

УДК 517.956.25

З.С. Демина

**НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА РАДИАЛЬНО СИММЕТРИЧНЫХ РЕШЕНИЙ
ОДНОГО КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ**

В работе описывается строение решений квазилинейных уравнений с частными производными на примере радиально симметричных решений уравнения газовой динамики.

Ключевые слова: *нелинейное уравнение, уравнение газовой динамики, радиальная симметрия, сингулярность.*

В последнее время возрос интерес к исследованию нелинейных уравнений математической физики, в частности к уравнению газовой динамики. Как правило, многие свойства решений таких уравнений определяются их поведением в особых точках (Р. Бартник, Е. Калаби, В.А. Клячин, А.А. Клячин, О. Кобаяси, В.М. Миклюков, Л. Саймон, С. Ченг, С. Яу и др.). До настоящего времени изучение поведения решений в особых точках проводилось для узкого класса уравнений (линейные уравнения, уравнение минимальных поверхностей, уравнение максимальных поверхностей). Так, строение решений уравнения максимальных поверхностей в окрестности конечной особой точки и асимптотические свойства максимальных трубок и лент достаточно полно изучены в работах В.М. Миклюкова и В.А. Клячина [1 – 3]. Стоит также отметить результаты О. Кобаяси [6], К. Экера [5], В.А. Клячина и В.М. Миклюкова [1, 4] о световом характере изолированных особенностей. В настоящей работе рассмотрены радиально симметричные решения уравнения для потенциала скорости в газовой динамике и изучено их поведение в окрестностях некоторых точек.

Рассмотрим уравнение для потенциала скорости в газовой динамике

$$\operatorname{div} \left(\left(1 - \frac{\gamma - 1}{2} |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} \nabla u \right) = 0, \tag{1}$$

которое описывает потенциал скоростей плоского установившегося течения идеального газа в адиабатическом режиме. Здесь γ – показатель адиабаты, u – потенциал скорости и $|\nabla u|^2 < \frac{2}{\gamma - 1}$ при $\gamma > 1$.

Будем искать радиально симметричное решение уравнения (1), т.е. $u = u(r)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$, тогда уравнение (1) примет вид

$$u''_{rr} \left(1 - \frac{\gamma + 1}{2} u'^2_r \right) + \frac{1}{r} u'_r \left(1 - \frac{\gamma - 1}{2} u'^2_r \right) = 0, \tag{2}$$

где $u'^2_r < \frac{2}{\gamma - 1}$ при $\gamma > 1$.

Решение уравнения (2) в случае $\gamma > 1$ имеет следующий вид:

$$r(t) = \frac{C_1 \sqrt{\frac{\gamma-1}{2}}}{t(1-t^2)^{\frac{1}{\gamma-1}}},$$

$$u(t) = -C_1 \int \frac{dt}{t(1-t^2)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} + C_1 \frac{\gamma+1}{2} \frac{1}{(1-t^2)^{\frac{1}{\gamma-1}}} + C_2.$$

Областью определения функций $r(t)$ и $u(t)$ является интервал $0 < t < 1$ при $C_1 > 0$ и интервал $-1 < t < 0$ при $C_1 < 0$.

Производная функции $r(t)$

$$r'(t) = C_1 \sqrt{\frac{\gamma-1}{2}} \frac{t^2(\gamma+1) - (\gamma-1)}{(\gamma-1)(1-t^2)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} t^2}.$$

Приравнявая $r'(t)$ к нулю, получим, что при $C_1 > 0$ функция $r(t)$ имеет в точке

$t^* = \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}$ экстремум, равный $r(t^*) = C_1 \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma+1}{2} \frac{1}{\gamma-1}}$, а при $C_1 < 0$ экстремум

достигается в точке $-t^*$ и равен $r(-t^*) = -C_1 \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma+1}{2} \frac{1}{\gamma-1}}$. При $C_1 > 0$ на интервале

$0 < t < t^*$ производная $r'(t)$ меньше нуля (следовательно, функция $r(t)$ на этом интервале убывает), а на интервале $t^* < t < 1$ – больше нуля, то есть функция $r(t)$ возрастает. При $C_1 < 0$ на интервале $-1 < t < -t^*$ производная $r'(t)$ меньше нуля, а на интервале $-t^* < t < 0$ – больше нуля.

Эскиз графика функции $r(t)$ представлен на рис. 1.

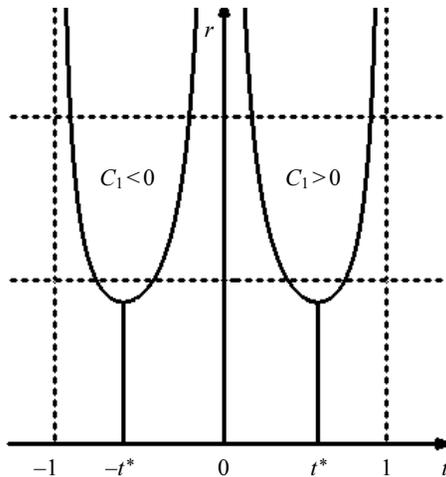


Рис. 1

Производная функции $u(t)$

$$u'(t) = C_1 \frac{t^2(\gamma+1) - (\gamma-1)}{(\gamma-1)(1-t^2)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} t}.$$

Приравнявая $u'(t)$ к нулю, получим, что функция $u(t)$ имеет экстремум в точках $t^* = \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}$ и $-t^*$ при $C_1 > 0$ и $C_1 < 0$ соответственно. При $C_1 > 0$ на интервале $0 < t < t^*$ производная $u'(t) < 0$, следовательно, функция $u(t)$ на этом интервале убывает, а на интервале $t^* < t < 1$ производная $u'(t) > 0$, следовательно, функция $u(t)$ возрастает на этом интервале. При $C_1 < 0$ на интервале $-1 < t < -t^*$ производная $u'(t) > 0$, а на интервале $-t^* < t < 0$ производная $u'(t) < 0$.

Эскиз графика функции $u(t)$ изображен на рис. 2.

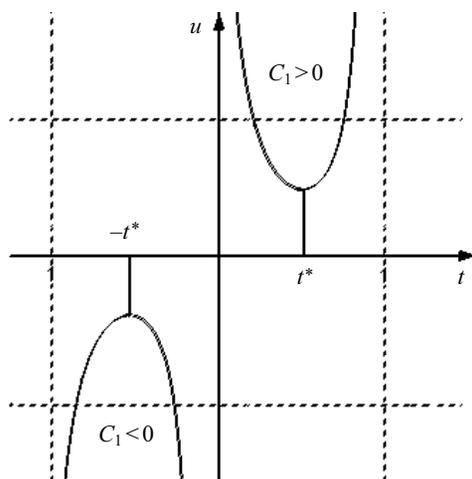


Рис. 2

Так как решение найдено в параметрическом виде, то производная u'_r имеет вид $u'_r = \frac{u'_t}{r'_t}$. Подставляя имеющиеся выражения для $r'_t(t)$ и $u'_t(t)$, получим

$$u'_r = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1}} t.$$

Производная $u'_r < 0$ при $C_1 < 0$ и $u'_r > 0$ при $C_1 > 0$, следовательно, функция $u(r)$ убывает на интервале $r(-t^*) < r < +\infty$ ($-1 < t < 0$) и возрастает на интервале $r(t^*) < r < +\infty$, ($0 < t < 1$).

Вторую производную u''_{rr} вычисляем по формуле $u''_{rr} = \frac{(u'_r)'_t}{r'_t}$. В случае $C_1 > 0$, получим: $u''_{rr} > 0$ при $t^* < t < 1$ и $u''_{rr} < 0$ при $0 < t < t^*$, т.е. функция $u(r)$ выпукла

вниз на интервале $r(t^*) < r < +\infty$ ($t^* < t < 1$) и выпукла вверх на интервале $r(t^*) < r < +\infty$ ($0 < t < t^*$). Исследование знака второй производной при $C_1 < 0$ приводит к следующему результату: функция $u(r)$ выпукла вниз на интервале $r(-t^*) < r < +\infty$ ($-t^* < t < 0$) и выпукла вверх на интервале $r(-t^*) < r < +\infty$ ($-1 < t < -t^*$).

На рис. 3 представлен эскиз графика функции $u(r)$:

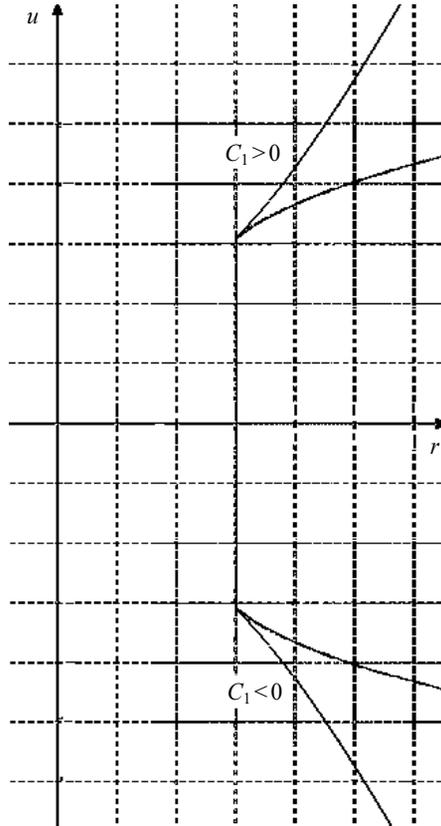


Рис. 3

Заметим, что функция $u(t)$ эквивалентна функции $C_1 \ln(r(t))$ при $t \rightarrow \pm 0$ и функциям $\sqrt{\frac{2}{\gamma-1}} r(t)$ при $t \rightarrow 1-0$ и $-\sqrt{\frac{2}{\gamma-1}} r(t)$ при $t \rightarrow -1+0$. Кроме этого, найденное решение удовлетворяет условию $u_r'^2 < \frac{2}{\gamma-1}$.

В случае $\gamma < 1$ решение также выписывается в параметрическом виде:

$$r(t) = \frac{C_1 \sqrt{\frac{\gamma-1}{2}}}{t(1+t^2)^{\frac{1}{\gamma-1}}},$$

$$u(t) = -C_1 \int \frac{dt}{t(1+t^2)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} + C_1 \frac{\gamma+1}{2} \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{1}{\gamma-1}}} + C_2.$$

При $C_1 > 0$ областью определения функций $r(t)$ и $u(t)$ является интервал $t > 0$, а при $C_1 < 0$ – интервал $t < 0$.

Здесь возможны несколько вариантов поведения решения в зависимости от значений параметра γ .

Рассмотрим случай $-1 < \gamma < 1$.

Производная функции $r(t)$

$$r'(t) = -C_1 \sqrt{-\frac{\gamma-1}{2}} \frac{t^2(\gamma+1) + (\gamma-1)}{(\gamma-1)(1+t^2)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} t^2}.$$

Исследуя знак производной, получим, что при $C_1 > 0$ функция $r(t)$ имеет экстремум в точке $t^* = \sqrt{-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}$, равный $r(t^*) = C_1 \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma+1}{2} \frac{1}{\gamma-1}}$. На интервале $0 < t < t^*$ функция $r(t)$ убывает, а на интервале $t^* < t < +\infty$ – возрастает. При $C_1 < 0$ функция $r(t)$ имеет экстремум в точке $-t^*$, равный $r(-t^*) = -C_1 \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma+1}{2} \frac{1}{\gamma-1}}$. На интервале $-\infty < t < -t^*$ функция $r(t)$ убывает, а на интервале $-t^* < t < 0$ – возрастает.

Производная функции $u(t)$

$$u'(t) = -C_1 \frac{t^2(\gamma+1) + (\gamma-1)}{(\gamma-1)(1+t^2)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} t}.$$

Приравнявая $u'(t)$ к нулю, получим, что функция $u(t)$ имеет экстремум в точке $t^* = \sqrt{-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}$ при $C_1 > 0$ и в точке $-t^*$ при $C_1 < 0$. При $C_1 > 0$ на интервале $0 < t < t^*$ функция $u(t)$ убывает, а на интервале $t^* < t < +\infty$ – возрастает. При $C_1 < 0$ на интервале $-\infty < t < -t^*$ функция $u(t)$ убывает, а на интервале $-t^* < t < 0$ – возрастает. Эскизы графиков функций $r(t)$ и $u(t)$ представлены на рис. 4 и 5 соответственно.

Производная $u'_r > 0$ при $C_1 > 0$ и $u'_r < 0$ при $C_1 < 0$, следовательно, функция $u(r)$ возрастает на интервале $r(t^*) < r < +\infty$ ($0 < t < +\infty$) и убывает на интервале $r(-t^*) < r < +\infty$ ($-\infty < t < 0$).

В случае $C_1 > 0$ вторая производная $u''_{rr} < 0$ при $0 < t < t^*$ ($r(t^*) < r < +\infty$) и $u''_{rr} > 0$ при $t > t^*$ ($r(t^*) < r < +\infty$), т.е. функция $u(r)$ выпукла вверх на интервале $r(t^*) < r < +\infty$ ($0 < t < t^*$) и выпукла вниз на интервале $r(t^*) < r < +\infty$ ($t > t^*$). В случае $C_1 < 0$ вторая производная $u''_{rr} > 0$ при $t < -t^*$ ($r(-t^*) < r < +\infty$) и $u''_{rr} < 0$ при $-t^* < t < 0$.

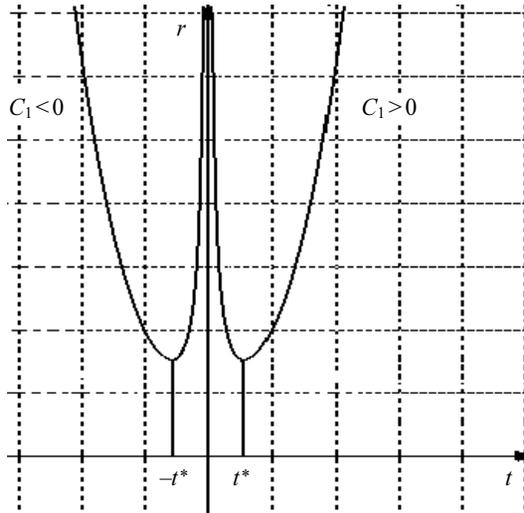


Рис. 4

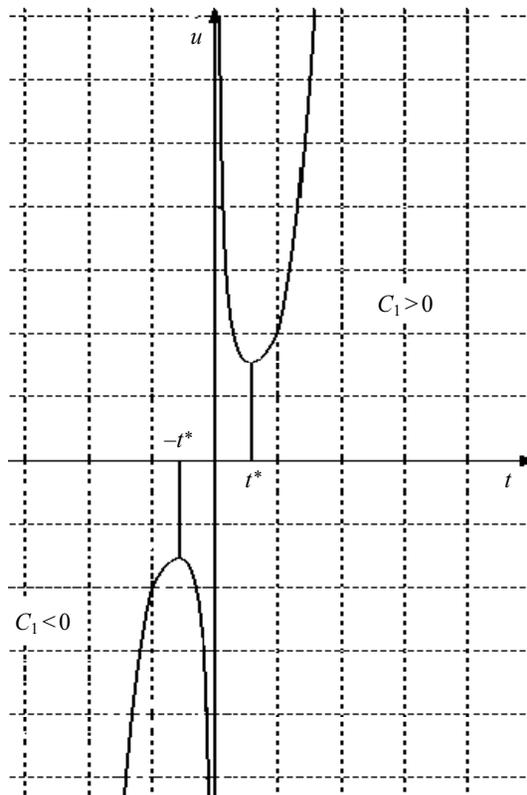


Рис. 5

Эскиз графика функции $u(r)$ изображен рис. 6.

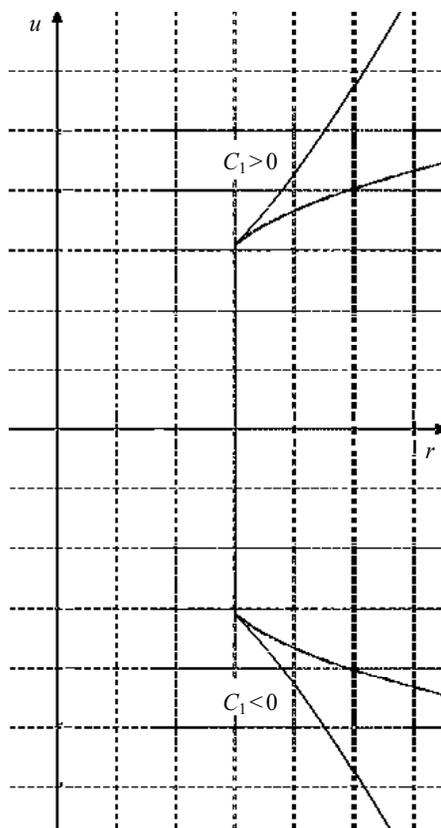


Рис. 6

Здесь функция $u(t)$ эквивалентна функции $C_1 \ln(r(t))$ при $t \rightarrow \pm 0$ и функции $\left(-\frac{2}{\gamma-1}\right)^{\frac{1}{\lambda+1}} \cdot \left(\frac{\gamma+1}{2}\right) \cdot C_1^{1-\frac{2}{\gamma+1}} \cdot r^{\frac{2}{\gamma+1}}(t)$ при $t \rightarrow \pm\infty$.

Аналогично исследуя функции $r(t)$ и $u(t)$ при $\gamma < -1$, получим эскизы графиков функций $r(t)$ и $u(t)$ (рис. 7 и 8).

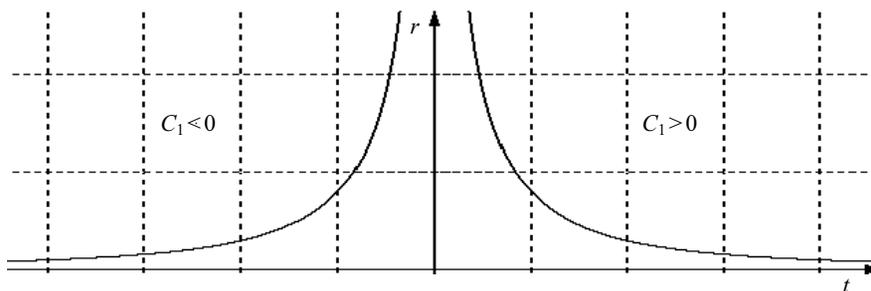


Рис. 7

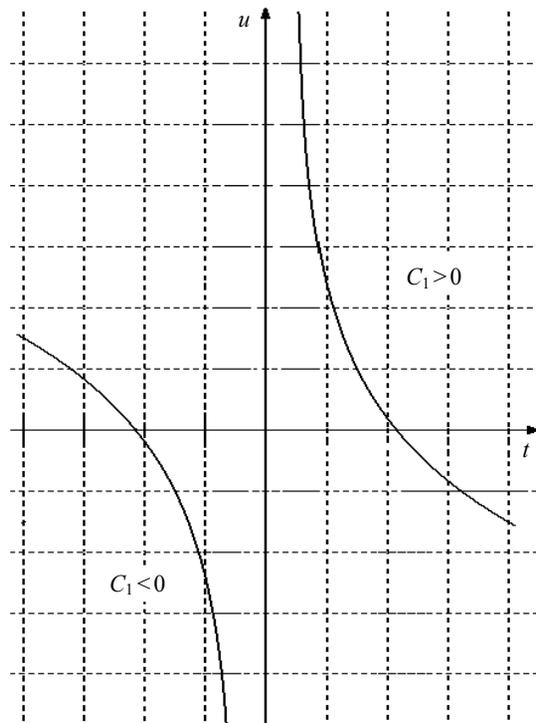


Рис. 8

Так же как и в случае $-1 < \gamma < 1$, функция $u(t)$ эквивалентна функции $C_1 \ln(r(t))$ при $t \rightarrow \pm 0$ и функции $\left(-\frac{2}{\gamma-1}\right)^{\frac{1}{\gamma+1}} \cdot \left(\frac{\gamma+1}{2}\right) \cdot C_1^{1-\frac{2}{\gamma+1}} \cdot r^{\frac{2}{\gamma+1}}(t)$ при $t \rightarrow \pm\infty$.

На рис. 9 представлен эскиз графика функции $u(r)$.

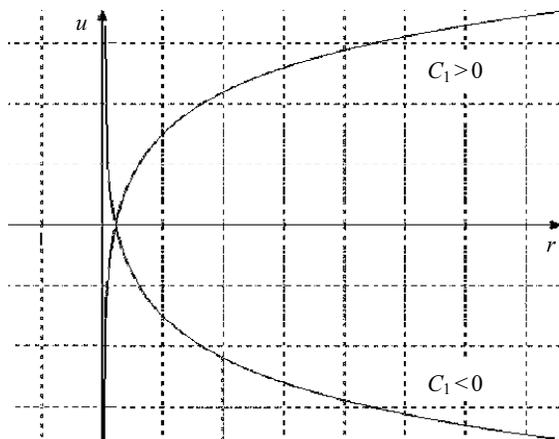


Рис. 9

При $\gamma = -1$ уравнение (1) обращается в уравнение минимальных поверхностей:

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \right) = 0.$$

Для этого случая эскизы графиков функций $r(t)$ и $u(t)$ изображены на рис. 10 и рис. 11.

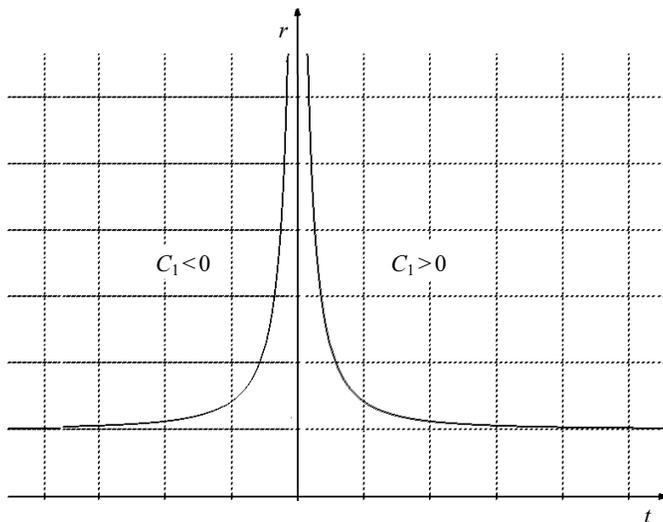


Рис. 10

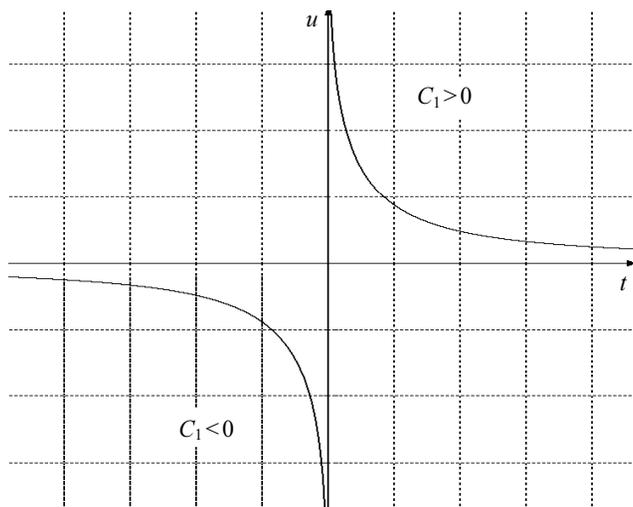


Рис. 11

Функция $u(t)$ эквивалентна функции $|C_1| \ln(r(t))$ при $t \rightarrow \pm 0$ и $u(t) \rightarrow 0$, $r(t) \rightarrow |C_1|$ при $t \rightarrow \pm \infty$.

На рис. 12 представлен эскиз графика функции $u(r)$.

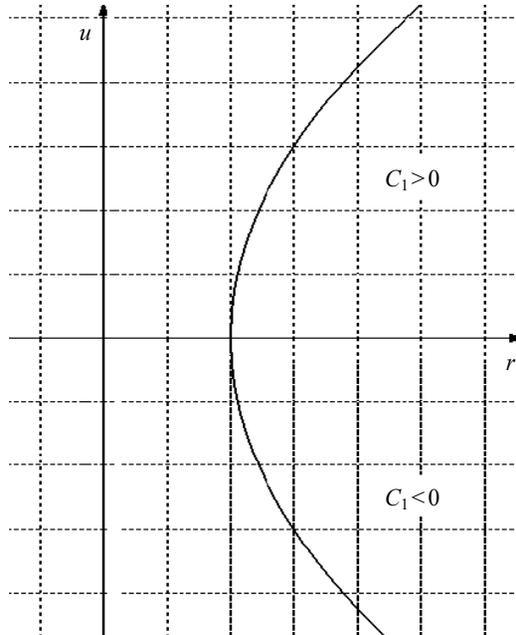


Рис. 12

В случае $\gamma = 1$ уравнение (1) примет вид

$$u''_{rr} (1 - u_r'^2) + \frac{1}{r} u_r' = 0.$$

Решение этого уравнения в параметрическом виде:

$$r(t) = C_1 \frac{\sqrt{e^{t^2}}}{|t|}, \quad u(t) = C_1 \int \frac{\sqrt{e^{t^2}}}{|t|} (t^2 - 1) dt + C_2,$$

здесь $C_1 > 0$.

Ниже на рис. 13 и 14 представлены эскизы графика функции $r(t)$ и функции $u(t)$.

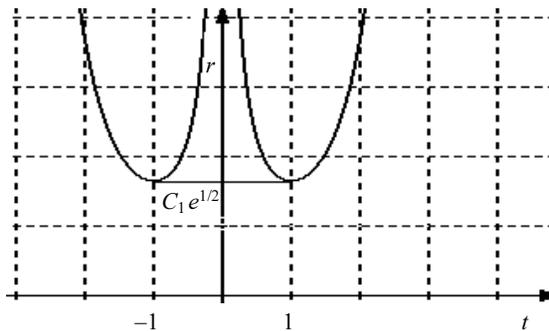


Рис. 13

Функция $u(t)$ эквивалентна функции $\pm C_1 \ln(r(t))$ при $t \rightarrow \pm 0$; при $t \rightarrow +\infty$ справедливо неравенство $u(t) \geq C_1 \ln(r(t))$, а при $t \rightarrow -\infty$ — неравенство $u(t) \leq -C_1 \ln(r(t))$. Эскиз графика функции $u(r)$ представлен на рис. 15.

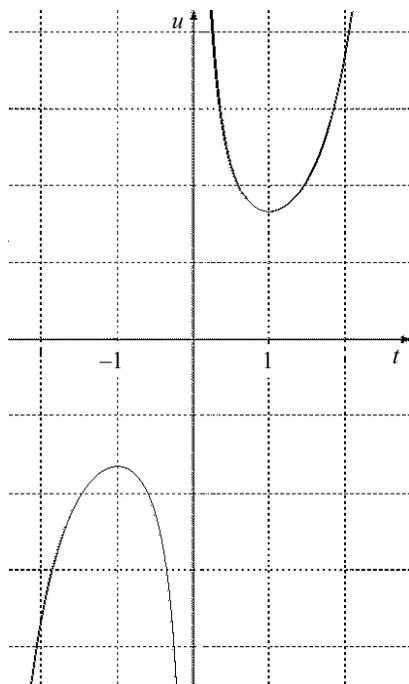


Рис. 14

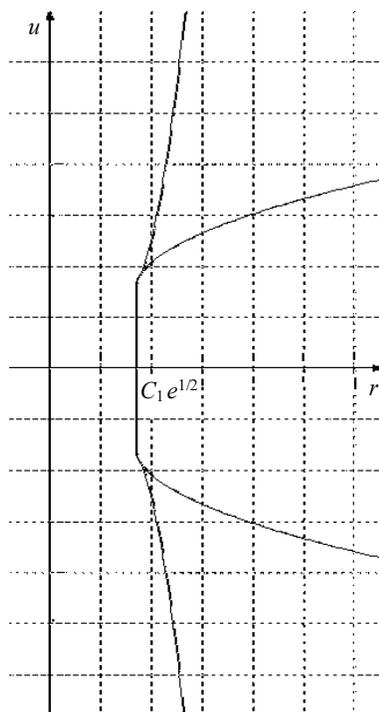


Рис. 15

Итак, в данной работе представлены радиально симметричные решения уравнения для потенциала скорости в газовой динамике, а также эскизы найденных решений при различных значениях параметра γ . Для более ясного видения характера поведения решений были приведены соотношения эквивалентности в некоторых предельных точках.

ЛИТЕРАТУРА

1. Клячин В.А., Миклюков В.М. Максимальные гиперповерхности трубчатого типа в пространстве Минковского // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1991. Т. 55. № 1. С. 206 – 217.
2. Клячин В.А. Об асимптотических свойствах максимальных трубок и лент в окрестности изолированной особенности в пространстве Минковского // Сиб. матем. журн. 2002. Т. 43. № 1. С. 76 – 89.
3. Миклюков В.М. Максимальные трубки и ленты в пространстве Минковского // Матем. сб. 1992. Т. 183. № 12. С. 45 – 76.
4. Миклюков В.М. Об одной лоренц-инвариантной характеристике максимальных трубок в пространстве Минковского // ДАН СССР. 1992. Т. 322. № 12. С. 781 – 784.
5. Ecker K. Area maximizing hypersurfaces in Minkowski space having an isolated singularity // Manuscr. Math. 1986. V. 56. No. 4. P. 375 – 397.
6. Kobayashi O. Maximal surfaces in the 3-dimensional Minkowski space L^3 // Tokyo J. Math. 1983. V. 6. P. 297 – 309.

Принята в печать 15.12.07.