

УДК 514.752

О.В. Васильева, Н.М. Онищук

МЕРИДИАНЫ И ПАРАЛЛЕЛИ НЕГОЛОНОМНОЙ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ ДВОЙНОГО ВРАЩЕНИЯ В E_4

Рассматривается неголономный аналог гиперповерхности двойного вращения в четырехмерном евклидовом пространстве. Показано, что меридианы и параллели в неголономном случае – это линии кривизны 2-го рода [4]. Изучены свойства меридианов и параллелей в зависимости от значений главных кривизн 2-го рода.

Ключевые слова: неголономная геометрия, векторное поле.

Известно, что в четырехмерном евклидовом пространстве существует два вида вращений. Применяя эти вращения к регулярной кривой, лежащей в двумерной плоскости, можно получить два вида поверхностей вращения: сферические поверхности вращения [1] и поверхности двойного вращения [1]. Последние имеют центр вращения и две двумерные взаимно ортогональные оси вращения, пересекающиеся в одной точке (центре вращения). Характерным признаком поверхности двойного вращения является тот факт, что все нормали этой поверхности пересекают обе оси вращения (каждую в одной точке, отличной от центра вращения). Свойства нормалей гиперповерхностей двойного вращения мы положили в основу определения неголономной гиперповерхности вращения.

Определение 1. *Гиперраспределением на E_4 называется гладкое отображение, сопоставляющее каждой точке $M \in E_4$ гиперплоскость π_3 , проходящую через точку M [3, 5].*

Гиперраспределение однозначно определяет уравнение Пфаффа [3] и называется голономным, если определяемое им уравнение Пфаффа вполне интегрируемо, то есть если через каждую точку $M \in E_4$ проходит интегральная гиперповерхность, касающаяся в точке M плоскости π_3 . В этом случае говорят, что E_4 «расслаивается» на трехмерные поверхности. Если данное уравнение Пфаффа не является вполне интегрируемым, то распределение называют неголономным. Однако и в этом случае интегральные кривые или двумерные интегральные поверхности, проходящие через точку M , также касаются в этой точке плоскости π_3 . Возникает возможность сравнить геометрию интегральных кривых, проходящих через одну точку в голономном и неголономном случаях.

Определение 2. *Прямая, проходящая через точку M и ортогональная плоскости π_3 , называется нормалью гиперраспределения.*

Определение 3. *Неголономной гиперповерхностью двойного вращения (НПДВ) называется такое неголономное гиперраспределение, все нормали которого пересекают две неподвижные взаимно перпендикулярные двумерные плоскости, пересекающиеся в одной точке [2].*

Неподвижные двумерные плоскости называются *двумерными осями вращения*, а точка их пересечения – *центром вращения*. Предполагается также, что каждая нормаль пересекает каждую двумерную ось вращения в одной точке, не совпадающей с центром вращения.

1. Главные кривизны 2-го рода неголономной гиперповерхности двойного вращения

Пусть неголономная поверхность задана в некоторой области $G \subset \mathbb{E}_4$ и $M \in G$. Выберем ортонормированный подвижной репер $\{M, \mathbf{e}_\alpha\}$ ($\alpha = 1, \dots, 4$) следующим образом: векторы $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ поместим в гиперплоскость π_3 , а вектор $\mathbf{e}_4$ направим по нормали к π_3 в точке M . В деривационных формулах репера

$$d\mathbf{r} = \omega^\alpha \mathbf{e}_\alpha,$$

$$d\mathbf{e} = \omega^\alpha_\beta \mathbf{e}_\alpha$$

формы ω^α , ω^α_4 – главные, из них ω^α – базисные и поэтому

$$\omega^\alpha_4 = A^i_4 \omega^i, \quad (1.1)$$

где $i = 1, 2, 3$, $\alpha = 1, 2, 3, 4$. Кривые неголономной поверхности – это интегральные кривые уравнения

$$\omega^4 = 0.$$

Теорема 1.1. *Все главные кривизны 2-го рода неголономной гиперповерхности двойного вращения в каждой точке $M \in G$ являются вещественными числами, при этом два из них различные.*

Доказательство. По определению НПДВ ее нормаль

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + t \mathbf{e}_4 \quad (1.2)$$

пересекает две двумерные оси вращения P_2 и P_3 ($\mathbf{r}$ – радиус-вектор точки M). Точки пересечения прямой (1.2) с P_2 и P_3 обозначим F_2 и F_3 . Каждая из точек F_2 и F_3 описывает двумерную плоскость (P_2 и P_3 соответственно).

Пусть $\mathbf{F}_2 = \mathbf{r} + t_2 \mathbf{e}_4$ и $\mathbf{F}_3 = \mathbf{r} + t_3 \mathbf{e}_4$ – радиус-векторы точек F_2 и F_3 . Так как $F_2 \neq F_3$ то $t_2 \neq t_3$.

Направим вектор $\mathbf{e}_2$ ортогонально плоскости P_2 , а вектор $\mathbf{e}_3$ – ортогонально P_3 . Это возможно, так как плоскости P_2 и P_3 ортогональны. Репер $\{M, \mathbf{e}_\alpha\}$ с этого момента становится каноническим. Векторы $d\mathbf{F}_2$ и $d\mathbf{F}_3$ будут ортогональны соответственно векторам $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$, т.е.

$$(d\mathbf{F}_2, \mathbf{e}_2) = 0, \quad \text{и} \quad (d\mathbf{F}_3, \mathbf{e}_3) = 0. \quad (1.3)$$

Подставив

$$\begin{aligned} d\mathbf{F}_2 &= \omega^\alpha \mathbf{e}_\alpha + dt_2 \mathbf{e}_4 + t_2 \omega^i_4 \mathbf{e}_i, \\ d\mathbf{F}_3 &= \omega^\alpha \mathbf{e}_\alpha + dt_3 \mathbf{e}_4 + t_3 \omega^i_4 \mathbf{e}_i, \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$i = 1, 2, 3, \quad \alpha = 1, 2, 3, 4,$$

в (1.3), получим

$$\begin{aligned} \omega^2 + t_2 (A^2_1 \omega^1 + A^2_2 \omega^2 + A^2_3 \omega^3 + A^2_4 \omega^4) &= 0, \\ \omega^3 + t_3 (A^3_1 \omega^1 + A^3_2 \omega^2 + A^3_3 \omega^3 + A^3_4 \omega^4) &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда, в силу независимости форм $\{\omega^\alpha\}$ следует

$$\begin{aligned} 1 + t_2 A^2_2 &= 0, \quad A^2_1 = A^2_3 = A^2_4 = 0, \quad dt_2 = \frac{dA^2_2}{(A^2_2)^2}, \\ 1 + t_3 A^3_3 &= 0, \quad A^3_1 = A^3_2 = A^3_4 = 0, \quad dt_3 = \frac{dA^3_3}{(A^3_3)^2}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Так как $t_2 \neq t_3$, то $A_2^2 \neq A_3^3$.

Характеристическое уравнение оператора A^* [4] при условиях (1.5) имеет вид

$$\begin{vmatrix} A_1^1 - \lambda & A_2^1 & A_3^1 \\ 0 & A_2^2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & A_3^3 - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (1.6)$$

Все три корня уравнения (1.6) вещественные. А так как главные кривизны 2-го рода k_1, k_2, k_3 отличаются от них лишь знаком, то это значит, что *главные кривизны 2-го рода – вещественные числа*: $k_1 = -A_1^1, k_2 = -A_2^2, k_3 = -A_3^3$, при $k_2 \neq k_3$. ■

Вектор $\rho = \frac{1}{2}(A_3^2 - A_3^3)\mathbf{e}_1 + \frac{1}{2}(A_3^1 - A_1^3)\mathbf{e}_2 + \frac{1}{2}(A_1^2 - A_2^1)\mathbf{e}_3$ называется вектором неголономности [4], так как обращение его в нуль-вектор является необходимым и достаточным условием голономности распределения. В каноническом репере в силу (1.5) он имеет координаты

$$\rho^1 = 0, \rho^2 = -\frac{1}{2}A_3^1, \rho^3 = \frac{1}{2}A_1^2. \quad (1.7)$$

Обозначим $A_1^1 = a$. Вектор $a\mathbf{e}_1$ – это вектор кривизны линии тока векторного поля нормалей $\{\mathbf{e}_4\}$. Уравнения (1.1) и формулы (1.4) теперь принимают вид

$$\begin{aligned} \omega^1_4 &= -k_1\omega^1 + 2\rho^3\omega^2 - 2\rho^2\omega^3 + a\omega^4, \\ \omega^2_4 &= -k_2\omega^2, \\ \omega^3_4 &= -k_3\omega^3 \end{aligned} \quad (1.8)$$

и

$$\begin{aligned} d\mathbf{F}_2 &= 1/k_2 ((k_1 - k_2)\omega^1 + 2\rho^3\omega^2 - 2\rho^2\omega^3 + a\omega^4)\mathbf{e}_1 + \\ &+ 1/k_2 (k_3 - k_1)\omega^3\mathbf{e}_3 + (\omega^4 - \frac{dk_2}{(k_2)^2})\mathbf{e}_4, \\ d\mathbf{F}_3 &= 1/k_3 ((k_3 - k_1)\omega^1 + 2\rho^3\omega^2 - 2\rho^2\omega^3 + a\omega^4)\mathbf{e}_1 + \\ &+ 1/k_3 (k_3 - k_2)\omega^2\mathbf{e}_2 + (\omega^4 - \frac{dk_3}{(k_3)^2})\mathbf{e}_4. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Так как F_2 описывает двумерное многообразие, то формы при $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ в (1.9) линейно зависимы:

$$\omega^4 - \frac{dk_2}{(k_2)^2} = \alpha \left(1 - \frac{k_3}{k_2}\right) \omega^3 + \beta \left(\left(1 - \frac{k_1}{k_2}\right) \omega^1 + \frac{2\rho^3}{k_2} \omega^2 - \frac{2\rho^2}{k_2} \omega^3 + \frac{a}{k_2} \omega^4 \right).$$

Обозначим $\beta_1 = -\beta k_2, \beta_2 = -\alpha k_2$, получим

$$dk_2 = \beta_1 ((k_2 - k_1)\omega^1 + 2\rho^3\omega^2 - 2\rho^2\omega^3 + a\omega^4) + \beta_2 (k_2 - k_3)\omega^3 + (k_2)^2\omega^4. \quad (1.10)$$

А так как F_3 также описывает двумерное многообразие, то аналогичным образом находим, что

$$dk_3 = \alpha_1 ((k_3 - k_1)\omega^1 + 2\rho^3\omega^2 - 2\rho^2\omega^3 + a\omega^4) + \alpha_2 (k_3 - k_2)\omega^3 + (k_3)^2\omega^4. \quad (1.11)$$

Подставив (1.10), (1.11) в (1.9), получим

$$\begin{aligned} d\mathbf{F}_2 &= 1/(k_2)^2((k_1 - k_2) \omega^1 + 2\rho^3 \omega^2 - 2\rho^2 \omega^3 + a\omega^4) (k_2 \mathbf{e}_1 - \beta_1 \mathbf{e}_4) + \\ &\quad + 1/(k_2)^2(k_2 - k_3) \omega^3 (k_2 \mathbf{e}_3 - \beta_2 \mathbf{e}_4), \\ d\mathbf{F}_3 &= 1/(k_3)^2((k_3 - k_1) \omega^1 + 2\rho^3 \omega^2 - 2\rho^2 \omega^3 + a\omega^4) (k_3 \mathbf{e}_1 - \alpha_1 \mathbf{e}_4) + \\ &\quad + 1/(k_3)^2(k_3 - k_2) \omega^3 (k_3 \mathbf{e}_2 - \alpha_2 \mathbf{e}_4). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Из (1.12) видим, что плоскость P_2 содержит два независимых вектора

$$k_2 \mathbf{e}_1 - \beta_1 \mathbf{e}_4, k_2 \mathbf{e}_3 - \beta_2 \mathbf{e}_4, \quad (1.13)$$

а плоскость P_3 содержит два независимых вектора

$$k_3 \mathbf{e}_1 - \alpha_1 \mathbf{e}_4, k_3 \mathbf{e}_2 - \alpha_2 \mathbf{e}_4. \quad (1.14)$$

Так как $P_2 \perp P_3$, то каждый вектор из (1.13) ортогонален каждому из векторов (1.14). Это приводит к следующим соотношениям:

$$k_2 k_3 + \alpha_1 \beta_1 = 0, \beta_2 = \alpha_2 = 0, \alpha_1 \neq 0, \beta_1 \neq 0. \quad (1.15)$$

В результате формулы (1.10), (1.11), (1.12) принимают вид

$$\begin{aligned} dk_2 &= \beta_1 ((k_2 - k_1) \omega^1 + 2\rho^3 \omega^2 - 2\rho^2 \omega^3 + a\omega^4) + (k_2)^2 \omega^4; \\ dk_3 &= \alpha_1 ((k_3 - k_1) \omega^1 + 2\rho^3 \omega^2 - 2\rho^2 \omega^3 + a\omega^4) + (k_3)^2 \omega^4; \\ d\mathbf{F}_2 &= 1/(k_2)^2((k_1 - k_2) \omega^1 + 2\rho^3 \omega^2 - 2\rho^2 \omega^3 + a\omega^4) (k_2 \mathbf{e}_1 - \beta_1 \mathbf{e}_4) + \\ &\quad + 1/k_2(k_2 - k_3) \omega^3 \mathbf{e}_3; \\ d\mathbf{F}_3 &= 1/(k_3)^2((k_3 - k_1) \omega^1 + 2\rho^3 \omega^2 - 2\rho^2 \omega^3 + a\omega^4) (k_3 \mathbf{e}_1 - \alpha_1 \mathbf{e}_4) + \\ &\quad + 1/k_3(k_3 - k_2) \omega^3 \mathbf{e}_2. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Уравнения плоскостей P_2 и P_3 (двумерных осей вращения) соответственно имеют вид

$$\begin{aligned} \beta_1 x^1 + k_2 x^4 &= 1; \\ x^2 &= 0, \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 x^1 + k_3 x^4 &= 1, \\ x^3 &= 0, \end{aligned} \quad (1.19)$$

где $k_2 k_3 + \alpha_1 \beta_1 = 0$.

Так как плоскости (1.18) и (1.19) пересекаются лишь в одной точке, то

$$\begin{vmatrix} \beta_1 & 0 & 0 & k_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 0 & 0 & k_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Отсюда следует

$$\beta_1 k_3 - \alpha_1 k_2 \neq 0. \quad (1.20)$$

Заметим, что условия на инварианты получены исходя из того, что точки F_2 и F_3 (каждая) описывают двумерные многообразия (не обязательно плоскости). А плоскости (1.18), (1.19) – это их касательные плоскости. Чтобы эти многообразия

были бы действительно плоскостями, нужно, чтобы их касательные плоскости не менялись. Требование неподвижности плоскостей (1.18) и (1.19) приводит к равенствам

$$\begin{aligned}\omega^2_1 &= -\beta_1 \omega^2, \\ \omega^3_1 &= -\alpha_1 \omega^3, \\ \omega^3_2 &= 0;\end{aligned}\tag{1.21}$$

$$d\alpha_1 = ((\alpha_1)^2 + k_1 k_3) \omega^1 - 2\rho^3 k_3 \omega^2 - 2\rho^2 k_3 \omega^3 + k_3 (\alpha_1 - a) \omega^4.\tag{1.22}$$

Таким образом, найдены все условия на инварианты, определяющие НПДВ. Итог сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 2.1. *Для неголономной гиперповерхности двойного вращения выполняются следующие условия:*

1) в каждой точке все три главные кривизны 2-го рода k_1, k_2, k_3 – вещественные числа, причем два из них не совпадающие ($k_2 \neq k_3$);

2) дифференциалы функций k_2, k_3 выражаются формулами (1.16)), в которых ρ^2, ρ^3, a – координаты векторов $\rho = \rho^2 \mathbf{e}_2 + \rho^3 \mathbf{e}_3$ (вектор неголономности) и $a \mathbf{e}_1$ (вектор кривизны линии тока), а дифференциал функции α_1 определяется формулой (1.22);

3) инварианты $k_2, k_3, \alpha_1, \beta_1$ связаны зависимостью $k_2 k_3 + \alpha_1 \beta_1 = 0, k_2 \neq 0, k_3 \neq 0, \alpha_1 \neq 0, \beta_1 \neq 0, \beta_1 k_3 - \alpha_1 k_2 \neq 0$.

В заключение данного раздела выпишем дифференциальные продолжения уравнений (1.8):

$$\begin{aligned}dk_1 &= -\gamma_{11} \omega^1 + (2\rho^3(\beta_1 + a) - \gamma_{12}) \omega^2 + (-2\rho^2(\alpha_1 + a) - \gamma_{13}) \omega^3 + \\ &\quad + (a^2 + (k_1)^2 - \gamma_{14}) \omega^4, \\ dk_2 &= \beta_1 ((k_2 - k_1) \omega^1 + 2\rho^3 \omega^2 - 2\rho^2 \omega^3 + a \omega^4) + (k_2)^2 \omega^4, \\ dk_3 &= \alpha_1 ((k_3 - k_1) \omega^1 + 2\rho^3 \omega^2 - 2\rho^2 \omega^3 + a \omega^4) + (k_3)^2 \omega^4, \\ d\alpha_1 &= ((\alpha_1)^2 + k_1 k_3) \omega^1 - 2\rho^3 k_3 \omega^2 + 2\rho^2 k_3 \omega^3 + k_3 (\alpha_1 - a) \omega^4, \\ d\beta_1 &= ((\beta_1)^2 + k_1 k_2) \omega^1 - 2\rho^3 k_2 \omega^2 + 2\rho^2 k_2 \omega^3 + k_2 (\beta_1 - a) \omega^4, \\ 2d\rho^3 &= \gamma_{12} \omega^1 + \gamma_{22} \omega^2 + \gamma_{23} \omega^3 + (\gamma_{24} + 2\rho^3 (k_1 + k_2)) \omega^4, \\ 2d\rho^2 &= -\gamma_{13} \omega^1 - \gamma_{23} \omega^2 - \gamma_{33} \omega^3 + (2\rho^2 (k_1 + k_3) - \gamma_{34}) \omega^4, \\ da &= \gamma_{14} \omega^1 + \gamma_{24} \omega^2 + \gamma_{34} \omega^3 + \gamma_{44} \omega^4.\end{aligned}\tag{1.23}$$

2. Меридианы и параллели неголономной гиперповерхности двойного вращения

Итак, мы имеем две неподвижные взаимно перпендикулярные плоскости P_2 и P_3 , пересекающиеся в одной точке и определяемые в локальных координатах уравнениями (1.18), (1.19). Всякая нормаль НПДВ пересекает эти плоскости в двух точках $F_2 \in P_2$ и $F_3 \in P_3$. Плоскости P_2 и P_3 являются двумерными осями вращения данной НПДВ. А точка C , в которой они пересекаются, – это центр вращения с координатами

$$C\left(\frac{k_2 - k_3}{\alpha_1 k_2 - \beta_1 k_3}, 0, 0, \frac{\alpha_1 - \beta_1}{\alpha_1 k_2 - \beta_1 k_3}\right).$$

Ранее мы показали, что две главные кривизны 2-го рода k_2 и k_3 не могут совпадать ($k_2 \neq k_3$). Третья же главная кривизна k_1 может не совпадать ни с одной из них, но может и совпадать с какой-нибудь.

Изучим каждый из этих случаев.

I. Рассмотрим НПДВ, для которых $k_1 \neq k_2$, $k_1 \neq k_3$, $k_2 \neq k_3$.

Находим главные направления и линии кривизны 2-го рода. Главные направления 2-го рода – это направления собственных векторов оператора A^* . Характеристическое уравнение (1.6) теперь имеет вид

$$\begin{vmatrix} -k_1 - \lambda & 2\rho^3 & -2\rho^2 \\ 0 & -k_2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

а собственные числа $\lambda_i = -k_i$ ($i = 1, 2, 3$). Отсюда следует, что главными направлениями, соответствующими главным кривизнам 2-го рода k_1 , k_2 , k_3 будут направления векторов

$$\begin{aligned} & \mathbf{e}_1, \\ & 2\rho^3 \mathbf{e}_1 + (k_1 - k_2) \mathbf{e}_2, \\ & 2\rho^2 \mathbf{e}_1 + (k_3 - k_1) \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (2.1)$$

А соответствующие линии кривизны 2-го рода – это линии, определяемые уравнениями

$$\omega^2 = \omega^3 = \omega^4 = 0; \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} (k_2 - k_1) \omega^1 + 2\rho^3 \omega^2 &= 0, \\ \omega^3 &= 0, \\ \omega^4 &= 0; \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} (k_3 - k_1) \omega^1 - 2\rho^3 \omega^2 &= 0, \\ \omega^2 &= 0, \\ \omega^4 &= 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Теорема 2.1. *Линии кривизны 2-го рода, соответствующие кривизнам k_2 и k_3 , лежат на двумерных сферах с центрами на двумерных плоскостях вращения.*

Доказательство. Покажем, что линии кривизны 2-го рода (2.3), соответствующие кривизне k_2 , лежат на двумерных сферах с центрами на плоскости вращения P_2 .

Прежде всего, покажем, что точка F_2 неподвижна при движении точки M по кривой (2.3). Действительно, из (1.17), при условиях (2.3), получаем $d\mathbf{F}_2 = 0$, то есть точка F_2 неподвижна. Следовательно, нормали вдоль линии кривизны 2-го рода (2.3) описывают конус. А так как при этом $dk_2 = 0$, то есть $k_2 = \text{const}$, то это значит, что все точки кривой (2.3) находятся на одинаковом расстоянии от точки F_2 , лежащей на плоскости вращения (1.18).

Кроме того, покажем, что плоскость $x^3 = 0$ остается неподвижной в точках этой линии кривизны 2-го рода. Действительно, вдоль линии (2.3) имеем $d\mathbf{e}_3$. То есть вектор нормали плоскости $x^3 = 0$ не меняется. Это может быть лишь тогда, когда кривая лежит в плоскости.

Таким образом, линия кривизны 2-го рода, соответствующая кривизне k_2 , лежит в трехмерной плоскости и все ее точки одинаково удалены от одной фиксированной точки F_2 этой плоскости. Отсюда вывод: линия кривизны 2-го рода, соответствующая k_2 – это линия, лежащая на двумерной сфере

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + \left(x^4 - \frac{1}{k_2}\right)^2 = \left(\frac{1}{k_2}\right)^2, \quad (2.5)$$

$$x^3 = 0.$$

Аналогично доказывается, что линия кривизны 2-го рода, соответствующая k_3 , лежит на двумерной сфере

$$(x^1)^2 + (x^3)^2 + \left(x^4 - \frac{1}{k_3}\right)^2 = \left(\frac{1}{k_3}\right)^2, \quad (2.6)$$

$$x^2 = 0.$$

Теорема 2.2. *Линии кривизны 2-го рода, соответствующие кривизне k_1 , лежат в двумерных плоскостях, проходящих через нормаль НПДВ.*

Доказательство. Найдем соприкасающуюся плоскость той линии кривизны 2-го рода (2.2), которая соответствует k_1 . (Под соприкасающейся плоскостью к кривой понимаем двумерную плоскость, имеющую с данной кривой в каждой точке соприкосновение 2-го порядка, т.е. проходящую через первую и вторую производные радиус-вектора точки кривой.) Пусть $\mathbf{r}$ – радиус-вектор точки, лежащей на линии кривизны 2-го рода (2.2), которая соответствует k_1 . Тогда вдоль этой кривой $d\mathbf{r} = \omega^1 \mathbf{e}_1 \| \mathbf{e}_1, d^2 \mathbf{r} \| \mathbf{e}_4, d^3 \mathbf{r} \| d\mathbf{e}_4 \| \mathbf{e}_1$. Отсюда следует, что соприкасающаяся плоскость $x^2 = 0, x^3 = 0$ не меняется вдоль той линии кривизны 2-го рода, которая соответствует кривизне k_1 . Это значит, что эта линия лежит в двумерной плоскости $x^2 = 0, x^3 = 0$, проходящей через нормаль. ■

Определение 4. *Линии кривизны 2-го рода неголономной гиперповерхности двойного вращения, вдоль которых нормали образуют конус, называются параллелями НПДВ.*

Определение 5. *Линии кривизны 2-го рода неголономной гиперповерхности двойного вращения, лежащие в двумерных плоскостях, называются меридианами НПДВ.*

Как известно [4], нормали неголономной поверхности вдоль всякой линии кривизны 2-го рода описывают торс. Вдоль каждой параллели этот торс является конусом с вершиной на одной из двумерных плоскостей вращения. А вдоль меридиана ребро возврата торса – это плоская линия, являющаяся огибающей нормалей. Действительно, в точках меридиана $\omega^2 = \omega^3 = \omega^4 = 0$ имеем

$$d\mathbf{F}_1 = \frac{\gamma_{11}}{(k_1)^2} \omega^1 \mathbf{e}_4.$$

При $k_1 \neq k_2$ инвариант $\gamma_{11} \neq 0$ и, следовательно, точка F_1 описывает кривую, касающуюся нормали в каждой своей точке (рис.1).

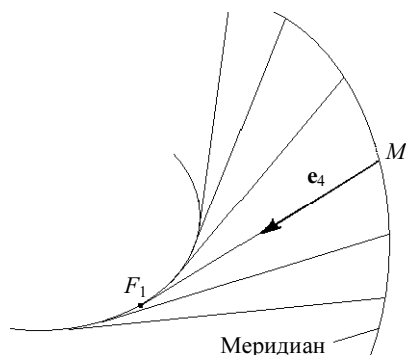


Рис. 1

Угол между двумя параллелями (2.3) и (2.4), проходящими через точку $M \in G$, вычисляется по формуле

$$\cos \varphi_1 = \frac{4\rho^2\rho^3}{\sqrt{(4(\rho^3)^2 + (k_2 - k_1)^2)(4(\rho^2)^2 + (k_3 - k_1)^2)}}.$$

Формулы

$$\cos \varphi_2 = \frac{2\rho^3}{\sqrt{4(\rho^3)^2 + (k_2 - k_1)^2}},$$

$$\cos \varphi_3 = \frac{2\rho^2}{\sqrt{4(\rho^2)^2 + (k_3 - k_1)^2}}$$

определяют углы соответственно между параллелью (2.3) и меридианом (2.2) и второй параллелью (2.4) и меридианом (2.2). То есть меридианы и параллели ортогональны тогда и только тогда, когда $\omega^4 = 0$ вполне интегрируемое уравнение.

Легко доказать, что меридианы и параллели НПДВ обладают следующими свойствами:

1. *Плоскость, в которой лежит меридиан, проходит через центр вращения.*

Действительно, координаты центра вращения

$$C\left(\frac{k_2 - k_3}{\alpha_1 k_2 - \beta_1 k_3}, 0, 0, \frac{\alpha_1 - \beta_1}{\alpha_1 k_2 - \beta_1 k_3}\right)$$

удовлетворяют уравнению $x^2 = x^3 = 0$ плоскости, в которой лежит меридиан.

2. *Меридианы являются геодезическими прямыми.*

Напомним, что линия НПДВ является геодезической прямой, если в каждой ее точке ее двумерная соприкасающаяся плоскость проходит через нормаль НПДВ. Действительно, соприкасающаяся плоскость меридиана определяется уравнениями $x^2 = x^3 = 0$ и проходит через нормаль НПДВ $x^1 = x^2 = x^3 = 0$.

3. *Линия тока векторного поля нормалей $\{\mathbf{e}_4\}$ НПДВ лежит в одной двумерной плоскости с меридианом и ортогональна ему.*

Докажем это. По определению линии тока векторного поля касательный вектор к ней идет в направлении вектора поля, то есть $d\mathbf{r} \parallel \mathbf{e}_4$. Значит, вдоль линии тока $\omega^1 \mathbf{e}_1 + \omega^2 \mathbf{e}_2 + \omega^3 \mathbf{e}_3 + \omega^4 \mathbf{e}_4 \parallel \mathbf{e}_4$. Отсюда получаем уравнения линии тока $\omega^1 = \omega^2 = \omega^3 = 0$. Так как касательные векторы линии тока и меридиана (соответственно $\mathbf{e}_4$ и $\mathbf{e}_1$) ортогональны как базисные векторы подвижного декартова репера, то ортогональны и сами линия тока и меридиан. Плоскость $x^2 = x^3 = 0$, в которой лежит меридиан, содержит также и линию тока. Покажем, что эта плоскость постоянна вдоль линии тока. Действительно, эта плоскость содержит два линейно независимых вектора $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_4$. При перемещении вдоль линии тока $\omega^1 = \omega^2 = \omega^3 = 0$ имеем $d\mathbf{e}_1 = -a\omega^4 \mathbf{e}_4$, а $d\mathbf{e}_4 = a\omega^4 \mathbf{e}_1$, то есть плоскость $\{\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_4\}$ не меняется. Таким образом, мы показали, что линия тока лежит в той же двумерной плоскости, что и меридиан.

II. Переходим к рассмотрению случая, когда $k_2 \neq k_3$, $k_1 = k_2$.

Главные направления 2-го рода, соответствующие кривизне $k_1 = k_2$ в плоскости π_3 , определяются системой уравнений

$$\begin{aligned} \rho^3 \xi^2 &= 0, \\ \xi^3 &= 0. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Отсюда следует, что имеются две возможности: 1) $\rho^3 \neq 0$, 2) $\rho^3 = 0$. Исследуем каждую из них.

1) Пусть $\rho^3 \neq 0$. Тогда кратному значению кривизны $k_1 = k_2$ соответствует единственное (в плоскости π_3) главное направление 2-го рода – это направление вектора $\mathbf{e}_1$. Следовательно, через каждую точку $M \in G$ пройдет одна линия кривизны 2-го рода, определяемая уравнениями $\omega^2 = \omega^3 = \omega^4 = 0$, соответствующая кратной кривизне $k_1 = k_2$. Это плоская линия – меридиан, вдоль которого нормали неголономной поверхности образуют пучок с центром на двумерной оси вращения P_2 . Действительно, при $k_1 = k_2$ инвариант $\gamma_{11} = 0$ и, следовательно, $d\mathbf{F}_1 = 0$, т.е. точка F_1 – неподвижная точка вдоль меридиана. Кроме того, при $k_1 = k_2$ в точках меридиана имеем $dk_2 = 0$ (следует из (1.23)), т.е. $k_1 = k_2 = \text{const} \neq 0$. И меридиан является окружностью (рис. 2).

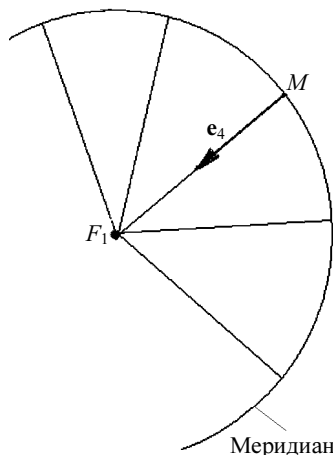


Рис. 2

Подведем итог.

При $k_1 = k_2$, $\rho^3 \neq 0$ через точку $M \in G$ проходят только две линии кривизны 2-го рода. Кривизне k_3 соответствует параллель – кривая, лежащая на двумерной сфере с центром на P_3 . Кратной кривизне $k_1 = k_2$ соответствует только одна линия кривизны 2-го рода. Она обладает свойствами, присущими как меридиану, так и параллели: 1) лежит в двумерной плоскости; 2) является окружностью, вдоль которой нормали образуют пучок (вырожденный конус) с центром на плоскости P_2 .

Переходим к исследованию 2-го случая.

1) Пусть $\rho^3 = 0$, $k_1 = k_2$.

Подставим $\rho^3 = 0$, $k_1 = k_2$ в систему (1.23), получим

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= \gamma_{12} = \gamma_{22} = \gamma_{23} = \gamma_{24} = 0, \\ \gamma_{13} &= 2\rho^2(\beta_1 - \alpha_1 - a), \\ \gamma_{14} &= (a - \beta_1), \\ dk_2 &= -2\rho^2 \beta_1 \omega^3 + (a \beta_1 + (k_2)^2) \omega^4, \\ dk_3 &= \alpha_1 ((k_3 - k_1) \omega^1 - 2\rho^2 \omega^3) + (a \alpha_1 + (k_3)^2) \omega^4, \\ d\alpha_1 &= ((\alpha_1)^2 + k_1 k_3) \omega^1 + 2\rho^2 k_3 \omega^3 + k_3 (\alpha_1 - a) \omega^4, \\ d\beta_1 &= ((\beta_1)^2 + (k_2)^2) \omega^1 + 2\rho^2 k_2 \omega^3 + k_2 (\beta_1 - a) \omega^4, \\ 2d\rho^2 &= -2\rho^2(\beta_1 - \alpha_1 - a) \omega^1 - \gamma_{33} \omega^3 + (2\rho^2 (k_1 + k_3) - \gamma_{34}) \omega^4, \\ da &= \gamma_{14} \omega^1 + \gamma_{24} \omega^2 + \gamma_{34} \omega^4 + \gamma_{44} \omega^4. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Внешнее дифференцирование первых четырех форм приводит к тождественным равенствам, т.е. на инварианты $k_2, k_3, \alpha_1, \beta_1$ никаких дополнительных условий не возникает. После внешнего дифференцирования последних двух равенств получим два внешних уравнения, содержащих дифференциалы функций $\gamma_{33}, \gamma_{34}, \gamma_{44}$. Можно показать, что для этой системы выполняется необходимый признак Кэлера. Такие НПДВ существуют, широта класса – одна функция двух аргументов.

Найдем для этого класса НПДВ главные направления 2-го рода. При $\rho^3 = 0$ из (3.2.7) имеем $\xi^3 = 0$. То есть в плоскости π_3 главные направления 2-го рода, соответствующие кривизне, заполняют двумерную плоскость, а линии кривизны определяются системой уравнений

$$\omega^3 = \omega^4 = 0. \quad (2.9)$$

Эта система вполне интегрируема. Следовательно, кривизне $k_1 = k_2$ соответствует двумерная поверхность, состоящая из линий кривизны 2-го рода. Кроме того, уравнение $\omega^3 = 0$ вполне интегрируемо и определяет, как легко показать, в точке M гиперплоскость. Так как меридиан определяется уравнениями $\omega^3 = \omega^4 = 0$, то в его точках $k_2 = \text{const}$, т.е. в точках меридиана все нормали пересекаются в одной точке. Это значит, что меридиан является двумерной сферой.

Таким образом, при $k_1 = k_2$, $\rho^3 = 0$ через каждую точку M проходит одна линия кривизны 2-го рода, лежащая на двумерной сфере (параллель), и одна двумерная сфера, лежащая в трехмерной плоскости (двумерный меридиан).

3. Главные кривизны и главные направления 1-го рода.

Линии кривизны 1-го рода НПДВ

В построенном нами репере матрица оператора A^* имеет вид

$$A^* = \begin{pmatrix} -k_1 & 2\rho^3 & -2\rho^2 \\ 0 & -k_2 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 \end{pmatrix}.$$

Разложим матрицу A^* на сумму двух матриц:

$$A^* = \begin{pmatrix} -k_1 & \rho^3 & -\rho^2 \\ \rho^3 & -k_2 & 0 \\ -\rho^2 & 0 & -k_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \rho^3 & -\rho^2 \\ -\rho^3 & 0 & 0 \\ \rho^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оператор B с матрицей

$$B = \begin{pmatrix} -k_1 & \rho^3 & -\rho^2 \\ \rho^3 & -k_2 & 0 \\ -\rho^2 & 0 & -k_3 \end{pmatrix}$$

является симметричным. Характеристическое уравнение оператора B имеет вид

$$\begin{vmatrix} -k_1 - \mu & \rho^3 & -\rho^2 \\ \rho^3 & -k_2 - \mu & 0 \\ -\rho^2 & 0 & -k_3 - \mu \end{vmatrix} = 0. \quad (3.1)$$

Его корни, взятые с противоположными знаками, являются главными кривизнами 1-го рода [4], а собственные векторы, им соответствующие, – главными направлениями 1-го рода.

Полная кривизна 1-го рода K_1 равна определителю матрицы этого оператора

$$K_1 = \det B = -k_1 k_2 k_3 + k_2 (\rho^2)^2 + k_3 (\rho^3)^3.$$

Поскольку $K_2 = -k_1 k_2 k_3$, то связь между полными кривизнами 1-го и 2-го рода выражается следующим равенством:

$$K_1 = K_2 + k_2(\rho^2)^2 + k_3(\rho^3)^3. \quad (3.2)$$

Теорема 3. 1. Пусть для НПДВ все три главные кривизны 2-го рода различны. Тогда линией кривизны 1-го рода может быть лишь одна из параллелей НПДВ и эта параллель ортогональна меридиану.

Доказательство. Если меридиан является линией кривизны 1-го рода, то главная кривизна k_1 2-го рода должна быть и главной кривизной 1-го рода, то есть $-k_1$ будет корнем уравнения

$$\begin{vmatrix} -k_1 + k_1 & \rho^3 & -\rho^2 \\ \rho^3 & -k_2 + k_1 & 0 \\ -\rho^2 & 0 & -k_3 + k_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда получаем $((\rho^2)^2 + (\rho^3)^2)(k_1 - k_3) = 0$. Так как $k_1 \neq k_3$, то $\rho^2 = \rho^3 = 0$. Следовательно, это возможно лишь в голономном случае.

Покажем теперь, что одна из параллелей может быть линией кривизны 1-го рода. Рассмотрим параллель, соответствующую кривизне k_2 . Потребуем, чтобы величина $-k_2$ была бы корнем уравнения (3.1).

В результате получим $(\rho^3)^2(k_3 - k_2) = 0$. То есть при $\rho^3 = 0$ ($k_3 \neq k_2$) параллель (2.3), определяемая уравнениями

$$(k_2 - k_1)\omega^1 + 2\rho^3\omega^2 = 0, \quad \omega^3 = 0, \quad \omega^4 = 0,$$

является линией кривизны 1-го рода. Так как $k_1 \neq k_2$ и $\rho^3 = 0$, то уравнения параллели принимают вид $\omega^1 = \omega^3 = \omega^4 = 0$. Следовательно, в каждой точке $M \in G$ параллель, являющаяся линией кривизны 1-го рода, ортогональна меридиану $\omega^2 = \omega^3 = \omega^4 = 0$. ■

Перейдем к рассмотрению НПДВ, имеющих двукратную кривизну 2-го рода ($k_1 = k_2$).

Теорема 3. 2. Кратная главная кривизна 2-го рода $k_1 = k_2$ может быть главной кривизной 1-го рода лишь в том случае, когда $\rho^3 = 0$, то есть когда меридиан является двумерной поверхностью. При этом соответствующая линия кривизны 1-го рода принадлежит меридиану, а касательные к двум другим линиям кривизны 1-го рода лежат в одной плоскости с касательной к той линии кривизны 2-го рода, которая соответствует некрратной главной кривизне 2-го рода (k_3).

Доказательство. Пусть $k_1 = k_2$ является главной кривизной 1-го рода, тогда она будет корнем уравнения (3.1). Это возможно лишь тогда, когда

$$(\rho^3)^2(k_3 - k_2) = 0.$$

Но $k_3 \neq k_2$, поэтому $\rho^3 = 0$. Итак, только при $\rho^3 = 0$ кратная главная кривизна 2-го рода является также и одной из главных кривизн 1-го рода.

При $k_1 = k_2$, $\rho^3 = 0$ характеристическое уравнение (3.1) имеет вид

$$\begin{vmatrix} -k_2 - \mu & 0 & -\rho^2 \\ 0 & -k_2 - \mu & 0 \\ -\rho^2 & 0 & -k_3 - \mu \end{vmatrix} = 0.$$

Его корнями будут

$$\mu_1 = -k_2, \quad \mu_{2,3} = \frac{-k_2 - k_3 \pm \sqrt{(k_2 - k_3)^2 + (\rho^2)^2}}{2},$$

а, следовательно, главные кривизны 1-го рода $k_i^{(1)}$ выражаются через главные кривизны 2-го рода по формулам

$$k_1^{(1)} = k_2 = k_1, \quad k_{2,3}^{(1)} = \frac{-k_2 - k_3 \mp \sqrt{(k_2 - k_3)^2 + (\rho^2)^2}}{2}$$

Найдем главные направления 1-го рода. Заметим, что если $\rho^3=0$, то $\rho^2 \neq 0$ (так как $\rho^2 = \rho^3 = 0$ означает голономность распределения). Поэтому кривизне $k_1^{(1)}$ соответствует единственное собственное направление 1-го рода – направление вектора $\mathbf{e}_2$, а следовательно, и одна линия кривизны 1-го рода $\omega^1 = \omega^3 = \omega^4 = 0$, принадлежащая двумерному меридиану $\omega^3 = \omega^4 = 0$.

Главные направления 1-го рода, соответствующие кривизнам $k_2^{(1)}$ и $k_3^{(1)}$, взаимно ортогональны и лежат в плоскости $x^2 = x^4 = 0$. В этой же плоскости лежит главное направление 2-го рода $2\rho^2 \mathbf{e}_1 + (k_3 - k_1)\mathbf{e}_3$, соответствующее главной кривизне 2-го рода k_3 . ■

Теорема 3. 3. Если кратная главная кривизна 2-го рода ($k_1 = k_2$) НПДВ является также и главной кривизной 1-го рода, то некратная главная кривизна 2-го рода (k_3) не может быть главной кривизной 1-го рода.

Доказательство. В теореме 3.2 мы доказали, что кратная главная кривизна 2-го рода будет также и главной кривизной 1-го рода лишь при $\rho^3 = 0$. Потребуем теперь, чтобы некратная кривизна k_3 была бы главной кривизной 1-го рода, то есть была бы корнем уравнения (3.1). Это требование выполняется лишь при условии

$$(\rho^2)^2(k_2 - k_3) = 0.$$

Так как $k_3 \neq k_2$, то отсюда следует $\rho^2 = 0$. Но $\rho^2 = \rho^3 = 0$ – есть условие голономности НПДВ. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильева О.В. Поверхности вращения в четырехмерном евклидовом пространстве // VII Всерос. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых. Наука и образование. Томск, 2003. Т. 1. С. 21 – 27.
2. Васильева О.В. Неголономные поверхности двойного вращения в четырехмерном евклидовом пространстве // Изв. вузов. Математика. 2006. № 6 (529). С. 3 – 13.
3. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия: Методы и приложения. М.: Наука, 1979. 759 с.
4. Онищук Н.М. Геометрия векторного поля в четырехмерном евклидовом пространстве // Междунар. конф. по математике и механике: Избр. доклады. Томск, 2003. С. 60 – 68.
5. Уорнер Ф. Основы теории гладких многообразий и групп Ли. М.: Мир, 1987. 304 с.

Принята в печать 28.02.08.