

МАТЕМАТИКА

УДК 517.54

А.И. Александров, И.А. Александров

ВАРИАЦИОННАЯ ФОРМУЛА ГОЛУЗИНА ДЛЯ ЛЕВНЕРОВСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ КРУГА

Предлагается вывод основной вариационной формулы Голузина в методе внутренних вариаций однолистных отображений круга, основанный на вариации управляющей функции в уравнении Лёвнера.

Ключевые слова: уравнение Лёвнера, вариационная формула Голузина.

В классе S голоморфных однолистных в круге $E = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функций $f(z) = z + \dots$ имеет место вариационная формула

$$f(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon \sum_{k=1}^n \left[A_k H^2(z_k) \frac{f^2(z)}{f(z) - f(z_k)} - A_k K(z, z_k) - \bar{A}_k K\left(z, \frac{1}{z_k}\right) \right] + o(\varepsilon), \quad (1)$$

где
$$H(z) = \frac{z f'(z)}{f(z)}, \quad K(z, \zeta) = \frac{z f'(z)}{2} \frac{z + \zeta}{z - \zeta} + \frac{f(z)}{2},$$

A_k – произвольные комплексные числа, $z_k \in E$, $k = (1, \dots, n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Указанная формула лежит в основе вариационного метода Шиффера – Голузина и в приведенном виде установлена Г.М. Голузиным [1]. Другим способом формула (1) была получена Поммеренке [2]. Недавно А.Н. Сыркашевым [3] был предложен свой вариант вывода этой формулы.

В данной статье предлагается вывод формулы (1) для плотного в S множества $S' \subset S$ функций, отображающих E на области, получающиеся исключением из $\mathbb{C}$ разрезов по конечному числу жордановых кривых. Такие функции представляются в виде

$$f(z) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{\tau} \zeta(\tau, z),$$

где $\zeta(\tau, z)$ – решение уравнения Лёвнера [4]

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = -\zeta \frac{\mu(\tau) + \zeta}{\mu(\tau) - \zeta}, \quad \zeta(0, z) = z \in E, \quad (2)$$

с управляющей функцией $\mu(\tau)$, $0 \leq \tau < \infty$, $|\mu(\tau)| = 1$.

Как отмечает Н.А. Лебедев в своём Добавлении в книге [1], вышедшей в 1966 г., такую попытку он сделал в 1951 г. и кратко здесь же изложил её, ограничиваясь сообщением некоторых идей. Более общей задачей в связи с изучением уравнения Лёвнера – Куфарева занимался в своей докторской диссертации В.Я. Гутлянский [5].

Мы проведём полный вывод формулы (1) для лорановских областей.

Проведём в уравнении (2) замену переменной τ на t по формуле $\tau = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – монотонно возрастающая кусочно-гладкая функция на $[0, \infty)$, $\varphi(0) = 0$, удовлетворяющая неравенству: $\varphi(t) < Me^{-t}$, $M > 0$. Чтобы не вводить новых обозначений, будем вместо $\mu(\varphi(t_1))$ писать $\mu(t)$. Очевидно, $|\mu(t)| = 1$. После замены в (2) переменной τ на t получим

$$\frac{d\zeta}{dt} = -\varphi'(t)\zeta \frac{\mu(t) + \zeta}{\mu(t) - \zeta}, \quad \zeta(0, z) = z. \quad (3)$$

Для решения $\zeta(t, z)$ этого уравнения имеем

$$\frac{d \ln \frac{\zeta}{z}}{dt} = -\varphi'(t) \frac{\mu + \zeta}{\mu - \zeta}$$

и, устремляя здесь z к нулю, находим, что

$$\frac{d \ln \zeta'_z(t, 0)}{dt} = -\varphi'(t).$$

Отсюда

$$\zeta'_z(t, 0) = e^{-\int_0^t \varphi'(x) dx}.$$

Пусть $\varphi'(t) = 1 - \lambda q_1(t)$, где λ – достаточно малое вещественное число, $q_1(t)$ – кусочно-непрерывная функция, $|q_1(t)| < Me^{-t}$. Тогда

$$\zeta'_z(t, 0) = e^{-t} e^{\lambda \int_0^t q_1(x) dx} = e^t \left(1 + \lambda \int_0^t q_1(x) dx + o(\lambda) \right),$$

и функция
$$\zeta^*(t, z) = \frac{\zeta(t, z)}{\zeta'_z(t, 0)} = e^t \zeta(t, z) \left[1 - \lambda \int_0^t q_1(x) dx + o(\lambda) \right],$$

однолистная в E при фиксированном t , удовлетворяет нормировке: $\zeta^*(0, z) = z$, $\zeta^*_{z'}(t, 0) = 1$.

Пусть $q_2(t)$ – кусочно-непрерывная функция на $[0, \infty)$, $|q_2(t)| < M$. Запишем уравнение (3) с управляющей функцией $\mu(t)e^{i\lambda q_2(t)}$ и при $\varphi'(t) = 1 - \lambda q_1(t)$:

$$\frac{d\zeta}{dt} = -(1 - \lambda q_1) \frac{\mu e^{i\lambda q_2} + \zeta}{\mu e^{i\lambda q_2} - \zeta}, \quad \zeta(0, z) = z. \quad (4)$$

Найдём два первых слагаемых в разложении решения $\zeta(\tau, z, \lambda)$ этого уравнения по формуле Тейлора при малых λ . Имеем

$$\mu(t)e^{i\lambda q_2(t)} = \mu(t) + i\lambda \mu(t)q_2(t) + \dots$$

$$\zeta(t, z; \lambda) = \zeta(t, z; 0)(1 + \lambda \Psi(t, z) + \dots), \quad \Psi(0, z) = 0,$$

$$\ln \xi(t, z; \lambda) = \ln \zeta(t, z; 0) + \lambda \Psi(t, z) + \dots$$

Полагая $\zeta(t, z, 0) = \zeta(t, z) = \zeta$, имеем

$$\frac{\mu e^{i\lambda q_2} + \zeta(t, z; \lambda)}{\mu e^{i\lambda q_2} - \zeta(t, z; \lambda)} = \frac{\mu + \zeta}{\mu - \zeta} + \lambda \frac{2\mu\zeta(\Psi - iq_2)}{(\mu - \zeta)^2} + \dots$$

и, согласно (4),

$$\frac{d \ln \varsigma}{dt} + \lambda \frac{d\Psi}{dt} = -(1 - q_1) \left[\frac{\mu + \varsigma}{\mu - \varsigma} + \lambda \frac{2\mu\varsigma(\Psi - iq_2)}{(\mu - \varsigma)^2} + \dots \right].$$

Отсюда, сравнивая коэффициенты при λ , получаем для Ψ обыкновенное дифференциальное линейное неоднородное уравнение первого порядка

$$\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{2\mu\varsigma}{(\mu - \varsigma)^2} \Psi + \frac{\mu + \varsigma}{\mu - \varsigma} q_1 + \frac{2i\mu\varsigma}{(\mu - \varsigma)^2} q_2, \quad \Psi(0, z) = 0. \quad (5)$$

Для решения соответствующего однородного уравнения

$$\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{2\mu\varsigma}{(\mu - \varsigma)^2} \Psi$$

используем формулу

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\varsigma'_z}{\varsigma} \right) = -\frac{2\mu\varsigma'_z}{(\mu - \xi)^2}, \quad \varsigma = \varsigma(t, z),$$

справедливую для решений уравнения Лёвнера. Имеем

$$\frac{1}{\Psi} \frac{d\Psi}{dt} = \frac{\varsigma}{\varsigma'_z} \frac{d}{dt} \left(\frac{\varsigma'_z}{\varsigma} \right).$$

Значит, $\Psi = C \frac{\varsigma'_z}{\varsigma}$. Варьируя произвольную постоянную C , находим, что функция $C(t, z)$ имеет вид

$$C = \int_0^t P(\tau, z) d\tau,$$

где

$$P(\tau, z) = \frac{\varsigma(\tau, z)}{\varsigma'_z(\tau, z)} \left[\frac{\mu(\tau) + \varsigma(\varsigma, z)}{\mu(\tau) - \varsigma(\varsigma, z)} q_1(\tau) + \frac{2i\mu(\tau)\varsigma(\varsigma, z)}{(\mu(\tau) - \varsigma(\varsigma, z))^2} q_2(\tau) \right]. \quad (6)$$

Решением задачи (5) является функция

$$\Psi(t, z) = \frac{\varsigma'_z(t, z)}{\varsigma(t, z)} \int_0^t P(\tau, z) d\tau$$

Для нормированного отображения

$$\frac{\varsigma(t, z; \lambda)}{\varsigma'_z(t, 0; \lambda)} = z + \dots$$

получаем разложение по параметру λ в следующем виде:

$$\frac{\varsigma(t, z, \lambda)}{\varsigma'_z(t, 0, \lambda)} = e^t \varsigma(t, z) + \lambda \left[e^t \varsigma'_z(t, z) \int_0^t P(t, z) dt - e^t \varsigma(t, z) \int_0^t q_1(t) dt \right] + o(\lambda), \quad (7)$$

где $o(\lambda)$ – величина более высокого порядка малости, чем λ , равномерно относительно z внутри E .

Перейдём в (7) к пределу при $t \rightarrow \infty$. Получим в пределе следующую вариационную формулу в классе S' :

$$f^*(z) = f(z) + \lambda \left[f'(z) \int_0^\infty P(t, z) dt - f(z) \int_0^\infty q_1(t) dt \right] + o(\lambda). \quad (8)$$

Она может быть использована для получения различных вариационных формул за счёт выбора функций $q_2(t)$, $q_1(t)$. Мы придём к вариационной формуле Голузина, полагая

$$q_1 = \sum_{k=1}^n \left[A_k Q_k^2 \frac{2\mu\varsigma_k}{(\mu - \varsigma_k)^2} + \overline{A_k} \overline{Q_k^2} \frac{2\mu\overline{\varsigma_k^{-1}}}{(\mu - \overline{\varsigma_k^{-1}})^2} \right],$$

$$q_2 = \frac{1}{2i} \sum_{k=1}^n \left[A_k Q_k^2 \frac{\mu + \varsigma_k}{\mu - \varsigma_k} + \overline{A_k} \overline{Q_k^2} \frac{\mu + \overline{\varsigma_k^{-1}}}{\mu - \overline{\varsigma_k^{-1}}} \right],$$

где $A_1, \dots, A_n$ – постоянные, $Q_k = z_k \varsigma'_{z_k} / \varsigma_k$, $\varsigma_k = \varsigma(t, z_k)$, $\varsigma'_{z_k} = \varsigma'_z(t, z_k)$ и $z_1, \dots, z_n$ – попарно различные точки единичного круга.

С учетом указанного выбора $q_1(t)$, $q_2(t)$ имеем

$$P(t, z) = \sum_{k=1}^n \left(A_k X_k + \overline{A_k} Y_k \right), \quad (9)$$

где

$$X_k = \frac{\varsigma}{\varsigma'_z} Q_k^2 \left[\frac{\mu + \varsigma}{\mu - \varsigma} \frac{2\mu\varsigma_k}{(\mu - \varsigma_k)^2} + \frac{\mu + \varsigma_k}{\mu - \varsigma_k} \frac{\mu\varsigma}{(\mu - \varsigma)^2} \right],$$

$$Y_k = \frac{\varsigma}{\varsigma'_z} \overline{Q_k^2} \left[\frac{\mu + \varsigma}{\mu - \varsigma} \frac{2\mu\overline{\varsigma_k^{-1}}}{(\mu - \overline{\varsigma_k^{-1}})^2} + \frac{\mu + \overline{\varsigma_k^{-1}}}{\mu - \overline{\varsigma_k^{-1}}} \frac{\mu\varsigma}{(\mu - \varsigma)^2} \right].$$

Представим эти функции в виде, удобном для интегрирования.

Легко проверить, что для любых u , $u \neq v$, $u^2 + v^2 \neq 0$, справедливо равенство

$$\frac{\mu + u}{\mu - u} \frac{\mu}{(\mu - v)^2} = \frac{u}{(\mu - v)^2} \left(\frac{\mu + u}{\mu - u} - \frac{\mu + v}{\mu - v} \right) - \frac{u + v}{u - v} \frac{\mu}{(\mu - v)^2}$$

и что если $u = \varsigma(\tau, z)$ – решение уравнения Лёвнера с управляющей функцией $\mu(\tau)$, то $v = 1/\varsigma(\tau, \bar{z})$ – решение этого же уравнения.

Если u , v – различные решения уравнения Лёвнера, то

$$\frac{d}{d\tau} \frac{u + v}{u - v} = \frac{2uv}{(u - v)^2} \left(\frac{\mu + u}{\mu - u} - \frac{\mu + v}{\mu - v} \right)$$

и

$$\frac{2\mu v}{(\mu - v)^2} = -\frac{v}{v'_z} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{v'_z}{v} \right) = \frac{v'_z}{v} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{v}{v'_z} \right).$$

Поэтому

$$\frac{\mu + u}{\mu - u} \frac{2\mu v}{(\mu - v)^2} = \frac{d}{d\tau} \frac{u+v}{u-v} + \frac{u+v}{u-v} \frac{v}{v'_z} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{v'_z}{v} \right) = \frac{d}{d\tau} \frac{u+v}{u-v} - \frac{u+v}{u-v} \frac{v'_z}{v} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{v}{v'_z} \right).$$

Применим эти формулы для преобразования X_k . Имеем

$$\begin{aligned} X_k &= \frac{\varsigma}{\varsigma'_z} Q_k^2 \left[\frac{d}{d\tau} \frac{\varsigma + \varsigma_k}{\varsigma - \varsigma_k} + \frac{\varsigma + \varsigma_k}{\varsigma - \varsigma_k} \frac{\varsigma_k}{\varsigma'_z} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\varsigma'_z}{\varsigma_k} \right) + \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \frac{\varsigma_k + \varsigma}{\varsigma_k - \varsigma} + \frac{1}{2} \frac{\varsigma_k + \varsigma}{\varsigma_k - \varsigma} \frac{\varsigma'_z}{\varsigma} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\varsigma}{\varsigma'_z} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\varsigma}{\varsigma'_z} Q_k^2 \frac{d}{d\tau} \frac{\varsigma + \varsigma_k}{\varsigma - \varsigma_k} + \frac{1}{2} \frac{\varsigma + \varsigma_k}{\varsigma - \varsigma_k} Q_k^2 \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\varsigma}{\varsigma'_z} \right) + \frac{1}{2} \frac{\varsigma + \varsigma_k}{\varsigma - \varsigma_k} \frac{\varsigma}{\varsigma'_z} \frac{d}{d\tau} (Q_k^2) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\varsigma}{\varsigma'_z} \cdot Q_k^2 \frac{\varsigma + \varsigma_k}{\varsigma - \varsigma_k} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Проводя аналогичные вычисления для Y_k , имеем

$$\begin{aligned} Y_k &= \frac{\varsigma}{\varsigma'_z} \overline{Q_k^2} \left[\frac{d}{d\tau} \frac{\varsigma + \overline{\varsigma_k^{-1}}}{\varsigma - \overline{\varsigma_k^{-1}}} + \frac{\varsigma + \overline{\varsigma_k^{-1}}}{\varsigma - \overline{\varsigma_k^{-1}}} \frac{\overline{\varsigma_k^{-1}}}{\varsigma'_z} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\overline{\varsigma'_z}}{\overline{\varsigma_k^{-1}}} \right) + \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \frac{\overline{\varsigma_k^{-1}} + \varsigma}{\overline{\varsigma_k^{-1}} - \varsigma} + \frac{1}{2} \frac{\overline{\varsigma_k^{-1}} + \varsigma}{\overline{\varsigma_k^{-1}} - \varsigma} \frac{\varsigma'_z}{\varsigma} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\varsigma}{\varsigma'_z} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\varsigma}{\varsigma'_z} \cdot \overline{Q_k^2} \frac{\varsigma + \overline{\varsigma_k^{-1}}}{\varsigma - \overline{\varsigma_k^{-1}}} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Преобразуем q_1 к виду, удобному для интегрирования:

$$\begin{aligned} q_1 &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^n A_k Q_k^2 \frac{2\mu \varsigma_k}{(\mu - \varsigma_k)^2} = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^n A_k \frac{z_k^2 \varsigma_{zk}^2}{\varsigma_k^2} \cdot \frac{\varsigma_k}{\varsigma'_z} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\varsigma'_z}{\varsigma_k} \right) = \\ &= -\operatorname{Re} \sum_{k=1}^n A_k \frac{d}{d\tau} (Q_k^2) = -\sum_{k=1}^n \frac{A_k}{2} \frac{d}{d\tau} (Q_k^2) - \sum_{k=1}^n \frac{\overline{A_k}}{2} \frac{d}{d\tau} (\overline{Q_k^2}). \end{aligned} \quad (12)$$

Переходим к записи значений интегралов в (8). Отметим, что

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} Q_k = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{z_k \varsigma'_z}{\varsigma_k} = H(z_k), \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} Q_k = 1, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\varsigma}{\varsigma'_z} = \frac{f(z)}{f'(z)}, \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\varsigma}{\varsigma'_z} = z.$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varsigma + \varsigma_k}{\varsigma - \varsigma_k} = \frac{f(z) + f(z_k)}{f(z) - f(z_k)}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varsigma + \overline{\varsigma_k^{-1}}}{\varsigma - \overline{\varsigma_k^{-1}}} = -1.$$

Согласно (8) – (12), имеем

$$\begin{aligned} f^*(z) &= f(z) + \lambda \left\{ f(z) \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{2} (H^2(z_k) - 1) + f(z) \sum_{k=1}^n \frac{\overline{A_k}}{2} (\overline{H^2(z_k)} - 1) + \right. \\ &\quad \left. + f'(z) \sum_{k=1}^n A_k \left[\frac{f(z)}{f'(z)} H_k^2 \frac{f(z) + f(z_k)}{f(z) - f(z_k)} - z \frac{z + z_k}{z - z_k} \right] - \right. \\ &\quad \left. - f'(z) \sum_{k=1}^n \overline{A_k} \left[\frac{1}{2} \frac{f(z)}{f'(z)} \overline{H^2(z_k)} + \frac{z}{2} \frac{z + \overline{z_k^{-1}}}{z - \overline{z_k^{-1}}} \right] + o(\lambda), \right. \end{aligned}$$

то есть

$$f^*(z) = f(z) + \lambda \left[\sum_{k=1}^n A_k H^2(z_k) \frac{f^2(z)}{f(z) - f(z_k)} - A_k \left(\frac{f'(z)}{2} \frac{z + z_k}{z - z_k} + \frac{f(z)}{2} \right) - \overline{A_k} \left(\frac{zf'(z)}{2} \frac{z + \overline{z_k}^{-1}}{z - \overline{z_k}^{-1}} + \frac{f(z)}{2} \right) \right] + o(\lambda).$$

Вывод вариационной формулы Голузина для $f \in S'$ окончен. Так как S' плотен в S в смысле равномерной сходимости последовательностей внутри круга E , то формула распространяется на весь класс S .

ЛИТЕРАТУРА

1. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.
2. Pommerenke Ch. On a variational method for univalent functions // Michigan Math. J. 1970. V. 17. P. 1 – 3.
3. Сыркашев А.Н. О вариационном и параметрическом методах в теории однолистных функций // Вестник ТГУ. 2003. № 280. С. 86 – 96.
4. Александров И.А. Параметрические продолжения в теории однолистных функций. М.: Наука, 1976.
5. Гутлянский В.Я. Параметрические представления и экстремальные задачи в теории однолистных функций: Автореф. дис. ... докт. физ.мат. наук. Киев: Математический институт АН УССР, 1972.

Принята в печать 08.04.08.