ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2012 Управление, вычислительная техника и информатика № 3(20)

УДК 519.2

Ю.В. Малинковский, Ю.С. Боярович

ИНВАРИАНТНОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СОСТОЯНИЙ ОТКРЫТОЙ СЕТИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ВРЕМЕННО НЕАКТИВНЫМИ ЗАЯВКАМИ

Исследовано стационарное функционирование открытой сети массового обслуживания с временно неактивными заявками. Неактивные заявки находятся в очередях узлов и не обслуживаются. Предусматривается возможность перехода заявки из обычного состояния в неактивное и обратно. Установлена инвариантность стационарного распределения состояний сети по отношению к функциональной форме распределений длительностей обслуживания заявок при фиксированных первых моментах.

Ключевые слова: *открытая сеть массового обслуживания, временно неактивные заявки, инвариантность стационарного распределения вероятностей состояний.*

В теории массового обслуживания достаточно актуальной является проблема исследования надежности обслуживающих узлов. Обслуживающий узел может полностью или частично выходить из строя. В то же время могут терять свои качественные характеристики и поступающие в узел заявки.

В настоящее время большой интерес для исследователей представляют сети массового обслуживания с временно неактивными заявками. Заявки в таких сетях делятся на два класса. Первые могут обслуживаться узлами, вторые являются неактивными и не обслуживаются, скапливаясь в очередях узлов. Поступающие в сеть потоки информационных сигналов позволяют заявкам менять свое состояние: из неактивного переходить в состояние, когда они снова становятся пригодными для обслуживания, и наоборот. Как правило, основной интерес представляют характеристики стационарного функционирования таких сетей, в частности вид стационарного распределения вероятностей состояний.

Неактивные заявки можно интерпретировать как заявки, имеющие некоторый дефект, в результате которого они становятся непригодными для обслуживания. Действительно, при передаче данных в информационно-телекоммуникационных сетях может возникнуть ситуация, когда пересылаемая заявка становится непригодной для обслуживания в результате какой-либо поломки или сбоя в процессе ее пересылки. Таким образом, результаты исследования стационарного функционирования сетей массового обслуживания с временно неактивными заявками могут представлять интерес с прикладной точки зрения.

В работе [1] Г. Цициашвилли и М. Осиповой представлено исследование открытой сети массового обслуживания с неактивными заявками. Установлен вид стационарного распределения вероятностей состояний в предположении, что длительности обслуживания заявок распределены по экспоненциальному закону. В работах [2, 3] приведено исследование стационарного функционирования сетей, обобщающих модель из [1] на случай циркулирования заявок и сигналов различных типов и поступления в сеть потоков неактивных заявок.

Классическая сеть Джексона исследуется в предположении, что длительность обслуживания заявки имеет показательное распределение. Однако на практике закон распределения длительности обслуживания заявки чаще всего отличается от показательного. Поэтому существует актуальная проблема разработки аналитического аппарата для исследования сетей массового обслуживания с произвольными функциями распределения времени обслуживания, привлекающая все большее внимание исследователей [4–7].

В настоящей работе представлено исследование открытой сети массового обслуживания с временно неактивными заявками. Предполагается, что длительности обслуживания заявок распределены по произвольному закону. Устанавливается инвариантность стационарного распределения вероятностей состояний по отношению к функциональной форме распределений длительностей обслуживания заявок при фиксированных первых моментах.

1. Инвариантность стационарного распределения состояний открытой сети с временно неактивными заявками

Рассматривается открытая сеть массового обслуживания с множеством узлов $J = \{1,\ldots,N\}$. Все заявки в сети подразделяются на обыкновенные, которые могут получать обслуживание, и временно неактивные. В узлы сети извне поступают независимые пуассоновские потоки заявок с интенсивностями λ_i и информационных сигналов с интенсивностями υ_i и φ_i, $i\in J$. Поступивший в i-й узел с интенсивностью υ_i информационный сигнал уменьшает количество обыкновенных заявок на единицу и увеличивает на единицу количество неактивных заявок; в случае отсутствия в i-м узле обыкновенных заявок сигнал покидает сеть, $i\in J$. Поступивший в i-й узел с интенсивностью φ_i информационный сигнал уменьшает на единицу количество неактивных заявок, увеличивая на единицу число обыкновенных заявок; в случае отсутствия в i-м узле неактивных заявок сигнал покидает сеть, $i\in J$. Обслуживания информационные сигналы не требуют. Обслуженная в i-м узле заявка мгновенно с вероятностью $p_{i,j}$ переходит в j-й узел, а с вероятностью $p_{i,0}$ покидает сеть $\left(\sum_{j=1}^{N} p_{i,j} + p_{i,0} = 1, i, j \in J\right)$. Не ограничивая общности, договоримся считать $p_{i,i} = 0$, $i\in J$.

Состояние сети в момент времени t характеризуется вектором

$$z(t) = ((n_1(t), n_1'(t)),\ldots, (n_N(t), n_N'(t))),$$

где $(n_i(t), n_i'(t))$ – состояние i-го узла в момент времени t, $i\in J$. Здесь $n_i(t)$ и $n_i'(t)$ – число обыкновенных и соответственно неактивных заявок в i-м узле в момент времени t, а общее число заявок в i-м узле равно $n_i(t)+n_i'(t)$, $i\in J$. $z(t)$ обладает счетным пространством состояний $Z = \{((n_1,n_1'),\ldots,(n_N,n_N'))|\ n_i, n_i'\geq 0, i\in J\}$.

Нумерация обыкновенных заявок в очереди каждого узла осуществляется от «хвоста» очереди к прибору, то есть если в i-м узле находится n_i обыкновенных заявок, то заявка, которая обслуживается, имеет номер n_i, $i\in J$, а последняя заявка в очереди имеет номер 1. Неактивные заявки в очереди i-го узла нумеруются следующим образом: заявка, последняя ставшая неактивной, имеет номер n_i', $i\in J$. Поступающий в узел $i\in J$ сигнал υ_i воздействует на обыкновенную заявку, имеющую номер 1, которая становится неактивной заявкой под номером $n_i'+1$. Сигнал φ_i воздействует на неактивную заявку, имеющую номер n_i', $i\in J$, которая становится обыкновенной заявкой под номером 1. Дисциплина обслуживания – *LSFS-PR*.

Поступающая в узел $i \in J$ заявка начинает сразу обслуживаться и получает номер n_i+1, а вытесненная заявка сохраняет номер n_i и становится первой в очереди на дообслуживание. Предполагается, что в начальный момент времени временно неактивные заявки в сети отсутствуют.

В работе [1] рассмотрен случай, когда времена обслуживания заявок распределены по показательному закону, а дисциплина обслуживания – *FIFO*. В указанной работе установлено, что при выполнении условий

$$\varepsilon_i < \mu_i, i \in J; \tag{1}$$

$$\varepsilon_i \upsilon_i < \mu_i \varphi_i, i \in J, \tag{2}$$

процесс $z(t)$ эргодичен, а стационарное распределение вероятностей состояний процесса имеет вид

$$p((n_1, n'_1), ..., (n_N, n'_N)) = p_1(n_1, n'_1)...p_N(n_N, n'_N), \tag{3}$$

где
$$p_i(n_i, n'_i) = \left(\frac{\varepsilon_i}{\mu_i}\right)^{n_i} \left(\frac{\varepsilon_i \upsilon_i}{\mu_i \varphi_i}\right)^{n'_i}, \ i \in J, \tag{4}$$

– стационарное распределение вероятностей состояний i-го узла, $i \in J$. (ε_i, $i \in J$) – единственное положительное решение системы уравнений трафика

$$\varepsilon_i = \lambda_i + \sum_{j \in J} \varepsilon_j p_{j,i}, \ i \in J. \tag{5}$$

Рассмотрим теперь случай, когда длительность обслуживания заявки в i-м узле – случайная величина с произвольной функцией распределения $B_i(n_i + n'_i, x_{i,n_i+n'_i})$ и математическим ожиданием $\dfrac{1}{\mu_i}$, $i \in J$. Тогда в общем случае процесс $z(t)$ не является марковским, поэтому рассмотрим кусочно-линейный марковский процесс $\zeta(t) = (z(t), \xi(t))$, добавляя к $z(t)$ непрерывную компоненту $\xi(t) = (\xi_1(t), \dots, \xi_N(t))$. Здесь $\xi_i(t) = (\xi_{i,1}(t), ..., \xi_{i,n_i+n'_i}(t))$, где $\xi_{i,k}(t)$ – время, оставшееся до окончания обслуживания заявки, стоящей в момент времени t на k-й позиции в i-м узле, $i \in J$.

Введем обозначения

$$F(z, x) = F(z, x_{1,1}, ..., x_{1,n_1+n'_1}; x_{2,1}, ..., x_{2,n_2+n'_2}; x_{N,1}, ..., x_{N,n_N+n'_N}) =$$
$$= \lim_{t \to \infty} P\{z(t) = z, \xi_{i,1}(t) < x_{i,1}, ..., \xi_{i,n_i+n'_i}(t) < x_{i,n_i+n'_i}, i \in J\}. \tag{6}$$

Функции $F(z, x)$ будем называть стационарными функциями распределения вероятностей состояний кусочно-линейного процесса $\zeta(t) = (z(t), \xi(t))$, поскольку при каждом фиксированном z функция $F(z, x)$ в части непрерывных компонент представляет собой функцию распределения.

Теорема. При выполнении условий (1) и (2) процесс $\zeta(t)$ эргодичен, а стационарные функции распределения вероятностей состояний $F(z, x)$ определяются по формулам

$$F(z, x) = p_1(n_1, n'_1)...p_N(n_N, n'_N) \times$$
$$\times \prod_{i=1}^{N} \mu_i^{n_i+n'_i} \prod_{s=1}^{n_i+n'_i} \int_0^{x_{i,s}} (1 - B_i(s, u)) du, \ z \in Z, \tag{7}$$

где
$$p_i(n_i, n'_i) = \left(\frac{\varepsilon_i}{\mu_i}\right)^{n_i} \left(\frac{\varepsilon_i \upsilon_i}{\mu_i \varphi_i}\right)^{n'_i}, \tag{8}$$

здесь ε_i – единственное положительное решение системы уравнений трафика (5), $i \in J$.

Доказательство: Обозначим $e_i \in Z$ – вектор, все координаты которого нулевые, кроме $(n_i, n_i') = (1, 0)$, $e_i' \in Z$ – вектор, все координаты которого нулевые, кроме $(n_i, n_i') = (0, 1)$, $i \in J$.

Рассмотрим процесс $\zeta(t)$. При выполнении условий (1) и (2) в марковском случае процесс $z(t)$ эргодичен, тогда эргодичен при выполнении условий (1) и (2) и процесс $\zeta(t)$, поскольку получается из $z(t)$ добавлением непрерывных компонент.

Строгое доказательство этого факта может быть проведено, если учесть, что процесс $\zeta(t)$ является регенерирующим. Действительно, функционирование сети схематично можно представить как чередование периодов, когда сеть находится в состоянии «0» (в каждом узле сети нет заявок – вектор $z(t)$ является нулевым), и периодов занятости сети (в противном случае). Момент перехода сети в свободное состояние является моментом регенерации. Далее доказательство сводится к применению предельной теоремы Смита для регенерирующих процессов [7].

Изменения состояния кусочно-линейного процесса $\zeta(t)$ за счет поступления заявок или информационных сигналов будем называть спонтанными изменениями.

Пусть h мало. Рассмотрим вероятность события
$$P\{z(t+h) = z, \xi_{i,1}(t+h) < x_{i,1}, ..., \xi_{i,n_i+n'_i}(t+h) < x_{i,n_i+n'_i}, i \in J\}. \tag{9}$$

Это событие может произойти следующими взаимоисключающими способами:

1. С момента t за время h не произошло ни одного спонтанного изменения и обслуживание ни в одном узле не закончилось. Вероятность этого равна
$$P\{z(t) = z, \xi_{i,1}(t) < x_{i,1}, ..., hI_{n_i>0} \le \xi_{i,n_i+n'_i}(t) < x_{i,n_i+n'_i} + hI_{n_i>0}, i \in J\} \times$$
$$\times (1 - \sum_{i=1}^{N} (\lambda_i + \upsilon_i I_{n_i>0} + \varphi_i I_{n'_i>0}) h + o(h)). \tag{10}$$

Здесь I_A – индикаторная функция множества A.

2. За время h в i-й узел поступила заявка, других спонтанных изменений не произошло, обслуживание ни в одном узле не закончилось, $i \in J$.
$$P\{z(t) = z - e_i, \xi_{k,1}(t) < x_{k,1}, ..., hI_{n_k>0} \le \xi_{k,n_k+n'_k}(t) < x_{k,n_k+n'_k} + hI_{n_k>0}, k \in J, k \ne i,$$
$$\xi_{i,1}(t) < x_{i,1}, ..., hI_{n_i>1} \le \xi_{i,n_i+n'_i-1}(t) < x_{i,n_i+n'_i-1} + hI_{n_i>1}\} \times$$
$$\times (\lambda_i h + o(h)) B_i(n_i + n'_i, x_{i,n_i+n'_i} + \theta h) I_{n_i>0}, 0 < \theta < 1. \tag{11}$$

3. За время h в j-ом узле заявка была обслужена, после чего она мгновенно перешла в i-й узел, спонтанных изменений не произошло, $i, j \in J$.
$$P\{z(t) = z - e_i + e_j, \xi_{k,1}(t) < x_{k,1}, ..., hI_{n_k>0} \le$$
$$\le \xi_{k,n_k+n'_k}(t) < x_{k,n_k+n'_k} + hI_{n_k>0}, k \in J, k \ne i, k \ne j,$$
$$\xi_{j,1}(t) < x_{j,1}, ..., \xi_{j,n_j+n'_j}(t) < x_{j,n_j+n'_j}, \xi_{j,n_j+n'_j+1}(t) < h,$$
$$\xi_{i,1}(t) < x_{i,1}, ..., hI_{n_i>1} \le \xi_{i,n_i+n'_i-1}(t) < x_{i,n_i+n'_i-1} + hI_{n_i>1}\} \times$$
$$\times B_i(n_i + n'_i, x_{i,n_i+n'_i} + \theta h) p_{j,i} I_{n_i>0}, 0 < \theta < 1. \tag{12}$$

4. За время h в i-м узле была обслужена заявка, после чего она мгновенно покинула сеть, спонтанных изменений не произошло, $i \in J$.

$$P\{z(t) = z + e_i,\ \xi_{k,1}(t) < x_{k,1}, \ldots, hI_{n_k>0} \le \xi_{k,n_k+n'_k}(t) < x_{k,n_k+n'_k} + hI_{n_k>0},\ k \in J,\ k \ne i,$$

$$\xi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots, \xi_{i,n_i+n'_i+1}(t) < h\} p_{i,0}. \qquad (13)$$

5. За время h в i-й узел поступил сигнал интенсивности υ_i, уменьшивший количество обыкновенных заявок на единицу, а количество неактивных заявок на единицу увеличивший, других спонтанных изменений не произошло, обслуживание ни в одном узле не закончилось, $i \in J$.

$$P\{z(t) = z + e_i - e'_i,\ \xi_{k,1}(t) < x_{k,1}, \ldots, hI_{n_k>0} \le \xi_{k,n_k+n'_k}(t) < x_{k,n_k+n'_k} + hI_{n_k>0},\ k \in J,\ k \ne i,$$

$$\xi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots, h \le \xi_{i,n_i+n'_i}(t) < x_{i,n_i+n'_i} + h\} \times (\upsilon_i h + o(h)) I_{n'_i>0}. \qquad (14)$$

6. За время h в i-й узел поступил сигнал интенсивности φ_i, уменьшивший количество неактивных заявок на единицу, а количество обыкновенных заявок на единицу увеличивший, других спонтанных изменений не произошло, обслуживание ни в одном узле не закончилось, $i \in J$.

$$P\{z(t) = z - e_i + e'_i,\ \xi_{k,1}(t) < x_{k,1}, \ldots, hI_{n_k>0} \le \xi_{k,n_k+n'_k}(t) < x_{k,n_k+n'_k} + hI_{n_k>0},\ k \in J,\ k \ne i,$$

$$\xi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots, hI_{n_i>1} \le \xi_{i,n_i+n'_i}(t) < x_{i,n_i+n'_i} + hI_{n_i>1}\} \times (\varphi_i h + o(h)) I_{n_i>0}. \qquad (15)$$

7. И, наконец, за время h происходит не менее двух изменений состояния сети. Вероятность этого есть $o(h)$.

В силу вышесказанного имеем

$$P\{z(t+h) = z,\ \xi_{i,1}(t+h) < x_{i,1}, \ldots, \xi_{i,n_i+n'_i}(t+h) < x_{i,n_i+n'_i},\ i \in J\} =$$

$$= P\{z(t) = z,\ \xi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots, hI_{n_i>0} \le \xi_{i,n_i+n'_i}(t) < x_{i,n_i+n'_i} + hI_{n_i>0},\ i \in J\} \times$$

$$\times \Big(1 - \sum_{i=1}^{N} (\lambda_i + \upsilon_i I_{n_i>0} + \varphi_i I_{n'_i>0}) h + o(h)\Big) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} P\{z(t) = z - e_i,\ \xi_{k,1}(t) < x_{k,1}, \ldots, hI_{n_k>0} \le \xi_{k,n_k+n'_k}(t) < x_{k,n_k+n'_k} + hI_{n_k>0},\ k \in J,\ k \ne i,$$

$$\xi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots, hI_{n_i>1} \le \xi_{i,n_i+n'_i-1}(t) < x_{i,n_i+n'_i-1} + hI_{n_i>1}\} \times$$
$$\times (\lambda_i h + o(h)) B_i(n_i + n'_i, x_{i,n_i+n'_i} + \theta h) I_{n_i>0} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} P\{z(t) = z - e_i + e_j,\ \xi_{k,1}(t) < x_{k,1}, \ldots, hI_{n_k>0} \le \xi_{k,n_k+n'_k}(t) < x_{k,n_k+n'_k} + hI_{n_k>0},$$

$$k \in J,\ k \ne i,\ k \ne j,$$

$$\xi_{j,1}(t) < x_{j,1}, \ldots, \xi_{j,n_j+n'_j}(t) < x_{j,n_j+n'_j},\ \xi_{j,n_j+n'_j+1}(t) < h,$$

$$\xi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots, hI_{n_i>1} \le \xi_{i,n_i+n'_i-1}(t) < x_{i,n_i+n'_i-1} + hI_{n_i>1}\} \times$$
$$\times B_i(n_i + n'_i, x_{i,n_i+n'_i} + \theta h) p_{j,i} I_{n_i>0} + \qquad (16)$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} P\{z(t) = z + e_i,\ \xi_{k,1}(t) < x_{k,1}, \ldots, hI_{n_k>0} \le \xi_{k,n_k+n'_k}(t) < x_{k,n_k+n'_k} + hI_{n_k>0},\ k \in J,\ k \ne i,$$

$$\xi_{i,1}(t) < x_{i,1},...,\xi_{i,n_i+n'_i+1}(t) < h\}p_{i,0} +$$

$$+\sum_{i=1}^{N} P\{z(t)=z+e_i-e'_i,\xi_{k,1}(t)<x_{k,1},...,hI_{n_k>0}\le\xi_{k,n_k+n'_k}(t)<x_{k,n_k+n'_k}+hI_{n_k>0},k\in J,k\ne i,$$

$$\xi_{i,1}(t) < x_{i,1},...,h \le \xi_{i,n_i+n'_i}(t) < x_{i,n_i+n'_i} + h\}\times(\upsilon_i h + o(h))I_{n'_i>0} +$$

$$+\sum_{i=1}^{N} P\{z(t)=z-e_i+e'_i,\xi_{k,1}(t)<x_{k,1},...,hI_{n_k>0}\le\xi_{k,n_k+n'_k}(t)<x_{k,n_k+n'_k}+hI_{n_k>0},k\in J,k\ne i,$$

$$\xi_{i,1}(t) < x_{i,1},...,hI_{n_i>1} \le \xi_{i,n_i+n'_i}(t) < x_{i,n_i+n'_i} + hI_{n_i>1}\}\times(\varphi_i h + o(h))I_{n_i>0} + o(h)\,.$$

Далее каждую вероятность, входящую в вышеприведенные уравнения, выразим через функции следующего вида:

$$F_t(z,x) = P\{z(t) = z,\ \xi_{i,1}(t) < x_{i,1},...,\xi_{i,n_i+n'_i}(t) < x_{i,n_i+n'_i},\ i \in J\}\,.$$

Рассматривая $F_t(z, x)$ как сложные функции от h и предполагая, что у них существуют частные производные первого порядка по переменным t и $x_{i,n_i+n'_i}$, $i\in J$, запишем разложения этих функций в ряд Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, с учетом того, что

$$P\{z(t) = z,\ \xi_{i,1}(t) < x_{i,1},...,h \le \xi_{i,n_i+n'_i}(t) < x_{i,n_i+n'_i} + h,\ i \in J\} =$$

$$= F_t(z,\ x_{i,1},...,x_{i,n_i+n'_i} + h,\ i \in J) - \sum_{k=1}^{N} F_t(z,\ x_{i,1},...,x_{i,n_i+n'_i} + h, \tag{17}$$

$$i \in J,\ i \ne k;\ x_{k,1},...,x_{k,n_k+n'_k-1}, h) + ... + F_t(z,\ x_{i,1},...,x_{i,n_i+n'_i-1}, h,\ i \in J)\,.$$

Очевидно, что те функции $F_t(z, x)$, у которых в качестве аргументов будет встречаться h не менее двух раз, при разложении в ряд Тейлора будут давать $o(h)$. Поэтому

$$P\{z(t) = z,\ \xi_{i,1}(t) < x_{i,1},...,h \le \xi_{i,n_i+n'_i}(t) < x_{i,n_i+n'_i} + h,\ i \in J\} =$$

$$= F_t(z,\ x_{i,1},...,x_{i,n_i+n'_i} + h,\ i \in J) + \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial F_t(z,\ x_{i,1},...,x_{i,n_i+n'_i},\ i \in J)}{\partial x_{i,n_i+n'_i}}h -$$

$$-\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial F_t(z,\ x_{l,1},...,x_{l,n_l+n'_l},\ l \in J,\ l \ne i,\ x_{i,1},...,x_{i,n_i+n'_i-1}, 0)}{\partial x_{i,n_i+n'_i}}h + o(h)\,. \tag{18}$$

Выражения вида $B_i(n_i + n'_i,\ x_{i,n_i+n'_i} + \theta)$ также раскладываем в ряд Тейлора как функцию переменной θ.

Устремляя t к бесконечности и учитывая, что в этом случае частная производная $F_t(z, x)$ по переменной t стремится к нулю, получаем следующую систему уравнений:

$$F(z,\ x) = F(z,\ x) + h\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial F(z,\ x)}{\partial x_{i,n_i+n'_i}} - \left(\frac{\partial F(z,\ x)}{\partial x_{i,n_i+n'_i}}\right)_{x_{i,n_i+n'_i}=0}\right)I_{n_i>0} -$$

$$-\left(\sum_{i=1}^{N}(\lambda_i + \upsilon_i I_{n_i>0} + \varphi_i I_{n'_i>0})h + o(h))\right)F(z,\ x) +$$

$$+\sum_{i=1}^{N} F(z-e_i, x) B_i(n_i+n'_i, x_{i,n_i+n'_i})(\lambda_i h+o(h)) I_{n_i>0}+$$

$$+h\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1, i\neq j}^{N} p_{j,i} B_i(n_i+n'_i, x_{i,n_i+n'_i})\left(\frac{\partial F(z+e_j-e_i, x)}{\partial x_{j,n_j+n'_j+1}}\right)_{x_{j,n_j+n'_j}=0} I_{n_i>0}+$$

$$+h\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial F(z+e_i, x)}{\partial x_{i,n_i+n'_i+1}}\right)_{x_{i,n_i+n'_i+1}=0} p_{i,0}+\sum_{i=1}^{N} F(z+e_i-e'_i, x)(\upsilon_i h+o(h)) I_{n'_i>0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N} F(z-e_i+e'_i, x)(\varphi_i h+o(h)) I_{n_i>0}+o(h). \tag{19}$$

Вычтем из обеих частей $F(z, x)$, после чего оставшуюся ненулевой правую часть разделим на h и устремим h к нулю. Таким образом, для $F(z, x)$ справедлива следующая система дифференциально-разностных уравнений:

$$F(z, x)\sum_{i=1}^{N}(\lambda_i+\upsilon_i I_{n_i>0}+\varphi_i I_{n'_i>0})=$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial F(z, x)}{\partial x_{i,n_i+n'_i}}-\left(\frac{\partial F(z, x)}{\partial x_{i,n_i+n'_i}}\right)_{x_{i,n_i+n'_i}=0}\right) I_{n_i>0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N} F(z-e_i, x) B_i(n_i+n'_i, x_{i,n_i+n'_i})\lambda_i I_{n_i>0}+$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1, i\neq j}^{N} p_{j,i} B_i(n_i+n'_i, x_{i,n_i+n'_i})\left(\frac{\partial F(z+e_j-e_i, x)}{\partial x_{j,n_j+n'_j+1}}\right)_{x_{j,n_j+n'_j}=0} I_{n_i>0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial F(z+e_i, x)}{\partial x_{i,n_i+n'_i+1}}\right)_{x_{i,n_i+n'_i+1}=0} p_{i,0}+\sum_{i=1}^{N} F(z+e_i-e'_i, x)\upsilon_i I_{n'_i>0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N} F(z-e_i+e'_i, x)\varphi_i I_{n_i>0}. \tag{20}$$

Разобьем эту систему уравнений на уравнения локального баланса следующим образом:

$$F(z, x)(\upsilon_i I_{n_i>0}+\varphi_i I_{n'_i>0})=F(z+e_i-e'_i, x)\upsilon_i I_{n'_i>0}+F(z-e_i+e'_i, x)\varphi_i I_{n_i>0}; \tag{21}$$

$$\left(\left(\frac{\partial F(z, x)}{\partial x_{i,n_i+n'_i}}\right)_{x_{i,n_i+n'_i}=0}-\frac{\partial F(z, x)}{\partial x_{i,n_i+n'_i}}\right) I_{n_i>0}=$$

$$=\sum_{j=1, j\neq i}^{N} p_{j,i} B_i(n_i+n'_i, x_{i,n_i+n'_i})\left(\frac{\partial F(z+e_j-e_i, x)}{\partial x_{j,n_j+n'_j+1}}\right)_{x_{j,n_j+n'_j}=0} I_{n_i>0}+$$

$$+F(z-e_i, x) B_i(n_i+n'_i, x_{i,n_i+n'_i})\lambda_i I_{n_i>0}; \tag{22}$$

$$\lambda_i F(z, x) = \left(\frac{\partial F(z+e_i, x)}{\partial x_{i,n_i+n'_i+1}} \right)_{x_{i,n_i+n'_i+1}=0} p_{i,0} \,. \tag{23}$$

Покажем, что функции распределения $F(z, x)$, определенные формулами (7) и (8), являются решением уравнений (21) – (23), а следовательно, и уравнений (20).

Если $n_i > 0$, то подставляя (7) и (8) в уравнение (22), приводя подобные слагаемые, деля обе части полученного соотношения на $F(z-e_i, x)B_i(n_i+n'_i, x_{i,n_i+n'_i})$, получим уравнение трафика (5). Если $n_i = 0$, то (22) превращается в тождество, $i\in J$. Подставляя (7) и (8) в (23) и деля обе части на $F(z, x)$, получим следствие уравнения трафика $\lambda_i = \varepsilon_i p_{i,0}$, $i\in J$. И, наконец, подставляя (7) и (8) в (21), получаем тождество.

Утверждение доказано.

Под $\{p(z),\ z\in Z\}$ будем понимать стационарное распределение вероятностей состояний процесса $z(t)$. Из теоремы с учетом равенства $p(z) = F(z,+\infty)$, $z\in Z$ вытекает следующее утверждение:

Следствие. При выполнении условий (1) и (2) процесс $z(t)$ эргодичен, а его стационарное распределение вероятностей состояний $\{p(z),\ z\in Z\}$ не зависит от функционального вида распределений $B_i(s, x)$, $i\in J$, и имеет вид

$$p((n_1, n'_1),...,(n_N, n'_N)) = p_1(n_1, n'_1)...p_N(n_N, n'_N)\,, \tag{24}$$

где $p_i(n_i, n_i')$ определяются по формулам (8).

Заключение

Исследовано стационарное функционирование открытой сети массового обслуживания с временно неактивными заявками. Предусматривалась возможность перехода заявки из обычного состояния в неактивное и обратно. Для случая произвольного распределения длительностей обслуживания заявок в узлах установлена инвариантность стационарного распределения состояний сети по отношению к функциональной форме распределений длительностей обслуживания при фиксированных первых моментах.

Результаты исследований могут иметь прикладное значение и использоваться при рассмотрении стационарного функционирования систем и сетей массового обслуживания, в которых заявки могут по некоторым причинам терять свои качественные характеристики и на некоторое время становиться непригодными для обслуживания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Tsitsiashvili G. Sh.*, *Osipova M. A.* Distributions in stochastic network models // Nova Publishers. 2008.
2. *Malinkovsky Y.*, *Bojarovich J.* An open queueing network with partly non-active customers // Queues: Flows, Systems, Networks: Proc. 21 International Conference “Modern Probbabilistic Methods for Analysis and Optimization of Information and Telecommunication Networks “. Minsk, 2011. No 21. P. 34–37.
3. *Малинковский Ю.В.*, *Боярович Ю.С.* Характеризация стационарного распределения сетей с групповыми перемещениями положительных и отрицательных заявок в форме произведения геометрических распределений // Вестник ГрГУ им. Я. Купалы. 2007. № 3(57). С. 39–43.
4. *Гнеденко Б.В.*, *Коваленко И.Н.* Введение в теорию массового обслуживания. М.: КомКнига, 2005.

5. *Ивницкий В.А.* Об условии инвариантности стационарных вероятностей для сетей массового обслуживания // Теория вероятностей и ее применения. 1982. Т. 27. № 1. С. 188–192.
6. *Старовойтов А.Н.* Инвариантность стационарного распределения состояний сетей с многорежимными стратегиями обслуживания // Проблемы передачи информации. 2006. Т. 42. № 4. С. 121–128.
7. *Севастьянов Б.А.* Предельная теорема для марковских процессов и ее приложение к телефонным системам с отказами // Теория вероятностей и ее применения. 1957. Т. 2. № 1. С. 106–116.

Малинковский Юрий Владимирович
Боярович Юлия Сигизмундовна
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
E-mail: Malinkovsky@gsu.by; juls1982@list.ru Поступила в редакцию 23 мая 2012 г.

Malinkovsky Yury V., *Bojarovich Julia S.* (Gomel State University). **Stationary distribution invariance of an open queueing network with temporarily non-active customers.**

Keywords: open queueing network, temporarily non-active customers, stationary distribution invariance.

This paper considers stationary functioning of an open queueing network with temporarily non-active customers. Systems set is $J=\{1,\ldots,N\}$. Non-active customers are located in a system queue and do not get service. Customers may turn from non-active state into state, when they may get their service and vice versa; $n_i(t)$, $n_i'(t)$ denote the numbers of ordinary and non-active customers at system $i\in J$ at time t accordingly. Service times are assumed to be independent random distributed values with distribution functions $B_i(n_i+n'_i, x_{i,n_i+n'_i})$ and mean values $1/\mu_i$, $i\in J$. Under conditions of ergodicity: $\varepsilon_i<\mu_i$, $\varepsilon_i\upsilon_i<\mu_i\varphi_i$, $i\in J$, process $z(t)=((n_1(t),n_1'(t)),\ldots,(n_N(t),n_N'(t)))$ has stationary distribution $\{p(z), z\in Z\}$, which may be founded by formulas:

$$p((n_1,n'_1),\ldots,(n_N,n'_N))=p_1(n_1,n'_1)\ldots p_N(n_N,n'_N),$$

where $p_i(n_i,n'_i)=\left(\frac{\varepsilon_i}{\mu_i}\right)^{n_i}\left(\frac{\varepsilon_i\upsilon_i}{\mu_i\varphi_i}\right)^{n'_i}$; here ε_i is an unique positive solution to the system of traffic equations, $i\in J$. Stationary distribution which is invariant to service time distribution is obtained.