

УДК 532.516.5:532.69

М.А. Пономарева, Г.Р. Шрагер, В.А. Якутенок

**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ ДЮПРЕ – ЮНГА
ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О РАСТЕКАНИИ ЖИДКОСТИ
ПРИ ОГРАНИЧЕННОМ СМАЧИВАНИИ¹**

В настоящей работе предлагается способ численного моделирования процесса растекания вязкой жидкости по твердой стенке в условиях ограниченного смачивания. Краевое условие на линии трехфазного контакта получено с привлечением уравнения Дюпре – Юнга. Представленные результаты подтверждают адекватность предложенной постановки задачи и алгоритма получения численного решения.

Ключевые слова: *Растекание, смачивание, вязкая жидкость, динамический краевой угол, линия смачивания.*

Растекание объема вязкой жидкости по твердой стенке сопровождается непрерывным изменением краевого угла от некоторого начального значения, как правило, близкого к π , до его равновесной величины θ_s . Это изменение происходит в условиях движения линии смачивания (границы контакта трех сред: газа, жидкости и твердого тела) по твердой стенке. После достижения свободной поверхностью ее равновесной формы течение прекращается. Такой процесс называют растеканием при ограниченном смачивании [1]. Основной характеристикой взаимодействия трех сред при этом является равновесный краевой угол θ_s , а равновесная форма определяется условием Лапласа

$$\sigma_k = \rho g x_2 \quad (1)$$

и уравнением Дюпре – Юнга на линии смачивания

$$\sigma \cos \theta_s = \sigma_1 - \sigma_2, \quad (2)$$

где σ , σ_1 , σ_2 – коэффициенты поверхностного натяжения на границах раздела жидкость – газ, твердое тело – газ и твердое тело – жидкость соответственно, ρ – плотность жидкости, g – ускорение силы тяжести, x_2 – вертикальная координата, ортогональная твердой стенке (рис. 1).

Исследованию эволюции динамического краевого угла в процессе растекания посвящено значительное количество работ, например [2 – 6]. В то же время не существует общепринятого подхода к формулировке граничного условия в окрестности линии смачивания, учитывающего взаимодействие трех контактирующих фаз. Возможные варианты решения проблем, возникающих при численном моделировании растекания для краевого угла $\theta_s = \pi$, приведены в [7 – 8] для произвольных чисел Бонда ($Bo = \rho g R^2 / \sigma$).

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 08-08-00064-а, 06-08-00107-а).

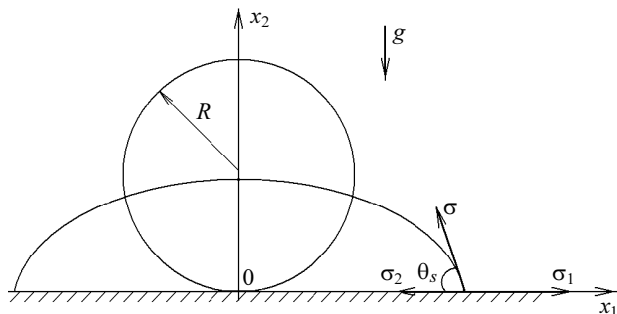


Рис. 1. Объем жидкости на твердой поверхности в начальный момент времени и в условиях равновесия

Постановка задачи

Рассматривается процесс растекания объема вязкой несжимаемой жидкости, имеющего в начальный момент времени форму цилиндра, касающегося твердой сухой поверхности (рис. 1). Влиянием торцевых стенок цилиндра на течение в рассматриваемом сечении пренебрегается, поэтому в безынерционном приближении возможно использование уравнений Стокса в двумерном виде

$$\frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i = 0, \quad i, j = 1, 2, \quad (3)$$

и уравнения неразрывности

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (4)$$

где $\Pi_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu\dot{e}_{ij}$ – компоненты тензора напряжений, p – давление, x_i – оси декартовой системы координат, $g(0, -g)$ – компоненты вектора силы тяжести,

$\dot{e}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ – компоненты тензора скоростей деформаций, u_i – компонен-

ты вектора скорости, μ – коэффициент динамической вязкости. На горизонтальной поверхности $x_2=0$ выполняется условия прилипания

$$u_i = 0. \quad (5)$$

Динамические граничные условия на свободной поверхности, заключающиеся в отсутствии касательных напряжений и равенстве скачка нормальных напряжений капиллярному давлению, можно записать в проекциях на оси координат x_i в виде

$$t_i = \Pi_{ij}n_j = -\sigma\kappa n_i, \quad (6)$$

где t_i – компоненты вектора усилий на свободной поверхности, n_i – компоненты внешней нормали, κ – кривизна свободной границы.

Кинематическое условие, которому подчиняется свободная поверхность, используется в лагранжевом представлении:

$$\frac{dx_i}{dt} = u_i. \quad (7)$$

Уравнение движения (3) можно переписать в виде

$$\frac{\partial \tilde{\Pi}_{ij}}{\partial x_j} = 0, \quad (8)$$

с использованием потенциала силы тяжести $\varphi = gx_i$, для преобразованных компонент тензора напряжений $\tilde{\Pi}_{ij} = -(p - \rho\varphi)\delta_{ij} + 2\mu\dot{\epsilon}_{ij}$. В этом случае краевое условие (6) запишется следующим образом:

$$t_i = \tilde{\Pi}_{ij}n_j = -(\sigma\kappa + \rho gx_2)n_i. \quad (9)$$

Движущую силу, отнесенную к единице длины, на линии трехфазного контакта при ограниченном смачивании можно представить в виде [1]

$$\Delta\sigma = (\sigma_1 - \sigma_2) - \sigma \cos\theta_d,$$

где θ_d – значение динамического краевого угла в процессе растекания. С учетом уравнения Дюпре – Юнга (2) получаем

$$\Delta\sigma = \sigma(\cos\theta_s - \cos\theta_d). \quad (10)$$

Таким образом, для учета межмолекулярного взаимодействия на линии смачивания достаточно знания значения равновесного краевого угла θ_s , которое гораздо проще определить экспериментально для исследуемых сред, чем величины σ_1 и σ_2 . В конце процесса растекания, при выполнении равенства $\theta_d = \theta_s$, должна реализовываться равновесная форма свободной поверхности, определяемая равенствами (1) и (2).

Для перехода к безразмерным переменным используются масштабы: длины – R , скорости – σ/μ , давления – σ/R . Тогда видоизменяются только граничные условия (9) и (10), которые с сохранением прежних обозначений запишутся в виде

$$t_i = -(\kappa + \text{Bo}x_2)n_i; \quad (11)$$

$$\Delta\sigma = \cos\theta_s - \cos\theta_d. \quad (12)$$

Метод решения

Для численного решения поставленной задачи используется непрямой метод граничных элементов, подробно изложенный для задач рассматриваемого класса в работе [9]. Используемая при этом дискретизация показана на рис. 2.

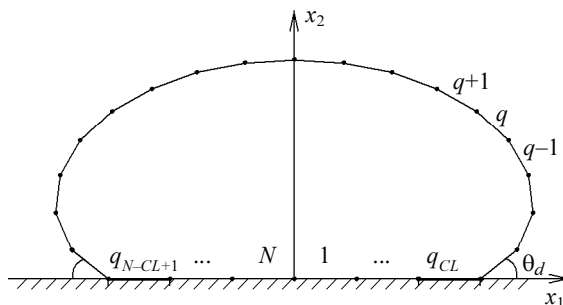


Рис. 2. Дискретизация границы области решения

Постановка краевой задачи для уравнений (4) и (8) требует задания на соответствующих частях границы области решения компонент вектора скорости u_i или значений компонент вектора усилий t_i . В то же время на линии смачивания должно быть выполнено условие (12). Для учета движущей силы растекания, соответствующей этому условию, предлагается задавать на элементе q_{CL} , расположенном на твердой стенке и примыкающем к линии смачивания, граничное условие в виде

$$t_1 = \frac{\Delta\sigma}{\Delta s_{q_{CL}}}, \quad u_2 = 0,$$

где $\Delta s_{q_{CL}}$ – длина элемента q_{CL} .

Точно такие же условия должны быть заданы на симметрично расположенном элементе q_{N-CL+1} . Использование граничного условия в такой форме обеспечивает воздействие силы на указанном элементе на объем растекающейся жидкости, эквивалентной движущей силе, действующей на линии смачивания. При этом надо учесть, что величина $\Delta\sigma$ является фактически плотностью силы, действующей на линии контакта, а t_1 – плотностью поверхностной силы, действующей на твердой стенке вблизи линии контакта трех сред.

Кривизна свободной границы вычисляется со вторым порядком точности с использованием выражения $\kappa = d\beta/ds$, где β – угол наклона касательной к границе относительно оси x_1 , s – дуговая координата, отсчитываемая против часовой стрелки.

Для вычисления форм свободной поверхности в соответствии с кинематическим условием (7) используется схема Эйлера

$$x_i^{n+1} = x_i^n + u_i^n \Delta t,$$

где n – номер шага по времени, Δt – шаг по времени, выбираемый в соответствии с условием Куранта: $\Delta t \leq s_{\min}/u_{\max}$, где $s_{\min}$ – длина наименьшего элемента на свободной поверхности, $u_{\max}$ – максимальное значение модуля вектора скорости на ней.

Результаты расчетов

Результаты проведенных расчетов по вышеизложенной методике иллюстрируются рис. 3 – 6. Согласование полученных в расчетах равновесных форм с формами, вычисленными в соответствии с уравнениями (1), (2) (алгоритм вычисления приведен в [10]), доказывает возможность численного моделирования процесса растекания с использованием условия (12) на линии смачивания. При этом процесс растекания можно разделить на два этапа. На первом происходит накатывание свободной поверхности на твердую стенку, так, как это описано в [8]. Далее начинается собственно перемещение линии смачивания в соответствии с (12). Зависимости основных характеристик растекания объема жидкости, приведенные на рис. 4 – 6, позволяют утверждать, что при малых числах Бонда этап смачивания значительно длительнее этапа натекания и протекает со скоростями на несколько порядков меньшими ($\sim 10^2$). Полученные зависимости динамического краевого угла, представленные на рис. 5, позволяют сделать вывод о том, что этап смачивания характеризуется близостью динамического краевого угла к его равновесному значению.

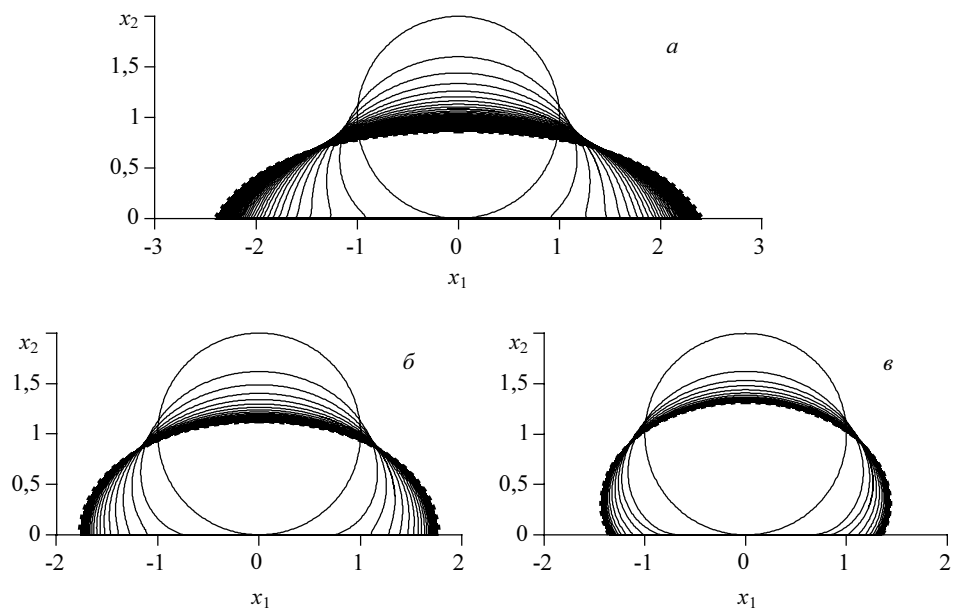


Рис. 3. Последовательность форм свободной поверхности для $Bo = 1$, $\Delta t = 1$:
 $a - \theta_s = 60^\circ$; $\delta - \theta_s = 90^\circ$; $\epsilon - \theta_s = 120^\circ$ (штриховые линии – равновесные формы,
 полученные в соответствии с [9])

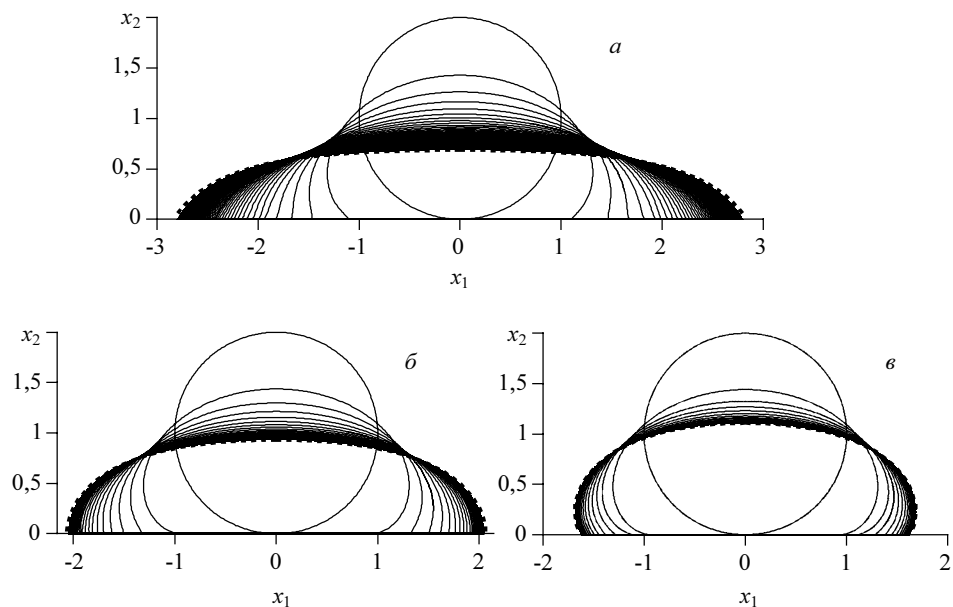


Рис. 4. Последовательность форм свободной поверхности для $Bo = 2$, $\Delta t = 1$:
 $a - \theta_s = 60^\circ$; $\delta - \theta_s = 90^\circ$; $\epsilon - \theta_s = 120^\circ$ (штриховые линии – равновесные формы,
 полученные в соответствии с [9])

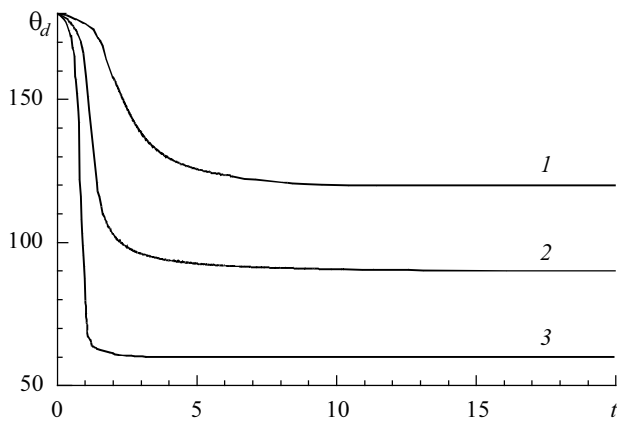


Рис. 5. Зависимость динамического краевого угла от времени для $Bo = 1$: 1 – $\theta_s = 120^\circ$; 2 – $\theta_s = 90^\circ$; 3 – $\theta_s = 60^\circ$

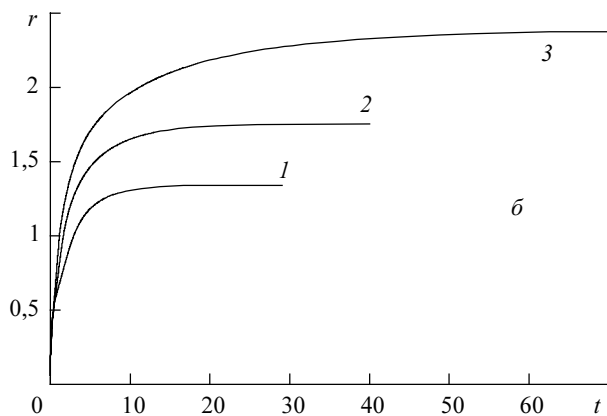
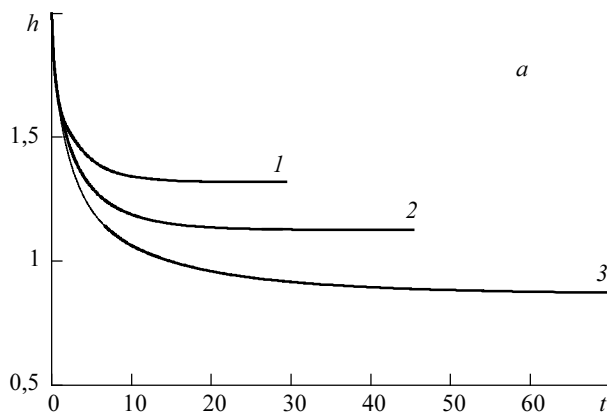


Рис. 6. Зависимость от времени: а – высоты объема жидкости, б – величины контактной зоны. 1 – $\theta_s = 120^\circ$; 2 – $\theta_s = 90^\circ$; 3 – $\theta_s = 60^\circ$

ЛИТЕРАТУРА

1. Сумм Б.Д., Горюнов Ю.В. Физико-химические основы смачивания и растекания. М.: Химия, 1976. 232 с.
2. Hocking L.M., Rivers A.D. The spreading of a drop by capillary action // J. Fluid Mech. 1982. V. 121. P. 425 – 442.
3. Hoffman R. A study of the advancing interface. I. Interface shape in liquid-gas systems // J. Colloid Interface Sci. 1975. V. 50. No. 2. P. 228 – 241.
4. Reznik S.N., Yarin A.L. Spreading of a viscous drop due to gravity and capillarity on a horizontal or an inclined dry wall // Phys. Fluids. 2002. V. 14. P. 118 – 132.
5. Пухначев В.В., Солонников В.А. К вопросу о динамическом краевом угле // ПММ. 1982. Т. 446. № 6. С. 961 – 971.
6. Воинов О.В. Течения с квазиравновесными свободными границами в динамике смачивания твердых тел // ПММ. 2006. Т. 70. № 2. С. 264 – 275.
7. Пономарева М.А., Якутенок В.А. Моделирование растекания капли вязкой жидкости в плоской постановке при больших числах Бонда // Вестник ТГУ. Математика и механика. 2007. № 1. С. 79 – 83.
8. Якутенок В.А., Пономарева М.А., Архипов В.А. Численное моделирование в плоской постановке растекания капли по твердой стенке // Изв. вузов. Физика. 2006. № 6. Приложение. С. 172 – 176.
9. Якутенок В.А. Численное моделирование медленных течений вязкой жидкости со свободной поверхностью методом граничных элементов // Мат. моделирование. 1992. Т. 4. № 10. С. 62 – 70.
10. Пономарева М.А., Тимохин А.М., Якутенок В.А. Определение равновесной формы объема капиллярной жидкости, расположенного на горизонтальной поверхности // Изв. вузов. Физика. 2007. №9/2. С. 269 – 273.

Принята в печать 07.04.08.