

УДК 517.54

А.Н. Малютин

ОБ АСИМТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ОТОБРАЖЕНИЙ С s -УСРЕДНЕННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

Для отображений с s -усредненной характеристикой доказывается оценка снизу для модулей семейств кривых, устанавливаются оценки искажения расстояний, характеризующих поведение отображений с s -усредненной характеристикой в окрестности изолированной особой точки.

Ключевые слова: Асимптотическое поведение отображений, метод модулей семейств кривых, устранимость изолированных особенностей.

Пусть $\mathbf{R}^n$, $n = 3, 4, \dots$, – евклидово пространство; $D, D^x \subset \mathbf{R}^n$ – области; $|x| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$; $B^n(x_0, r) = \{x \in \mathbf{R}^n: |x - x_0| < r\}$ – шар с центром в точке $x_0 \in \mathbf{R}^n$, $S^{n-1}(x_0, r)$ – его $(n-1)$ – мерная граница. Мы используем стандартные сокращения: $B^n(r) = B^n(0, r)$, $S^{n-1}(0, r)$, $B^n = B^n(1)$, $S^{n-1} = S^{n-1}(1)$. Для множества $E \subset \mathbf{R}^n$ обозначим через $d(E) = \text{diam } E = \sup |x - y|$ диаметр E . Через $M_p(\Gamma)$ обозначим сферический модуль порядка p семейства Γ кривых $\gamma \in \Gamma$. Известно [1 – 3], что в классе отображений с ограниченным искажением изолированная особенность устранима, однако в классе отображений с s -усредненной характеристикой точка, вообще говоря, не является устранимой. Это показывает следующий пример.

Пример 1. Пусть $B^3 = \{x \in \mathbf{R}^3: 0 < r < 1, 0 < \varphi \leq 2\pi, 0 < \psi \leq 2\pi\}$ – проколотый шар, где (r, φ, ψ) – сферические координаты в $\mathbf{R}^3$. Рассмотрим отображение $f: D' \rightarrow \mathbf{R}^3$, где $D' \subset \mathbf{R}^3$, определяемое по формуле $f(r, \varphi, \psi) = (r', \varphi', \psi')$: $r' = e^r$, $\varphi' = \varphi$, $\psi' = \psi$. Это отображение f диффеоморфно в B^3 , и в каждой точке $x \in B^3$ полуоси характеристического эллипсоида пропорциональны величинам

$$\frac{dr'}{dr} = e^r \frac{r' d\varphi'}{r d\varphi} = \frac{1}{k} e^r \frac{r' \sin \varphi' d\psi'}{r \sin \varphi d\psi} = \frac{1}{r} e^r.$$

Так как $0 < r < 1$, то линейная дилатация $k(r) = \frac{1}{r}$, а интеграл

$$\int_0^1 \frac{1}{r^s} dr < \infty, \quad 0 < s < 1.$$

Следовательно, отображение f является отображением с s -усредненной характеристикой с $0 < s < 1$ и его нельзя продолжить в точку 0 даже по непрерывности.

Лемма 1. Пусть $G \subset D$ – открытое множество и E – континуум, $E \subset G$, Γ – семейство кривых γ , соединяющих E с ∂G . Тогда при $n - 1 < p \leq n$ имеет место следующая оценка снизу:

$$M_p^{n-1}(\Gamma) \geq c \frac{d(E)^p}{|G|^{1-n+p}},$$

где c – постоянная, зависящая только от n и p .

Доказательство следует из [4] и предложения 5 из [11].

При доказательстве следующей теоремы воспользуемся терминологией работ [5,6] с дополнениями к ней, введенной нами в [7].

Теорема 1. Пусть $f: D \rightarrow \mathbf{R}^n$ – непостоянное отображение с s -усредненной характеристикой, $n \geq 3$, $s > n - 1$. Γ – семейство кривых в D и Γ' – семейство кривых $\beta: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$, $m \in \mathbf{N}$. Предположим, что каждая кривая $\beta \in \Gamma'$ имеет частичные f -поднятия $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \Gamma$, начинающиеся в точках $f^{-1}(\beta(a))$, такие, что $\text{card}\{j: \alpha_j(t) = x\} \leq i(x, f)$ для всех $x \in D$ и $t \in [a, b]$. Тогда

$$M_{\frac{ns}{s+1}}^{s+1}(\Gamma') \leq \frac{C(D)K_s}{m} M_n^s(\Gamma).$$

Доказательство. Пусть E – множество точек $x \in D$, в которых отображение f дифференцируемо и $J_f(x) > 0$. Из свойств отображений с s -усредненной характеристикой имеем $B_f \subset D \setminus E$ и $m(D \setminus E) = m(f(D \setminus E)) = 0$. Пусть $B \supset f(D \setminus E)$ – борелевское множество меры нуль. Можно полагать, что для каждой кривой $\beta \in \Gamma'$ выполнены следующие утверждения:

- (a) β – локально спрямляема;
- (b) если α кривая в D , такая, что $f \circ \alpha \subset \beta$, тогда f , следуя терминологии Rickman [6], локально является абсолютно пренебрежимым на α ;
- (c) $\int_{\beta} \aleph_B ds = 0$.

Пусть функция ρ допустима для семейства кривых Γ . Определим борелевскую функцию $\sigma: D \rightarrow [0, \infty]$ следующим образом:

$$\sigma(x) = \begin{cases} \rho(x)/l(f'(x)), & \text{если } x \in D \setminus f^{-1}B, \\ 0, & \text{если } x \in f^{-1}B, \end{cases}$$

и функцию $\rho': \mathbf{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ как

$$\rho'(y) = \frac{1}{m} \aleph_{fD}(y) \sup_C \sum_{x \in C} \sigma(x),$$

где C пробегает все множество прообразов $f^{-1}(y)$ такое, что $\text{card } C \leq m$. Докажем, что функция ρ' допустима для семейства Γ' . Для доказательства того факта, что ρ' борелевская функция, рассмотрим последовательность $D_1 \subset D_2 \subset \dots$ вложенных компактных подобластей D , которые исчерпывают D . Положим

$$\rho_i = \rho \aleph_{\bar{D}_i}, \sigma_i = \sigma \aleph_{\bar{D}_i},$$

$$\rho'_i(y) = \frac{1}{m} \aleph_{fD}(y) \sup_C \sum_{x \in C} \sigma_i(x).$$

Тогда $\rho'_i \rightarrow \rho'$ и $\rho'_i(y) = 0$, если $y \in \mathbf{R}^n \setminus f(\bar{D}_i) \cup f(\bar{D}_i \cap B_f)$. Поэтому достаточно показать, что для произвольной точки $y_0 \in f(\bar{D}_i) \setminus f(\bar{D}_i \cap B_f)$ существует окрестность, в которой ρ'_i – борелевская функция. Рассмотрим непересекающиеся окрестности $U_1, U_2, \dots, U_k$ точек прообраза $f^{-1}(y_0) \cap \bar{D}_i$ в $D \setminus B_f$, где $f|_{\bar{U}_j}$ – инъекция, $j = 1, \dots, k$. Тогда

$$V_0 = \left(\bigcap_{j=1}^k fU_j \right) \setminus f \left(\bar{D}_i \setminus \bigcup_{j=1}^k U_j \right)$$

является окрестностью точки y_0 . Пусть $V \subset V_0$ – связная окрестность точки y_0 . Положим, что G – компонента $f^{-1}V$, пересекающая $\bar{D}_i$. Тогда G пересекается с некоторой U_i . Поскольку $f|_{\bar{U}_i}$ – инъекция, то $V_0 \cap f\partial U_i = \emptyset$. Значит, $G \cap \partial U_i = \emptyset$ и $G \subset U_i$. Таким образом, компоненты $f^{-1}V$, пересекающиеся с $\bar{D}_i$, состоят из областей $G_j \subset U_j, j = 1, \dots, k$, и f определяет гомеоморфизмы $f_j: G_j \rightarrow V$. Обозначим $g_j = f_j^{-1}$. Имеем

$$\rho'_i(y) = \frac{1}{m} \sup_{j=1, \dots, k} \sum_{j=1}^k \sigma_i(g_j(y)),$$

где $y \in V$. Поскольку $\sigma_i \circ g_j$ – борелевская функция, то и ρ'_i обладает тем же свойством.

Предположим, что $\beta: I_0 \rightarrow \mathbf{R}^n$ – замкнутая кривая семейства Γ' . Существуют кривые $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \Gamma$, такие, что $f \circ \alpha_j \subset \beta$ и $\text{card} \{j: \alpha_j(t) = x\} \leq i(x, f)$ для всех $x \in D$ и $t \in I_0$. Пусть $c = l(\beta)$ и $\alpha_j^*: I_j \rightarrow D$ – f -представление α_j относительно β . Тогда $\alpha_j(t) = \alpha_j^* \circ s_\beta(t)$, $f \circ \alpha_j^* \subset \beta^0$ и для любого $t \in I_j$ имеем $|(f \circ \alpha_j^*)(t)| = 1$.

$$|(f \circ \alpha_j^*)(t)| = |f'(\alpha_j^*(t)) \alpha_j^{*'}(t)| \geq l(f'(\alpha_j^*(t))) |\alpha_j^{*'}(t)|$$

$$\text{и} \quad \sigma(\alpha_j^*(t)) = \frac{\rho(\alpha_j^*(t))}{l(f'(\alpha_j^*(t)))} \geq \rho(\alpha_j^*(t)) |\alpha_j^{*'}(t)|.$$

Поскольку α_j^* абсолютно непрерывно, то

$$\int_{\alpha_j} \rho d\gamma_x = \int_{I_j} (\rho \circ \alpha_j^*) |\alpha_j^{*'}| dm_1 \leq \int_{I_j} \sigma \circ \alpha_j^* dm_1.$$

Пусть $h_j(t) = \sigma(\alpha_j^*(t)) \aleph_{I_j}(t)$ для любого $t \in [0, c]$ и $J_i = \{j: t \in I_j\}$. Из (с) следует, что для почти всех $t \in [0, c]$ точки $\alpha_j^*(t), j \in J_i$ – различные точки в прообразе $f^{-1}(\beta^0(t))$. Тогда

$$\rho'(\beta^0(t)) \geq \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m h_j(t)$$

$$\text{и} \quad \int_{\beta} \rho' d\gamma_x = \int_0^c \rho' \circ \beta^0(t) dt \geq \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \int_0^c h_j(t) dt = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \int_{I_j} \sigma \circ \alpha_j^* dm_1 \geq 1.$$

Таким образом, функция ρ' допустима для семейства Γ' .

Пусть, как и выше, $y_0 \in f \bar{D}_i \setminus f(\bar{D}_i \cap B_f)$ и V – связная окрестность точки y_0 , такая, что существуют k квазиконформные в среднем отображения $g_\mu: V \rightarrow G_\mu, \mu = 1, \dots, k$, обладающие свойствами $f \circ g_\mu = id$ и $\bar{D}_i \cap f^{-1}V = \bigcup \{ \bar{D}_i \cap G_\mu : 1 \leq \mu \leq k \}$.

Для каждой точки $y \in V$ определим множество $L_y \subset P = \{1, \dots, k\}$ следующим образом. Если $k \leq m$, то $L_y = P$. Если же $k > m$, то $\text{card } L_y = m$ и для всех $\mu \in L_y$, $\nu \in P \setminus L_y$ либо $\sigma_i(g_\mu(y)) > \sigma_i(g_\nu(y))$, либо $\sigma_i(g_\mu(y)) = \sigma_i(g_\nu(y))$ и $\mu > \nu$. Тогда для $y \in V$ имеем

$$\rho'_i(y) = \frac{1}{m} \sum_{\mu \in L_y} \sigma_i(g_\mu(y)).$$

При $L \subset P$ борелевские множества $V_L = \{y \in V: L_y = L\}$ не пересекаются. Учитывая квазиконформность в среднем отображений $f|_{G_\mu}$ и применяя неравенство Гёльдера, запишем

$$\begin{aligned} \int_{V_L} \rho_i^{\frac{ns}{s+1}}(y)_i d\sigma_y &\leq \frac{1}{m} \sum_{\mu \in L} \int_{V_L} (\sigma_i \circ g_\mu)^{\frac{ns}{s+1}} d\sigma_y = \\ &= \frac{1}{m} \sum_{\mu \in L} \int_{g_\mu V_L} \sigma_i^{\frac{ns}{s+1}} J_f d\sigma_x \leq \frac{C(D)K_s}{m} \left(\int_{f^{-1}V_L} \rho_i^n d\sigma_x \right)^{\frac{s}{s+1}}. \end{aligned}$$

Суммируя по всем $L \subset P$, получим

$$\int_V \rho_i^{\frac{ns}{s+1}} d\sigma_y \leq \frac{C(D)K_s}{m} \left(\int_{f^{-1}V} \rho_i^n d\sigma_x \right)^{\frac{s}{s+1}}.$$

Множество $f\bar{D}_i \setminus f(\bar{D}_i \cap B_f)$ может быть покрыто счетным числом непересекающихся множеств V , как описано выше. Учитывая тот факт, что лебегова мера $m(fB_f) = 0$, имеем

$$\int_{R^n} \rho_i^{\frac{ns}{s+1}} d\sigma_y \leq \frac{C(D)K_s}{m} \left(\int_{R^n} \rho_i^n d\sigma_x \right)^{\frac{s}{s+1}}.$$

Отсюда при $i \rightarrow \infty$ получаем

$$M_{\frac{ns}{s+1}}^{s+1}(\Gamma') \leq \frac{C(D)K_s}{m} M_n^s(\Gamma).$$

Теорема доказана. Теорема 1 обобщает теорему 2 из [7].

Теорема 2. Пусть $f: B^n \setminus \{0\} \rightarrow D^*$ — отображение с s -усредненной характеристикой и $s > n - 1$. Тогда отображение f можно доопределить до непрерывного в точке 0 отображения.

Доказательство. Возьмем произвольную последовательность $\{x_n\}$, сходящуюся к нулю, и покажем, что последовательность $\{f(x_n)\}$ фундаментальна. Обозначим через E разность $B^n(0, x_n) \setminus B^n(0, x_{n+p})$. Пусть Γ — семейство кривых $\gamma \in B^n$, соединяющих множество E с ∂B . В силу теоремы 1 имеем

$$c \cdot \text{diam } f(E) \leq M_{\frac{ns}{s+1}}^{s+1}(f\Gamma) \left(\int_{B^n} K_I^s(x, f) |J(x, f)| d\sigma_x \right) \leq (K_{I,s}) M_n^s(\Gamma).$$

Факт фундаментальности последовательности $\{f(x_n)\}$ вытекает теперь из леммы 1 и соотношений

$$d(E) \geq |f(x_{n+p}) - f(x_n)| \text{ и } M_n(\Gamma) \leq c \ln^{1-n} \frac{1}{|x_{n+p} - x_n|}.$$

В самом деле, предположим противное, то есть что $f(x'_m)$ сходится к a , а $f(x''_m)$ сходится к b , где $\{x'_m\}, \{x''_m\}$ – две подпоследовательности последовательности $\{x_n\}$, и пусть $a \neq b$. Возьмем последовательность $x_n = x'_m$, если $2m = n$, и $x_n = x''_m$, если $2m - 1 = n$, получим противоречие.

Получим теперь оценку искажения расстояний $|f(x) - f(x_0)|$ при стремлении x к изолированной точке x_0 .

Лемма 2. Пусть D и D' – области R^n и $f: D \rightarrow D'$ – отображение с s -усредненной характеристикой. Тогда

$$M(\Gamma') \leq \inf_{p\Lambda\Gamma} \int_D (p(x))^n K_I(x, f) d\sigma_x, \quad (1)$$

где Γ – некоторое семейство кривых в области D , Γ' – образ Γ при отображении f , а $p\Lambda\Gamma$ означает, что p допустима для Γ [9].

Доказательство. Если интеграл справа расходится, то доказывать нечего. Пусть существует $p\Lambda\Gamma$ и $\int_D (p(x))^n K_I(x, f) d\sigma_x < \infty$. Определим функцию

$$\rho'(y) = \begin{cases} \max_j x_j l^{-1}(x_j, f) N(y, f), & y \in f(D_i) \setminus f(B_f), \\ \infty, & y \in E_0 \cap f(B_f), \\ 0, & y \notin f(D_i), \end{cases}$$

где $y = f(x)$, $\{x_j\}$ – совокупность $\max x_j$, в которых

$$f(x_j) = y, \quad l^{-1}(x_j, f) = \frac{r(x_j)}{a_1(x_j)}.$$

Здесь $a_1(x_j) \geq a_2(x_j) \geq \dots \geq a_n(x_j)$ – полуоси эллипсоида, который преобразуется главной линейной частью отображения f в точке x_j в шар радиуса $r(x_j)$; B_f – множество точек ветвления отображения f . Допустимость функции $\rho'(y)$ для семейства $\Gamma' = f(\Gamma)$ доказывается так же, как в теореме 1. Справедливость неравенства (1) следует из оценки

$$\begin{aligned} M(\Gamma) &\leq \inf_{p \in D'} \int [p_j(y)]^n d\sigma_y \leq \inf_{p \in D} \int [\max_j p(x_j) e^{-1}(x_j, f) N(y, f)]^n d\sigma_y \leq \\ &\leq \int \max_j p(x_j) [e^{-1}(x_j, f)]^n d\sigma_x \leq \int_{D_j} p^n(x) K_1(x, f) d\sigma_x. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Определение. Кольцевую область $D_\varphi = D_\varphi(a)$, $a > 1$ называют кольцевой областью Греча, если ее граничными компонентами являются сфера $S^n(0, 1)$ и луч $\{x: a \leq x_1 \leq \infty, x_2 = \dots = x_n = 0\}$.

Положим $(\omega_{m-1}(M(\Gamma_{D_\varphi(a)}))^{-1})^{\frac{1}{n-1}} = \ln \Phi(a)$, где $\Gamma_{D_\varphi(a)}$ – семейство всевозможных кривых, соединяющих граничные компоненты кольцевой области Греча.

Лемма 3. Функция $\frac{\Phi(a)}{a}$ является неубывающей при $1 < a < \infty$, причем $1 \leq \frac{\Phi(a)}{a} \leq \lambda$, где λ – некоторая постоянная.

Доказательство леммы 3 дано в [8].

Лемма 4 (лемма Грёча). Пусть D_r – кольцевая область, такая, что $C_0 = \bar{B}^n$ и C_1 содержит точку ∞ и точку Θ , $|\Theta| = 1, r > 1$. Тогда

$$M\left(\Gamma_{D_{\Theta(r)}}\right) = \inf M\left(\Gamma_{D_r}\right),$$

где $\inf$ берется над классом всевозможных кольцевых областей D_r .

Доказательство леммы 4 содержится в [10].

Теорема 3 Пусть $f: D \rightarrow D'$ – отображение с s -усредненной характеристикой. Тогда для всякой точки $x \in B^n(x_0, d)$, $d = \rho(x_0, \partial D)$ справедлива следующая оценка:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \lambda R^* e^{-t(x, x_0)}, \quad (2)$$

где $R^* = \rho(f(x_0), f(B^n(x_0, d)))$, λ – некоторая величина, зависящая только от n ,

$t(x, x_0) = \left[\omega_{n-1}^{-1} \int_D r^n(x, x_0, y) K_I(y, f) d\sigma_y \right]^{\frac{1}{1-n}}$ и $r(x, x_0, y)$ – произвольная функция, допустимая для семейства $\Gamma([x, x_0], S^{n-1}(s_0, d); B^n(x_0, d))$, $0 < x < d$.

Доказательство. Если интеграл в определении функции $t(x, x_0) > 0$ расходится с $t(x, x_0) = 0$, то оценка (2) тривиальна. Пусть существует функция $r(x, x_0, y)$, такая, что соответствующая функция $t(x, x_0) > 0$. Рассмотрим кольцевую область Грёча $B^n(x_0, d) \setminus [0, |x - x_0|]$. Ее образ при отображении f обозначим $B^* \setminus \gamma$. Используя леммы 3, 4 и известные результаты работ [8, 9], получим оценку

$$\omega_{n-1}^{n-1} (\ln \lambda R^* - \ln |f(x) - f(x_0)|)^{1-n} \leq$$

$$\leq M(\Gamma([f(x_0), f(x)], S^{n-1}(f(x_0), d), B^n(f(x_0), R^*))) \leq M(\Gamma^*),$$

где Γ^* – образ семейства кривых $\Gamma([x_0, x], S^{n-1}(x_0, d), B^n(x_0, d))$ при отображении f .

В силу леммы 2 имеем

$$M(\Gamma^*) \leq \int_D r^n(x, x_0, y) K_I(y, f) d\sigma_y,$$

и, так как $\int_D r^n(x, x_0, y) K_I(y, f) d\sigma_y = \frac{\omega_{n-1}}{t^{n-1}(x, x_0)},$

получаем, что $t(x, x_0) \leq \ln \frac{\lambda R^*}{|f(x) - f(x_0)|}.$

Теорема доказана.

Замечание. Теоремы 1 и 3 нетрудно доказать в терминах локальных характеристик $\lambda(x, f)$, $K_0(x, f)$, $K(x, f)$ с учетом связывающих их известных неравенств.

Обозначим $\operatorname{vrai} \max_{S^{n-1}(x_0, t)} K_I(x, f) = K_{I, f}(x_0, t).$

Порядок роста отображений с s -усредненной характеристикой в окрестности изолированной особой точки характеризуют следующие теоремы.

Теорема 4. Пусть f – отображение с s -усредненной характеристикой шара B^n на себя $f(0) = 0$ и $K_{I,f}(0, t) \leq \left(\ln \frac{c}{t}\right)^{\alpha(n-1)}$, где $0 < \alpha < 1$, $0 < t < 1$, – постоянная $c \geq e$. Тогда $|f(x)| \leq \lambda |x|^{g(c, |x|)}$, где

$$g(c, t) = \left[\beta \left(\left(\ln \frac{c}{t} \right)^\beta - (\ln c)^\beta \right)^{-1} \ln \frac{1}{t} \right]^{\frac{1}{n-1}}, \beta = \alpha(n-1) + 1.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\rho_t(x) = \begin{cases} \left| x \ln \frac{1}{t} \right|^{-1}, & |x| > t. \\ 0, & |x| \leq t. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что для всех $\gamma \in \Gamma_t = ([0, t], S^{n-1}, B^n)$ справедливо неравенство

$$\int_{\gamma} \rho_t(x) d\gamma_x \geq \left(\ln \frac{1}{t} \right)^{-1} \int_t^1 \frac{du}{u} = 1,$$

и, значит, функция ρ_t допустима для Γ_t .

Из условия теоремы следует, что

$$\begin{aligned} \int_{\beta^n} p_t^n(x) K_I(x, f) d\sigma_x &\leq \int_{\beta^n} K_{I,f}(0, |x|) p_t^n(x) d\sigma_x \leq \\ &\leq \omega_{n-1} \int_0^1 \left(\ln \frac{c}{u} \right)^{\alpha(n-1)} \left(\ln \frac{1}{t} \right) \left(\frac{du}{u} \right) = \beta^{-1} \omega_{n-1} \left(\ln \frac{1}{t} \right)^{-n} \left[\left(\ln \frac{c}{t} \right)^\beta - (\ln c)^\beta \right], \end{aligned}$$

$$\beta = \alpha(n-1) + 1.$$

Следовательно, функция $t(x, 0)$ из теоремы 2 оценивается снизу величиной

$$t(x, 0) = (\omega_{m-1}^1 I(|x|)^{\frac{1}{1-n}} \geq [\beta^{-1} \left(\ln \frac{1}{|x|} \right)^n \left(\left(\ln \frac{c}{|x|} \right)^n \left(\left(\ln \frac{c}{|x|} \right)^\beta - (\ln c)^\beta \right)^{-1} \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Отсюда в силу теоремы 2 имеем оценку

$$|f(x)| \leq \lambda e^{-t(x, 0)} \leq \lambda e^{-\ln \frac{1}{|x|} g(c, |x|)}.$$

Теорема 3 доказана.

Замечание Приведенный в [10] пример показывает, что порядок стремления функции $g(c, |x|)$ при $x \rightarrow 0$ в теореме 3 увеличить нельзя.

Определение. Говорят, что открытое изолированное непрерывное отображение $f: D \rightarrow \mathbf{R}^n$ является нормальным, если $f(\partial V) = \partial(f(V))$, какова бы ни была область $V \subset D$.

Теорема 5. Пусть f – нормальное отображение с s -характеристикой, $s > 0$, $B^n \setminus \{x_0\}$, $x_0 \in B^n \subset \mathbf{R}^n$, такое, что для всех $y_0 \in f(B^n \setminus \{x_0\})$ выполняется условие

$$\int_0^1 K_{I,f}^{\frac{1}{1-n}}(y_0, t) dt = \infty,$$

$$\text{где } K_{I,f}(y, t) = \int_{\beta^n \cap S^{n-1}(y, t)} K_I(x, t) d\sigma_x.$$

Тогда существует предел $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$.

Доказательство. Предположим обратное. Поскольку по условиям теоремы единичная сфера переходит в $\partial f(B^n)$, то предельное множество $C(f, x_0)$ лежит либо внутри $f(B^n)$, либо во внешности $f(B^n)$. Будем рассматривать только случай, когда $C(f, x_0)$ лежит внутри. Второй случай рассматривается аналогично. Пусть $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ не имеет предела. Тогда образ $B^n(x_0, \varepsilon) \setminus \{x_0\}$ при отображении f есть кольцевая область $D^* \setminus \{C(f, x_0)\}$, где $C(f, x_0)$ – некоторый континуум, $0 < \delta = \text{diam } C(f, x_0) < \infty$. Пусть $\bar{B}$ – минимальный замкнутый шар, содержащий $C(f, x_0)$. Обозначим через y_0 некоторую точку из пересечения $C(f, x_0) \cap \partial \bar{B}$. Пусть шар $B^n(y_0, R) \supset D^*$ при некотором R .

По лемме 2 имеем

$$M(\partial_t^*) \leq \int_D p_t^n(x) K_1(x, f) dx, \quad (3)$$

где $\rho_t(x)$ – допустимая функция для кривых

$$\partial_t = \partial([x_0, x_0 + te_1], S^{n-1}(x_0, \varepsilon), B^n[x_0, x_0 + e_1 t]).$$

Γ_t^* – образ Γ_t при отображении f . Заметим, что семейство кривых Γ_t^* короче, чем семейство кривых

$$\partial_{C(f, x_0)} = \partial(C(f, x_0), S^n(y_0, R), B^n(y_0, R) \setminus \{C(f, x_0)\}).$$

Следовательно, $M(\partial_{C(f, x_0)}) \leq M(\partial_t^*)$.

По лемме 4 модуль семейства кривых $\Gamma_{C(f, x_0)}$, в свою очередь, не меньше, чем модуль семейства кривых

$$\Gamma_\delta = \Gamma([y_0, y_0 + \delta e_1], S^{n-1}(y, R), B^n(y_0, R) \setminus [y_0, y_0 + te_1]).$$

Из леммы 3 находим, что

$$0 < \delta_0 = \omega_{n-1} \left(\ln \frac{\lambda R}{\delta} \right)^{1-n} \leq M(\partial_{C(f, x_0)}) \leq N(\partial_t^*). \quad (4)$$

В качестве допустимой функции для семейства Γ_t возьмем функцию $\rho_t(x)$, которую определим так:

$$\rho_t(x) = \left(\int_t^\varepsilon K_{I,f}^{1-n}(x_0, t) dt \right)^{-1} \cdot K_{I,f}^{1-n}(x_0, |x - x_0|).$$

Проверим допустимость функции $\rho_t(x)$:

$$\int_\gamma \rho_t(x) d\gamma_x = \int_\gamma \rho_t(|x - x_0|) d\gamma_x \geq \int_t^\varepsilon \rho_t(r) dr = 1.$$

Объединяя неравенства (3) и (4), получаем, что

$$\delta_0 \leq \left(\int_t^\varepsilon K_{I,f}^{1-n}(x_0, t) dt \right)^{-n} \int_{t < |x - x_0| < s} K_1(x, t) K_{I,f}^{\frac{n}{1-n}}(x_0, |x - x_0|) d\sigma_x = \left(\int_t^\varepsilon K_{I,f}^{1-n}(x_0, t) dt \right)^{1-n}.$$

Устремляя t к нулю, получим, что $\delta_0 \leq 0$.

Полученное противоречие доказывает теорему.

ЛИТЕРАТУРА

1. Решетняк Ю.Г. Пространственные отображения с ограниченным искажением. Новосибирск: Наука, 1982. 286 с.
2. Gehring F.W. Extensional theorem for quasiconformal mappings in three space // J. d'analyse math. 1965. V.14. P. 171–182.
3. Зорич В.А. Изолированная особенность отображений с ограниченным искажением // Мат. сб. 1970. Т. 81(123). № 4. С. 634 – 636.
4. Малютина А.Н. Об отображениях с ограниченным в среднем отображением // Экстремальные задачи теории функций. Томск: Изд-во ТГУ, 1985. С. 24 – 31.
5. Полецкий Е.А. Метод модулей для негомеоморфных квазиконформных отображений // Мат. сб. 1970. Т. 183(125). № 2(10). С. 261 – 273.
6. Rickman S. Value distribution of quasiregular mappings // Proc. Value Distribution Theory, Joensuu 1981, Lecture notes in Math. Berlin – Heidelberg – New York: Springer-Verlag, 1983. V. 981. P. 220 – 245.
7. Малютина А.Н., Романова Е.Н. О некоторых свойствах отображений с ограниченным в среднем искажением // Вестник ТГУ. 2000. № 269. С. 56 – 59.
8. Сычев А.В. Модули и пространственные квазиконформные отображения. Новосибирск: Наука, 1983. 152 с.
9. Шабат Б.В. Нелинейные, гиперболические и пространственные задачи теории квазиконформных отображений: Автореф. дис. ... докт. физ.-мат. наук. М., 1961. 8 с.
10. Vaisala Ju. Lectures on N-dimensional quasiconformal mappings in space // Ann. Acad. Sci. Fenn. AI. 1965. V. 362. P. 1 – 12.
11. Стругов Ю.Ф. Отображения, квазиконформные в среднем // Препринт АН СССР. Сиб. отд-ние Ин-та математики. Новосибирск, 1979. 39 с.
12. Кругликов В.И., Пайков В.И. Некоторые геометрические свойства отображений с искажением, ограниченным в среднем. Донецк: Донецк. ун-т, 1982. 43 с.

Принята в печать 05.12.07.