постоянной. Представим эту постоянную в виде

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \text{const} = -\frac{\Delta p}{l_0}.$$

Таким образом, уравнение движения жидкости запишется в форме

$$\mu \nabla^2 U + \frac{B_0}{\mu_0} \frac{\partial B}{\partial y} = -\frac{\Delta p}{l_0}. \quad (6)$$

Второе уравнение получается из выведенного ранее уравнения для магнитного поля:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{\sigma \mu_0} \nabla^2 \vec{B} + \text{rot}(\vec{V} \times \vec{B}),$$

в котором нужно положить $\text{rot}(\vec{V} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{V} - (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{B} = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{V}$, так как $(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{B} = 0$ как конвективная часть в стабилизированном движении. Проецируя уравнение магнитного поля на ось z , получим скалярное уравнение

$$\nabla^2 B + \sigma \mu_0 B_0 \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad (7)$$

выражающее структуру магнитного поля в движущейся среде.

Если при обезразмеривании уравнений (6) и (7) за характерные величины принять

$$V_* = \frac{l_0 \Delta p}{\mu}, \quad B_* = l_0 \Delta p \mu_0 \left(\frac{\sigma}{\mu} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad y_* = l_0, \quad x_* = l_0, \quad (*)$$

то безразмерный вид этих уравнений будет следующий:

$$\nabla^2 U + Ha \frac{\partial B}{\partial y} = -1, \quad (8)$$

$$\nabla^2 B + Ha \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad (9)$$

где $Ha = B_0 l_0 \left(\frac{\sigma}{\mu} \right)^{\frac{1}{2}}$ – число Гартмана, характеризующее порядок отношения электромагнитной силы к силе вязкого трения.

Уравнения переноса концентраций ионов с учетом их миграции в электромагнитном поле

Известно, что ток в электролитах обеспечивается движением ионов [2]. Процесс переноса ионов в движущемся растворе отличается от процесса переноса нейтральных растворенных частиц. На движение ионов оказывает влияние как электрическое, так и магнитное поле. Таким образом, перенос ионов в растворе

осуществляется конвекцией, диффузией ионов к электроду и миграцией ионов в электрическом и магнитном полях.

Составим уравнение переноса ионов в растворе. Пусть в растворе имеется ион с зарядностью z_i и коэффициентом диффузии D_i , концентрация которого равна c_i . Если $\vec{E}$ – напряженность электрического поля, а $\vec{B}$ – вектор магнитной индукции, то со стороны электромагнитного поля на ион действует сила $z_i e (\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B})$. Под действием этой силы ион приходит в движение в среде. Скорость движения иона связана с действующей на него силой обычным соотношением для движения частиц в вязкой среде:

$$\vec{u} = \gamma_i z_i e (\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}), \quad (10)$$

где γ_i – подвижность иона. Последняя может быть выражена через коэффициент диффузии с помощью известного соотношения Эйнштейна:

$$\gamma_i = \frac{D_i F}{RT}. \quad (11)$$

Движение ионов под действием электромагнитного поля получило название миграции. Поток мигрирующих частиц i -го сорта определяется следующим образом:

$$(\vec{J}_i)_{\text{мигр}} = \frac{D_i z_i F c_i}{RT} (\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}). \quad (12)$$

Полный поток частиц i -го сорта в движущейся среде при наличии электрического и магнитного полей определяется следующим выражением [3]:

$$\vec{J}_i = c_i \cdot \vec{V} - D_i \nabla c_i + \frac{D_i z_i F c_i}{RT} (\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}). \quad (13)$$

Первое слагаемое в правой части (13) определяет перенос частиц конвекцией, второе – диффузией, третье – миграцию частиц под действием электрического поля, четвертое – миграцию под действием магнитного поля.

Вводя представление (13) для $\vec{J}_i$ в уравнение переноса массы индивидуальной компоненты, получим

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) c_i = D_i \Delta c_i + \frac{D_i z_i F}{RT} \operatorname{div} [c_i (\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B})], \quad i = \overline{1, n}. \quad (14)$$

При выводе уравнения (14) принято, что коэффициенты диффузии не зависят от концентрации и, следовательно, не изменяются от точки к точке. Принималось также, что раствор является изотермическим, а это означает, что отсутствуют причины для термодиффузионного переноса ионов.

Величина напряженности электрического поля $\vec{E}$, возникающей в электролите, зависит от распределения концентраций в растворе и может быть определена из уравнения, выражающего собой закон Гаусса:

$$\operatorname{div}(\vec{E}) = \frac{\rho_e}{\varepsilon}, \quad (15)$$

где ρ_e – плотность распределения заряда, ε – диэлектрическая проницаемость среды.

Рассмотрим далее раствор, состоящий из анионов (с концентрацией c_1), катионов (c_2) и инертных частиц (c_3). Введенные массовые концентрации удовлетворяют уравнению интегрального баланса массы:

$$c_1 + c_2 + c_3 = 1. \quad (16)$$

В то же время перенос массы катионов и анионов определяется уравнениями баланса массы индивидуальных компонент, учитывающими миграцию заряженных частиц в электромагнитном поле:

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) c_1 = D_1 \Delta c_1 + \frac{z_1 F D_1}{RT} \operatorname{div} [c_1 (\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B})]; \quad (17)$$

$$\frac{\partial c_2}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) c_2 = D_2 \Delta c_2 - \frac{z_2 F D_2}{RT} \operatorname{div} [c_2 (\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B})]. \quad (18)$$

Знаки в уравнениях (17), (18) выбраны так, чтобы F означало абсолютную величину заряда.

Рассмотрим теперь ток, возникающий в системе за счет движения катионов и анионов. Соотношения для токов можно получить умножением (13) на $\rho F z_i$, в результате будем иметь

$$\vec{j}_1 = \rho D_1 F z_1 \nabla c_1 + \rho \frac{D_1 F^2 z_1^2}{RT} c_1 (\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}) + \rho F z_1 c_1 \vec{V}; \quad (19)$$

$$\vec{j}_2 = -\rho D_2 F z_2 \nabla c_2 + \rho \frac{D_2 F^2 z_2^2}{RT} c_2 (\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}) - \rho F z_2 c_2 \vec{V}. \quad (20)$$

Складывая последние равенства, найдем

$$\vec{j} = \rho D_1 F z_1 \nabla c_1 - \rho D_2 F z_2 \nabla c_2 + \rho \frac{F^2 z_1^2}{RT} (D_1 z_1^2 c_1 + D_2 z_2^2 c_2) (\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}). \quad (21)$$

При этом, вследствие условия квазинейтральности электролита, члены $\rho F z_1 c_1 \vec{V}$ и $\rho F z_2 c_2 \vec{V}$ в уравнениях (19) и (20), представляющие конвективную часть полного тока, переносимого ионами каждого сорта, взаимно уничтожаются. Кроме того, в дальнейшем мы будем рассматривать автомодельные задачи динамики электролита, для которых характерно, что конвективный перенос осуществляется лишь в осевом направлении канала, а индуцированные токи возникают в сечениях, перпендикулярных указанному направлению.

Вывод уравнения индукции

Соотношение (21), определяющее полный ток в электролите, можно представить еще следующим образом:

$$\vec{j} = \vec{j}_1 + \vec{j}_2 = D_0 \nabla (c_1 - \eta' c_2) + \sigma_0 (c_1 + \eta c_2) (\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}), \quad (22)$$

где
$$D_0 = D_1 F z_1, \sigma_0 = \rho \frac{F^2 D_1 z_1^2}{RT}, \eta' = \frac{D_2 z_2}{D_1 z_1}, \eta = \frac{D_2 z_2^2}{D_1 z_1^2}.$$

При $D_1 \approx D_2$ получим $c_1 - \eta' c_2 \approx c_1 - \frac{z_2}{z_1} c_2 \approx 0$ (условие квазинейтральности раствора). Тогда обобщенный закон Ома для электролита будет иметь вид

$$\vec{j} = \sigma_0 (c_1 + \eta c_2) (\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}). \quad (23)$$

Последнее соотношение можно переписать еще следующим образом:

$$-\vec{E} = -\frac{\vec{j}}{\sigma_0 \sigma} + \vec{V} \times \vec{B}, \text{ где } \sigma = (c_1 + \eta c_2).$$

Взяв rot от обеих частей, получим

$$-(\nabla \times \vec{E}) = -\nabla \times \left(\frac{\vec{j}}{\sigma_0 \sigma} \right) + \nabla \times (\vec{V} \times \vec{B}).$$

Заменяя, согласно закону электромагнитной индукции Фарадея, $-(\nabla \times \vec{E})$ на $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ и $\vec{j}$ на $\frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B})$, на основании закона Ампера получим

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0 \sigma_0} \nabla \times \left(\frac{1}{\sigma} \nabla \times \vec{B} \right) + \nabla \times (\vec{V} \times \vec{B}). \quad (24)$$

Проецируя последнее уравнение на ось z и делая далее упрощения, связанные со стационарностью и автомодельностью течения, а также осуществляя переход к полярным координатам, будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial B}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial B}{\partial \theta} \right) + \mu_0 \sigma_0 B_0 \left(\cos(\theta - \delta) \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{\sin(\theta - \delta)}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) = 0. \quad (25)$$

Обезразмеривание уравнений динамики электролита

Так как учет зависимости проводимости от концентраций не приводит к изменению уравнения импульсов для автомодельного течения, а также безразмерной его формы, то в качестве такового возьмем уравнение (8), а именно:

$$\nabla^2 U + Ha \frac{\partial B}{\partial y} = -1. \quad (26)$$

Используя те же масштабы (*), применяемые при обезразмеривании этого уравнения, из (24) получим

$$\nabla^2 B + \sigma Ha \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{1}{\sigma} (\nabla \sigma \cdot \nabla B). \quad (27)$$

Здесь $Ha = B_0 l_0 \left(\frac{\sigma}{\mu} \right)^{\frac{1}{2}}$ – число Гартмана, характеризующее порядок отношения электромагнитной силы к силе вязкого трения.

В рассматриваемом случае трехкомпонентной смеси, где заряженными являются лишь анионы и катионы, закон Гаусса принимает вид

$$\nabla^2 \phi = -\rho \left(\frac{c_1 z_1 - c_2 z_2}{\varepsilon} \right) F.$$

Принимая, что $\phi_* = l_0 B_0 V_* = \frac{B_0 l_0^2 \Delta p}{\mu}$, из последнего соотношения найдем

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{Ge}{HaSc_1^{1/2}} \left(c_1 - c_2 \frac{z_2}{z_1} \right). \quad (28)$$

Здесь $Ge = \frac{F^2 z_1^2 l_0}{\varepsilon V_* (\rho RT)^{1/2}}$ – энергетический критерий, выражающий собой отношение энергии неразделенного электричества к механической энергии.

Принимая во внимание упрощения, связанные со стационарностью и автономностью течения, и полагая также $\vec{E} = -\nabla \varphi$, а $E_* = l_0^2 \Delta p^2 \frac{\mu_0}{\mu} \left(\frac{\sigma_0}{\mu} \right)^{1/2}$, из (17), (18) найдем

$$\nabla^2 c_1 + z_1 \mu i Ha Sc_1^{1/2} \left[-\left(c_1 \nabla^2 \varphi + \nabla c_1 \cdot \nabla \varphi \right) + \frac{\partial(c_1 U)}{\partial x} \right] = 0; \quad (29)$$

$$\nabla^2 c_2 - z_2 \mu i Ha Sc_2^{1/2} \left[-\left(c_2 \nabla^2 \varphi + \nabla c_2 \cdot \nabla \varphi \right) + \frac{\partial(c_2 U)}{\partial x} \right] = 0. \quad (30)$$

Здесь $Sc_i = \frac{\mu}{\rho D_i}$, $i = 1, 2$, – числа Шмидта, определяющие порядок отношения

скорости диффузии импульса к скорости диффузии массы; $\mu i = \frac{V_*}{\sqrt{RT}}$ – скоростной параметр, выражающий собой отношение характерной скорости макроскопического перемещения к тепловой скорости ионов.

Далее в расчете примем $Sc_1 = Sc_2 = 1$, $\mu i = 0,01$, $Ge \gg 10^2$. Последнее условие говорит о том, что смесь ионов и нейтральных атомов в электролите является квазинейтральной. В этом случае концентрация c_1 может быть найдена из уравнения (29), c_2 – из условия квазинейтральности (условия равенства нулю правой части (28)), а c_3 – из соотношения (31). Уравнением же, определяющим электрический потенциал, будет служить уравнение (30), разрешенное относительно $\nabla^2 \varphi$:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{c_2} \left[\frac{\partial(c_2 U)}{\partial x} - \nabla c_2 \cdot \nabla \varphi - \frac{\nabla^2 c_2}{z_2 \mu i Ha} \right].$$

В случае трехкомпонентной смеси выписанные уравнения замыкаются соотношением интегрального баланса массы:

$$c_1 + c_2 + c_3 = 1. \quad (31)$$

В дальнейшем, чтобы перейти от декартовых координат (x, y) к полярным (r, θ) : $x = r \sin \theta$, $y = r \cos \theta$ достаточно в выписанных уравнениях частные производные по x и y заменить следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \sin(\theta - \delta) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos(\theta - \delta)}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \cos(\theta - \delta) \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin(\theta - \delta)}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Здесь δ – угол наклона вектора внешнего магнитного поля по отношению к выбранному направлению оси Оу, отсчитываемый по стрелке часов (см., например, рис. 3).

Разностная аппроксимация и схема решения задачи в случае круглой трубы

Уравнения (26) – (30), составляющие основу математической модели задачи, будем интегрировать численно с использованием метода конечных разностей и простейших симметричных аппроксимаций производных. Все дифференциальные уравнения математической модели имеют вид уравнения Пуассона. Поэтому в дальнейшем рассмотрим способ численного решения следующего обобщенного уравнения:

$$\nabla^2 \Phi = b. \quad (32)$$

Здесь ∇^2 – плоский оператор Лапласа; $\Phi = U, B, \varphi, c_1, c_2$ – функции, определяемые уравнениями (26) – (30).

Минимальный шаблон, на котором можно аппроксимировать производные этого оператора, заменяя их двухсторонними разностями, показан на рис. 1.

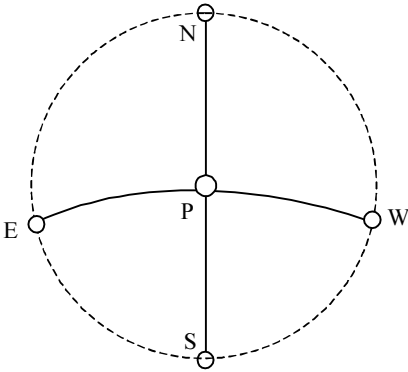


Рис. 1. Шаблоны с четырьмя соседними точками (для расчета в рядовых точках сеточной области)

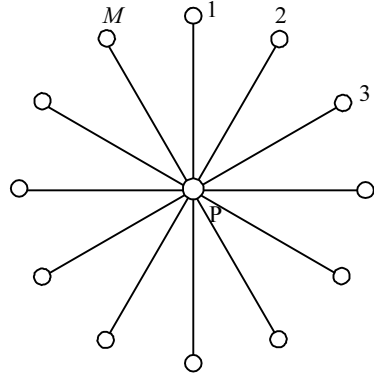


Рис. 2. Шаблоны с M точками на ближайшей сеточной окружности (для расчета в начале полярной системы отсчета)

Простейший разностный аналог уравнения (32) будет следующим:

$$a_E \Phi_E + a_W \Phi_W + a_S \Phi_S + a_N \Phi_N - a_P \Phi_P - b_P = 0, \quad (33)$$

причем $a_P = a_E + a_W + a_S + a_N$.

В случае плоского оператора Лапласа, записанного в полярных координатах, и при использовании для аппроксимации равномерных шагов по r и θ , получим

$$a_E = a_W = \frac{1}{r_j^2 \Delta \theta^2}; \quad a_S = \frac{r_{j-1/2}}{r_j \Delta r^2}; \quad a_N = \frac{r_{j+1/2}}{r_j \Delta r^2} \quad (34)$$

$$r_j = j \Delta r; \quad r_{j-1/2} = (r_j + r_{j-1})/2; \quad r_{j+1/2} = (r_j + r_{j+1})/2 \quad (j = \overline{1, N}).$$

Из (33) величина искомой сеточной функции в центральном узле

$$\Phi_P = \alpha_E \Phi_E + \alpha_W \Phi_W + \alpha_S \Phi_S + \alpha_N \Phi_N - \beta_P, \quad (35)$$

где $\alpha_E = \frac{a_E}{a_P}, \alpha_W = \frac{a_W}{a_P}, \alpha_S = \frac{a_S}{a_P}, \alpha_N = \frac{a_N}{a_P}, \alpha_E = \frac{a_E}{a_P}, \beta_P = \frac{b_P}{a_P}$.

Как видим из (35), значение искомой функции в центральном узле складывается из средневзвешенной величины, определенной по значениям в соседних узлах, сложенной с источниковой частью.

Обобщая формулу (35), можем записать

$$\Phi_P = \sum \alpha_{nb} \Phi_{nb}^* - \beta_P, \quad (36)$$

где индекс « nb » представляет соседнюю точку, а звездочкой отмечены значения рассчитываемой величины, находящиеся в памяти вычислительной машины. Для соседних точек, к которым уже обращались в ходе текущей итерации, это новые рассчитанные значения, для остальных – значения с предыдущей итерации.

Для случая равномерного и симметричного расположения соседних узлов относительно центральной точки шаблона в ситуации, отвечающей рис. 1, имеем

$$\alpha_E = \alpha_W = \alpha_S = \alpha_N = 1/4, \beta_P = \Delta x^2 b_P / 4;$$

в ситуации, отвечающей рис. 2, коэффициенты в (36) будут следующими:

$$\alpha_i = 1/M \quad (i = \overline{1, M}), \beta_P = \pi \Delta r^2 b_P / M,$$

т.е. средневзвешенная составляющая в (35) и (36) превращается в среднеарифметическую величину. Заметим, что в последнем случае роль источниковой части в определении Φ_P заметно снижается, и при больших M вкладом β_P в (36) можно пренебречь.

Следовательно, при стабилизированном движении значения всех МГД-параметров на оси трубы можно приближенно определить как среднее арифметическое соответствующих значений на ближайшей к оси сеточной окружности.

Постановка граничных условий в случае кольцевого канала

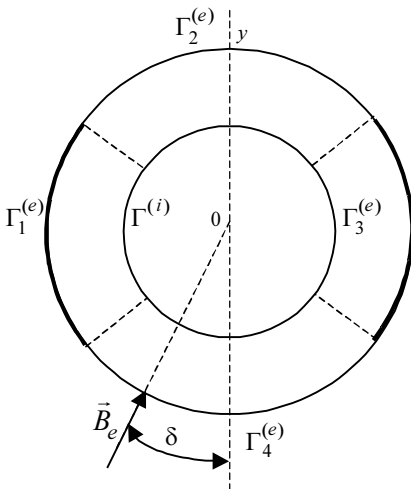


Рис. 3. К постановке граничных условий для магнитной индукции и электрического потенциала. Участки, обозначенные жирной линией, есть участки проводимости, остальные являются участками изоляции

На участках проводимости, т.е. на $\Gamma_1^{(e)}, \Gamma_3^{(e)}$, ставятся условия $\frac{\partial B}{\partial r} = 0$ и $\varphi = 0$; на участках изоляции, т.е. на $\Gamma^{(i)}, \Gamma_2^{(e)}, \Gamma_4^{(e)}$, — условия $B = 0$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0$. Для скорости как на внутреннем контуре $\Gamma^{(i)}$, так и на внешнем $\Gamma^{(e)} = \Gamma_1^{(e)} \cup \Gamma_2^{(e)} \cup \Gamma_3^{(e)} \cup \Gamma_4^{(e)}$ ставятся условия прилипания, то есть $U = 0$.

Для концентраций $c_1|_{\Gamma^{(i)}} = c_1^0$, $c_2|_{\Gamma^{(i)}} = c_2^0$, $\frac{\partial c_1}{\partial r}|_{\Gamma^{(e)}} = \frac{\partial c_2}{\partial r}|_{\Gamma^{(e)}} = 0$. На

рис. 3 угол δ определяет направление воздействия магнитного поля.

Метод локальных сеток

По этому методу изначально в рассмотрение вводится неортогональная сетка, а потом в каждом расчетном узле строится своя ортогональная сетка или, другими словами, проводится коррекция шаблона до ортогонального. Разберем метод на примере искривленных полярных сеток, хотя он может быть применен и в случае декартовых или каких-либо иных структурированных сеток. Для простоты возьмем криволинейную односвязанную плоскую область. Внутри области выберем начало полярной системы отсчета таким образом, чтобы выходящие из центра O лучи пересекали границу не более чем один раз. По соображениям упрощения изложения возьмем постоянным шаг по полярному углу. Далее каждый отрезок, соединяющий начало координат с точкой на границе области, разобьем на одинаковое число шагов и полученные в конце очередного шага точки соединим между собой. В результате получим сетку, имеющую вид, показанный на рис. 4.

После этого все точки нумеруем. Нумерация окажется такой же, как и в случае круговой области с равномерной полярной сеткой. Возьмем произвольный внутренний узел (i, j) , а также ближайшие к нему соседние узлы, номера которых отличаются от номера данного узла на единицу: $(i-1, j)$, $(i+1, j)$, $(i, j-1)$, $(i, j+1)$. Как видно из рис. 5, система из выбранных пяти узлов образует искривленный шаблон. По предлагаемому методу необходимо лишь заменить смещенные узлы $(i-1, j)$ и $(i+1, j)$ на правильно расположенные (на рисунке они отмечены треугольниками) и провести интерполяцию рассчитываемой величины в эти новые точки расчетной области. Указанным способом для каждого узла строится свой фрагмент идеальной полярной сетки. Такая технология исправления шаблона совместно с применением простейшей интерполяции по одному из координатных направлений позволяет проводить численное интегрирование в областях сложной формы без использования преобразования координат и без применения неструктурированных конечно-элементных сеток. В следующем параграфе на конкретном примере мы разберем способ интерполяции, используемый для исправления шаблона.

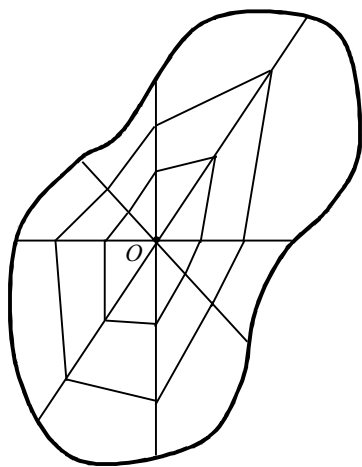


Рис. 4. Расчетная область с нанесенной на ней грубой сеткой

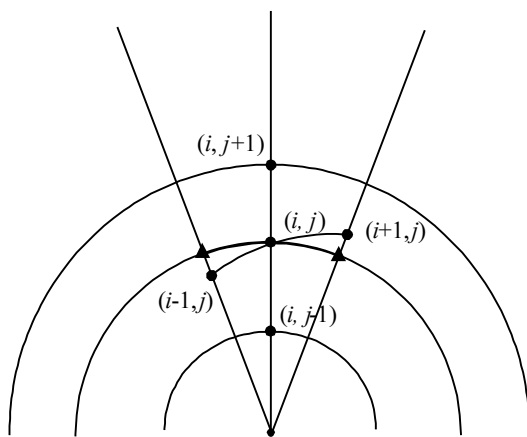


Рис. 5. Исходный и исправленный шаблоны

Схема решения задачи в случае цилиндров с разнесенными осями

Будем рассматривать прямооточное движение электропроводящей многокомпонентной жидкости в пространстве между круговыми цилиндрами со смещенными осями. На рис. 6 показан поперечный разрез такого канала. Начало системы отсчета поместим на оси внешнего цилиндра, имеющего радиус R_2 .

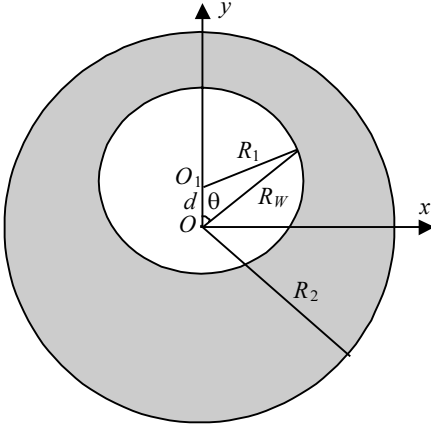


Рис. 6. Поперечное сечение кольцевого канала со смещенными центрами направляющих окружностей

Тогда точка O_1 будет отмечать ось внутреннего цилиндра, поверхность которого можно задать уравнением $r = R_W(\theta)$. Применяя теорему косинусов, можно найти

$$R_W(\theta) = d \cos \theta + \sqrt{d^2 \cos^2 \theta + R_1^2 - d^2}.$$

Здесь $d = OO_1$ – расстояние между осями. Поверхность внешнего цилиндра задается простейшим уравнением $r = R_2 = \text{const}$.

Сетку для заштрихованной области на рис. 6 построим следующим образом. Сначала расчетную область разобьем лучами:

$$\theta = \theta_i = i\Delta\theta = \text{const}_i, \quad i = \overline{1, M}.$$

Далее каждую часть луча заштрихованной зоны разобьем на N частей и соединим узлы, стоящие в одинаковых позициях по радиусу. Узлы этой сетки будут определяться следующими координатами:

$$r_{i,j} = R_W(\theta_i) + j\Delta r_i; \quad \theta_i = i\Delta\theta, \quad i = \overline{1, M}; \quad j = \overline{1, N}. \quad (37)$$

Причем $\Delta r_i = \frac{R_2 - R_W(\theta_i)}{N} = \frac{R_2 - R_{Wi}}{N}$; $\Delta\theta = \frac{2\pi}{M}$; M, N – число разбиений по

окружности и по радиусу соответственно.

При выполненных построениях разностные производные по радиальной координате будут иметь тот же вид, что и в случае соосных цилиндров, с той лишь разницей, что Δr нужно заменить на Δr_i . Производные же по окружной координате нужно заменить следующими разностями:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right)_{i,j} = \frac{\tilde{\Phi}_{i+1,j} - \tilde{\Phi}_{i-1,j}}{2\Delta\theta} + o(\Delta\theta^2); \quad (38)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \right)_{i,j} = \frac{\tilde{\Phi}_{i+1,j} - 2\Phi_{i,j} + \tilde{\Phi}_{i-1,j}}{\Delta\theta^2} + o(\Delta\theta^2). \quad (39)$$

Величины с волной, входящие в последние соотношения, получены как результат линейной интерполяции по следующей формуле:

$$\tilde{\Phi}_{k,j} = \Phi_{k,j+1}\sigma_k + \Phi_{k,j}\varepsilon_k + \Phi_{k,j-1}\delta_k, \quad k = i-1, i+1, \quad (40)$$

Здесь $\delta_k, \varepsilon_k, \sigma_k$ – интерполяционные коэффициенты, определяемые следующими соотношениями:

$$\sigma_k = \frac{r_{i,j} - r_{k,j}}{\Delta r_k}; \varepsilon_k = \frac{r_{k,j+1} - r_{i,j}}{\Delta r_k}; \delta_k = 0 \quad (\text{при } \Delta r_k \leq \Delta r_i); \quad (41)$$

$$\sigma_k = 0; \varepsilon_k = \frac{r_{i,j} - r_{k,j-1}}{\Delta r_k}; \delta_k = \frac{r_{k,j} - r_{i,j}}{\Delta r_k} \quad (\text{при } \Delta r_k \geq \Delta r_i). \quad (42)$$

Соотношение для пересчета значений во внутренних точках (35) в этом случае примет вид

$$\Phi_P = \alpha_E \tilde{\Phi}_E^* + \alpha_W \tilde{\Phi}_W^* + \alpha_S \Phi_S^* + \alpha_N \Phi_N^*, \quad (43)$$

где волна означает, что проведена линейная интерполяция (40) в радиальные позиции луча, проходящего через центральную точку при их проецировании на соседние лучи, а звездочка по-прежнему указывает на то, что используемая величина может относиться как к прошлому, так и к настоящему итерационному слою.

Тестовые проверки

Первоначально нами было рассмотрено течение проводящей жидкости в канале с непроводящими стенками и рассчитано сопротивление магнитогидродинамического потока для круглой трубы при различных числах Гартмана. На рис. 7 представлены результаты тестирования построенного вычислительного алгоритма на данных опытов Дж. Гартмана [2].

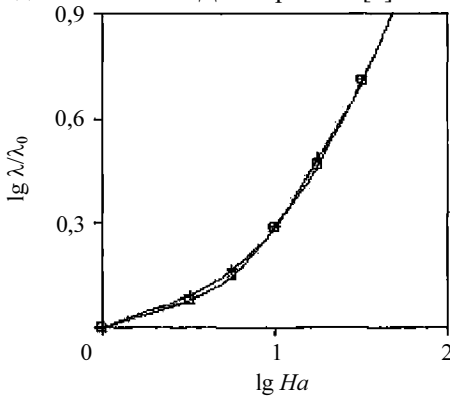


Рис. 7. Результаты расчета (сплошная линия) и экспериментальные данные Дж. Гартмана [4] (символы $\square$). Здесь $\lambda = 8\tau_w/(\rho U^2)$ — коэффициент сопротивления, $\lambda_0 = 64/Re$

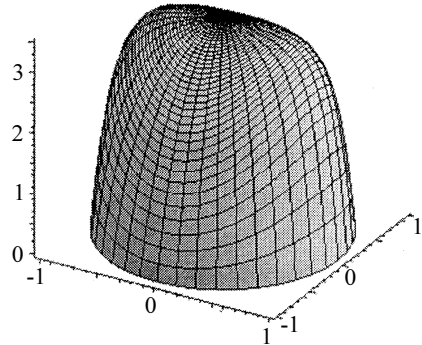


Рис. 8. Поверхность скорости в круглой трубе при $Ha = 10$

Как видно из рисунка, имеется хорошее согласование экспериментальных и вычислительных значений коэффициента трения в широком диапазоне чисел Ha . Наряду с этим, было проведено тестирование на режиме течения непроводящей среды и получен параболоид Пуазейля. В случае же течения проводящей среды в канале с непроводящими стенками мы имеем весьма характерную поверхность скоростей, представляющую собой результат сжатия магнитным полем упомянутого выше параболоида Пуазейля по двум взаимно перпендикулярным направлениям: оси течения и вектору магнитной индукции (см. рис. 8). В результате этого распределение скоростей остается симметричным лишь относительно двух цен-

тральных сечений (сечений, проходящих через ось канала), одно из которых параллельно, а другое перпендикулярно B_0 . При малых, же числах $Ha < 3$ поверхность скоростей является практически осесимметричной. В то же время с ростом Ha описанные выше характерные особенности в распределении скоростей проявляются все более отчетливо.

Результаты расчетов и их анализ

Расчеты выполнены при следующих параметрах:

$$R_2 = 1, \quad R_1 < 0,25, \quad d = 0,2, \quad Ha \in [0, 20], \quad Ge \rightarrow \infty, \quad \mu = 0,01, \\ c_1^0 = 0,005, \quad c_2^0 = 0,085, \quad z_1 = \frac{M_3}{M_1}, \quad z_2 = \frac{M_3}{M_2}, \quad M_1 = 1, \quad M_2 = 17, \quad M_3 = 18.$$

Предварительно отметим, что на внешнем цилиндре чередующиеся секторы проводимости и изоляции имеют равные угловые размеры. Электролит представляет собой смесь ионов и нейтральных атомов. Для простоты принимаем, что в потоке присутствуют анионы H^+ и катионы OH^- , а также нейтральные молекулы воды H_2O .

Ниже на рис. 9 представлены кинематические, магнитные и концентрационные характеристики для случаев течения электролита в асимметричном потоке.

Первый ряд на рис. 9, слева направо – поверхность скоростей и изолинии скорости.

Второй ряд – изолинии магнитной индукции и поверхность электрического потенциала. Третий ряд – поверхности концентрации анионов и катионов.

Как видно из рисунка, представляющего электрический потенциал (рис. 9, четвертая позиция), даже в условиях локальной электрической нейтральности в потоке электролита под действием приложенного магнитного поля индуцируется собственное электрическое поле. Последнее есть результат наличия в среде градиентов концентраций (рис. 9, пятая и шестая позиции). Эффект возникновения распределения электрического потенциала в квазинейтральной среде в результате диффузионного и миграционного перераспределения компонент известен в физике плазмы как эффект амбиполярной диффузии.

Как следует из анализа кинематических распределений, магнитное поле деформирует и поверхность скоростей, оказывая наибольшее сдерживающее действие на поток электролита в окрестности участков проводимости стенок.

Линии равных значений магнитной индукции являются в то же время линиями движения заряженных частиц. Как видно из соответствующего графика (рис. 9, третья позиция), ионы движутся в потоке электролита по траекториям, замыкающимся на проводящих частях стенки канала. Поэтому, как видно из графика, представляющего электрический потенциал, наибольшая разность потенциалов возникает на участках изоляции. При этом распределение концентраций ионов выглядит, как показано на рисунках третьего ряда.

Как показывают расчеты 9, магнитное поле существенно изменяет скорость течения, оказывая наибольшее сдерживающее воздействие на поток в наиболее узкой части канала. Направление же вектора магнитной индукции внешнего поля оказывает влияние прежде всего на траектории движения заряженных частиц, а также сказывается и на уровне разделенности пар ионов, который, к тому же, можно увеличить, смещая центр внутреннего цилиндра к внешней стенке канала.

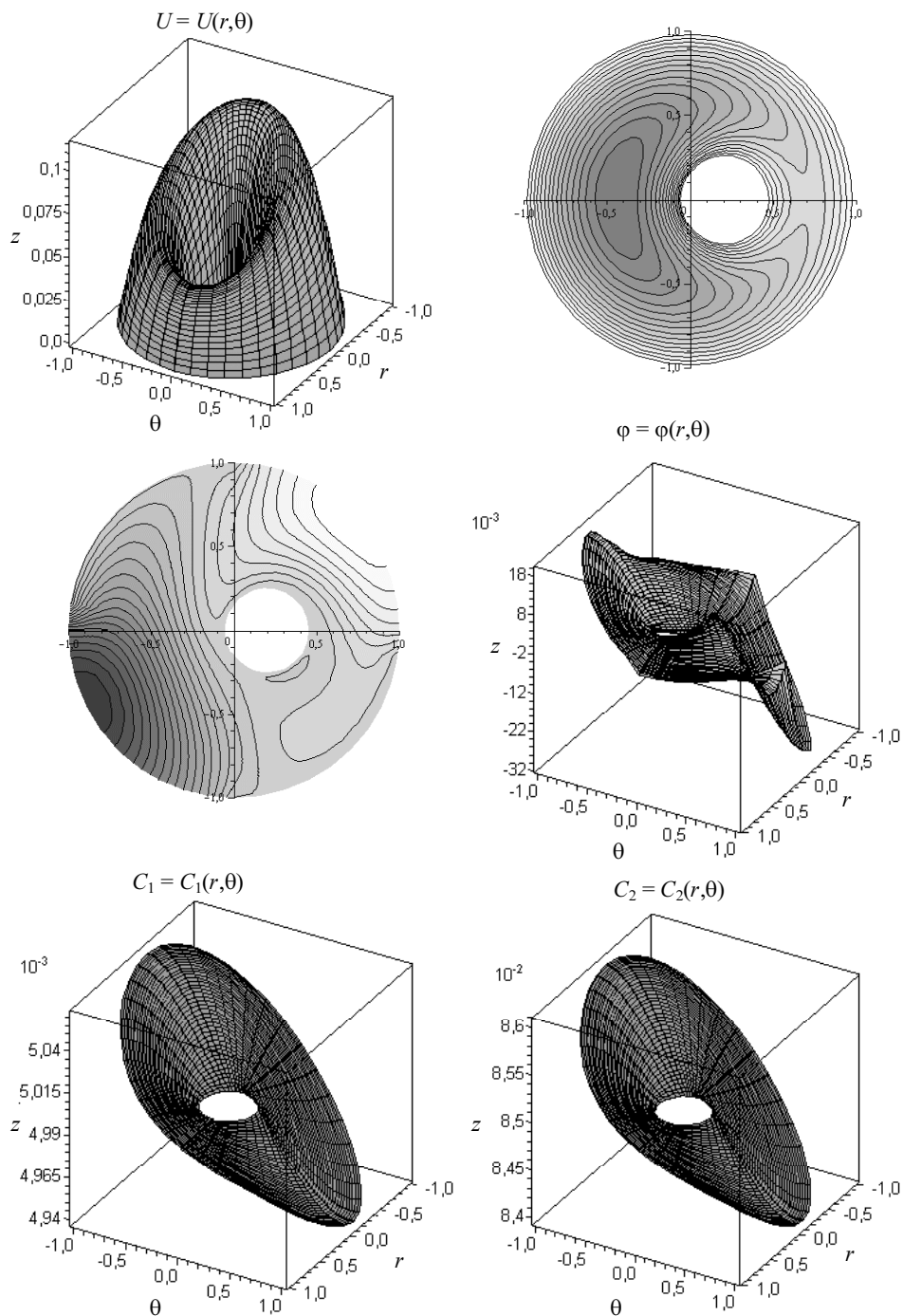


Рис. 9. Рассчитанные поверхности и изолинии, полученные при использовании граничных условий, представленных в описании к рис. 3, для кольцевого канала со смещенными осями ($d = 0,2$; $\delta = 0$; $Ha = 10$)

Выводы

В работе построены уравнения магнитной гидродинамики стабилизированного течения в каналах с существенно переменной проводимостью среды, которые могут быть использованы для изучения критических МГД-явлений, обусловленных феноменом качественного роста электропроводности при введении в электролит высокомолекулярных углеродных добавок.

Предложена вычислительная технология, названная методом локальных сеток, позволяющая без использования преобразований независимых координат или применения неструктурированных конечно-элементных сеток рассматривать каналы сложной формы поперечного сечения.

Расчетами выявлен эффект амбиполярной диффузии в электролите. Это подтверждает гипотезу А.Л. Чижевского о генерации электрических потенциалов движущимися физиологическими жидкостями, которые, в сущности, являются классическими электролитами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973. 848 с.
2. Адамчевский И. Электрическая проводимость жидких диэлектриков. Л.: Энергия, 1972. 100 с.
3. Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Физ.-мат. лит., 1959. 700 с.
4. Тананаев А.В. Течения в каналах МГД-устройств. М.: Атомиздат, 1979. 368 с.

Статья принята в печать 19.07.2008 г.