

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 537.874.6

А.Г. Дмитренко, Е.П. Гольцварт

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО РАССЕЯНИЯ НА ДВУХ  
ТОНКИХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦИЛИНДРАХ

Методом вспомогательных источников в резонансной частотной области решена задача рассеяния электромагнитной волны на двух тонких параллельных диэлектрических цилиндрах. Приведены некоторые результаты численных расчетов сечений рассеяния рассматриваемой структуры.

**Ключевые слова:** электромагнитное рассеяние, диэлектрический цилиндр, метод вспомогательных источников, сечение рассеяния.

Задача рассеяния электромагнитной волны на тонких диэлектрических цилиндрах представляет интерес для исследователей, занимающихся решением таких проблем, как влияние диэлектрических объектов на характеристики антенн, снижение радиолокационной заметности и др. Чаще всего для решения подобных задач используется метод интегральных уравнений, которые затем решаются методом моментов с применением различного вида сеток. Такая техника является чрезвычайно громоздкой и является оправданной для объемных неоднородных диэлектрических тел. Для тонких рассеивателей представляется целесообразным применять более простые методы решения, изначально использующие специфику рассеивателей. В работе [1] для решения задачи рассеяния на одиночном диэлектрическом цилиндре предложен один из таких методов, являющийся вариантом метода вспомогательных источников. В этой же работе установлено, что предложенный метод применим для цилиндров радиусом  $k_e r_0 < 0,15$  при  $\varepsilon_i / \varepsilon_e < 20$ , где  $k_e$  – волновое число во внешней среде,  $r_0$  – радиус цилиндра,  $\varepsilon_i$  и  $\varepsilon_e$  – диэлектрические проницаемости материала цилиндра и внешней среды. В данной статье этот метод использован для решения задачи электромагнитного рассеяния на двух тонких параллельных диэлектрических цилиндрах.

## 1. Формулировка задачи

Геометрия задачи показана на рис. 1. Будем рассматривать стационарную задачу дифракции электромагнитного поля  $\{\vec{E}_0, \vec{H}_0\}$  на структуре, состоящей из двух прямолинейных параллельных диэлектрических цилиндров  $D_{i,1}$  и  $D_{i,2}$ , ограниченных поверхностями  $S_1$  и  $S_2$  (зависимость от времени выбрана в виде  $\exp(-i\omega t)$ ). Длины цилиндров –  $l_1$  и  $l_2$ , радиусы –  $r_1$  и  $r_2$ , а диэлектрические и магнитные проницаемости –  $\varepsilon_{i,1}$ ,  $\varepsilon_{i,2}$  и  $\mu_{i,1}$ ,  $\mu_{i,2}$ . Цилиндры размещены в однородной безграничной среде  $D_e$  с диэлектрической и магнитной проницаемостями

$\varepsilon_e$  и  $\mu_e$  в декартовой системе координат  $Oxyz$  с центром, выбранным в центре первого цилиндра, таким образом, что их осевые линии параллельны оси  $z$ , а центр второго цилиндра расположен на оси  $x$  в точке  $O'$  с координатой  $x = x_0$ . Требуется найти рассеянное поле  $\{\vec{E}_e, \vec{H}_e\}$  в области  $D_e$ .

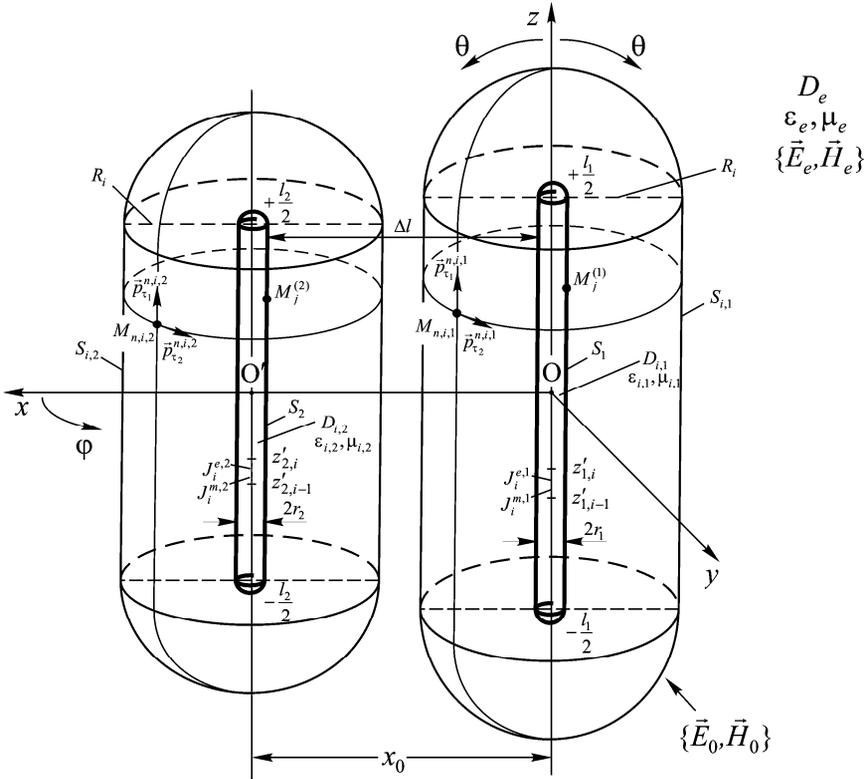


Рис. 1. Геометрия задачи

Математическая постановка задачи имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E}_e &= i\omega\mu_e \vec{H}_e \Big|_{D_e}, & \nabla \times \vec{E}_{i,1} &= i\omega\mu_{i,1} \vec{H}_{i,1} \Big|_{D_{i,1}}, & \nabla \times \vec{E}_{i,2} &= i\omega\mu_{i,2} \vec{H}_{i,2} \Big|_{D_{i,2}}, \\ \nabla \times \vec{H}_e &= -i\omega\varepsilon_e \vec{E}_e \Big|_{D_e}, & \nabla \times \vec{H}_{i,1} &= -i\omega\varepsilon_{i,1} \vec{E}_{i,1} \Big|_{D_{i,1}}, & \nabla \times \vec{H}_{i,2} &= -i\omega\varepsilon_{i,2} \vec{E}_{i,2} \Big|_{D_{i,2}}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \vec{n} \times (\vec{E}_{i,1} - \vec{E}_e) &= \vec{n} \times \vec{E}_0 \Big|_{S_1}, & \vec{n} \times (\vec{E}_{i,2} - \vec{E}_e) &= \vec{n} \times \vec{E}_0 \Big|_{S_2}, \\ \vec{n} \times (\vec{H}_{i,1} - \vec{H}_e) &= \vec{n} \times \vec{H}_0 \Big|_{S_1}, & \vec{n} \times (\vec{H}_{i,2} - \vec{H}_e) &= \vec{n} \times \vec{H}_0 \Big|_{S_2}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\{\sqrt{\varepsilon_e} \vec{E}_e; \sqrt{\mu_e} \vec{H}_e\} \times \vec{R}/R + \{\sqrt{\mu_e} \vec{H}_e; -\sqrt{\varepsilon_e} \vec{E}_e\} = O(R^{-1}), \quad R \rightarrow \infty, \quad (3)$$

где  $\vec{E}_e, \vec{H}_e$  – поле во внешней среде  $D_e$ ;  $\vec{E}_{i,1}, \vec{H}_{i,1}$  и  $\vec{E}_{i,2}, \vec{H}_{i,2}$  – поля внутри 1-го и 2-го диэлектрических цилиндров,  $\vec{n}$  – единичный вектор нормали к поверхности соответствующего цилиндра,  $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $\vec{a} \times \vec{b}$  – векторное произведение.

## 2. Модель рассеянного поля

Модель рассеянного поля строится следующим образом. Разместим внутри каждого цилиндра на его оси непрерывно распределенные вспомогательные электрический и магнитный токи;  $\vec{J}^{e,1}$  и  $\vec{J}^{e,2}$  – электрические токи соответственно на оси 1-го и 2-го цилиндров, а  $\vec{J}^{m,1}$  и  $\vec{J}^{m,2}$  – магнитные токи на оси 1-го и 2-го цилиндров. Представим неизвестное рассеянное поле  $\{\vec{E}_e, \vec{H}_e\}$  во внешней среде  $D_e$  в виде суммы полей введенных вспомогательных токов:

$$\begin{aligned}\vec{E}_e(M) &= \frac{i}{\omega \varepsilon_e} \nabla \times (\nabla \times (\vec{P}^{e,1} + \vec{P}^{e,2})) - \nabla \times (\vec{P}^{m,1} + \vec{P}^{m,2}), \\ \vec{H}_e(M) &= \nabla \times (\vec{P}^{e,1} + \vec{P}^{e,2}) + \frac{i}{\omega \mu_e} \nabla \times (\nabla \times (\vec{P}^{m,1} + \vec{P}^{m,2})), \\ \vec{P}^{e,1} &= \int_{-l_1/2}^{l_1/2} \Psi_e(M, M') \vec{J}^{e,1}(z') dz', \quad \vec{P}^{e,2} = \int_{-l_2/2}^{l_2/2} \Psi_e(M, M') \vec{J}^{e,2}(z') dz', \\ \vec{P}^{m,1} &= \int_{-l_1/2}^{l_1/2} \Psi_e(M, M') \vec{J}^{m,1}(z') dz', \quad \vec{P}^{m,2} = \int_{-l_2/2}^{l_2/2} \Psi_e(M, M') \vec{J}^{m,2}(z') dz'.\end{aligned}\tag{4}$$

В выражениях (4)  $\Psi_e(M, M') = \exp(ik_e R_{MM'}) / 4\pi R_{MM'}$ ;  $k_e = \omega(\varepsilon_e \mu_e)^{1/2}$ ;  $R_{MM'}$  – расстояние от точки  $M'$  на оси соответствующего цилиндра до точки наблюдения  $M$  в  $D_e$ ;  $\vec{J}^{e,1}$ ,  $\vec{J}^{e,2}$ ,  $\vec{J}^{m,1}$ ,  $\vec{J}^{m,2}$  – неизвестные осевые вспомогательные токи; интегрирование проводится вдоль оси соответствующего цилиндра.

Для представления полей  $\{\vec{E}_{i,1}, \vec{H}_{i,1}\}$ ,  $\{\vec{E}_{i,2}, \vec{H}_{i,2}\}$  внутри диэлектрических цилиндров введем вспомогательные поверхности  $S_{i,1}$  и  $S_{i,2}$  (рис. 1), охватывающие цилиндры. Поверхности  $S_{i,1}$  и  $S_{i,2}$  также представляют собой круговые цилиндры со сферически скругленными торцами; радиусы цилиндров одинаковы и равны  $R_i$ , длины вспомогательных цилиндров равны длинам соответствующих рассеивающих цилиндров  $l_1$  и  $l_2$ . Выберем на вспомогательных поверхностях  $S_{i,1}$  и  $S_{i,2}$  конечные совокупности точек  $\{M_{n,i,1}\}_{n=1}^{N_{i,1}}$  и  $\{M_{n,i,2}\}_{n=1}^{N_{i,2}}$ . В каждой из точек  $M_{n,i,1}$  разместим пару независимых вспомогательных электрических диполей с моментами  $\vec{p}_{\tau_1}^{n,i,1} = p_{\tau_1}^{n,i,1} \vec{e}_{\tau_1}^{n,i,1}$  и  $\vec{p}_{\tau_2}^{n,i,1} = p_{\tau_2}^{n,i,1} \vec{e}_{\tau_2}^{n,i,1}$ , а в каждой из точек  $M_{n,i,2}$  на  $S_{i,2}$  разместим пару вспомогательных электрических диполей с моментами  $\vec{p}_{\tau_1}^{n,i,2} = p_{\tau_1}^{n,i,2} \vec{e}_{\tau_1}^{n,i,2}$  и  $\vec{p}_{\tau_2}^{n,i,2} = p_{\tau_2}^{n,i,2} \vec{e}_{\tau_2}^{n,i,2}$ . Единичные векторы  $\vec{e}_{\tau_1}^{n,i,1}$  и  $\vec{e}_{\tau_2}^{n,i,1}$  выбраны в плоскости, касательной к  $S_{i,1}$  в точке  $M_{n,i,1}$ , а единичные векторы  $\vec{e}_{\tau_1}^{n,i,2}$  и  $\vec{e}_{\tau_2}^{n,i,2}$  – в плоскости, касательной к  $S_{i,2}$  в точке  $M_{n,i,2}$ ; вектор  $\vec{e}_{\tau_1}^{n,i,1}$  ( $\vec{e}_{\tau_1}^{n,i,2}$ ) расположен в сечении  $\varphi = \text{const}$ , проходящем через точку  $M_{n,i,1}$  ( $M_{n,i,2}$ ), а вектор  $\vec{e}_{\tau_2}^{n,i,1}$

( $\vec{e}_{\tau_2}^{n,i,2}$ ) выбран ортогональным вектору  $\vec{e}_{\tau_1}^{n,i,1}$  ( $\vec{e}_{\tau_1}^{n,i,2}$ ). Предполагается, что диполи, размещенные на  $S_{i,1}$ , излучают в однородную среду с параметрами  $\varepsilon_{i,1}$ ,  $\mu_{i,1}$ , а диполи, размещенные на  $S_{i,2}$ , излучают в однородную среду с параметрами  $\varepsilon_{i,2}$ ,  $\mu_{i,2}$ .

Представим неизвестное поле  $\{\vec{E}_{i,1}, \vec{H}_{i,1}\}$  внутри 1-го диэлектрического цилиндра в виде суммы полей вспомогательных электрических диполей, расположенных на вспомогательной поверхности  $S_{i,1}$ :

$$\begin{aligned}\vec{E}_{i,1}(M) &= \frac{i}{\omega\varepsilon_{i,1}} \sum_{n=1}^{N_{i,1}} \nabla \times (\nabla \times \vec{\Pi}_{n,i,1}), \quad \vec{H}_{i,1}(M) = \sum_{n=1}^{N_{i,1}} \nabla \times \vec{\Pi}_{n,i,1}, \\ \vec{\Pi}_{n,i,1} &= \Psi_{i,1}(M, M_{n,i,1}) \vec{p}_{\tau}^{n,i,1}, \\ \vec{p}_{\tau}^{n,i,1} &= p_{\tau_1}^{n,i,1} \vec{e}_{\tau_1}^{n,i,1} + p_{\tau_2}^{n,i,1} \vec{e}_{\tau_2}^{n,i,1}, \quad M \in D_{i,1}.\end{aligned}\quad (5)$$

В выражениях (5)  $\Psi_{i,1}(M, M_{n,i,1}) = \exp(ik_{i,1}R_{MM_{n,i,1}})/4\pi R_{MM_{n,i,1}}$ ;  $R_{MM_{n,i,1}}$  – расстояние от точки  $M_{n,i,1}$  на вспомогательной поверхности  $S_{i,1}$  до точки  $M$  в  $D_{i,1}$ ;  $k_{i,1} = \omega\sqrt{\varepsilon_{i,1}\mu_{i,1}}$ ;  $N_{i,1}$  – число точек размещения диполей на  $S_{i,1}$ ;  $p_{\tau_1}^{n,i,1}$ ,  $p_{\tau_2}^{n,i,1}$  ( $n = 1, 2, \dots, N_{i,1}$ ) – неизвестные дипольные моменты.

Аналогично представим неизвестное поле  $\{\vec{E}_{i,2}, \vec{H}_{i,2}\}$  внутри 2-го диэлектрического цилиндра в виде суммы полей вспомогательных электрических диполей, расположенных на вспомогательной поверхности  $S_{i,2}$ :

$$\begin{aligned}\vec{E}_{i,2}(M) &= \frac{i}{\omega\varepsilon_{i,2}} \sum_{n=1}^{N_{i,2}} \nabla \times (\nabla \times \vec{\Pi}_{n,i,2}), \quad \vec{H}_{i,2}(M) = \sum_{n=1}^{N_{i,2}} \nabla \times \vec{\Pi}_{n,i,2}, \\ \vec{\Pi}_{n,i,2} &= \Psi_{i,2}(M, M_{n,i,2}) \vec{p}_{\tau}^{n,i,2}, \\ \vec{p}_{\tau}^{n,i,2} &= p_{\tau_1}^{n,i,2} \vec{e}_{\tau_1}^{n,i,2} + p_{\tau_2}^{n,i,2} \vec{e}_{\tau_2}^{n,i,2}, \quad M \in D_{i,2},\end{aligned}\quad (6)$$

где  $\Psi_{i,2}(M, M_{n,i,2}) = \exp(ik_{i,2}R_{MM_{n,i,2}})/4\pi R_{MM_{n,i,2}}$ ;  $R_{MM_{n,i,2}}$  – расстояние от точки  $M_{n,i,2}$  на вспомогательной поверхности  $S_{i,2}$  до точки  $M$  в  $D_{i,2}$ ;  $k_{i,2} = \omega\sqrt{\varepsilon_{i,2}\mu_{i,2}}$ ;  $N_{i,2}$  – число точек размещения диполей на  $S_{i,2}$ ;  $p_{\tau_1}^{n,i,2}$ ,  $p_{\tau_2}^{n,i,2}$  ( $n = 1, 2, \dots, N_{i,2}$ ) – неизвестные дипольные моменты.

Представления (4) – (6) удовлетворяют уравнениям Максвелла (1) и условиям излучения (3). Для того чтобы удовлетворить граничным условиям (2), необходимо соответствующим образом выбрать значения дипольных моментов  $p_{\tau_1}^{n,i,1}$ ,  $p_{\tau_2}^{n,i,1}$  ( $n = 1, 2, \dots, N_{i,1}$ ),  $p_{\tau_1}^{n,i,2}$ ,  $p_{\tau_2}^{n,i,2}$  ( $n = 1, 2, \dots, N_{i,2}$ ) и распределения осевых токов  $\vec{J}^{e,1}$ ,  $\vec{J}^{e,2}$  и  $\vec{J}^{m,1}$ ,  $\vec{J}^{m,2}$ .

Введем кусочно-постоянную аппроксимацию осевых токов. Разобьем осевые линии 1-го и 2-го диэлектрических цилиндров соответственно на  $N_1$  и  $N_2$  малых участков, в пределах каждого из которых электрический и магнитный токи можно считать постоянными. Тогда с учетом того, что осевая линия направлена вдоль оси  $z$ , выражения для  $\vec{P}^{e,1}$ ,  $\vec{P}^{e,2}$  и  $\vec{P}^{m,1}$ ,  $\vec{P}^{m,2}$  в (4) приближенно можно записать в виде

$$\vec{P}^{e,1} = \left( \sum_{i=1}^{N_1} J_i^{e,1} \int_{z'_{i-1}}^{z'_{i,j}} \Psi_e(M, M') dz' \right) \vec{e}_z, \quad \vec{P}^{m,1} = \left( \sum_{i=1}^{N_1} J_i^{m,1} \int_{z'_{i-1}}^{z'_{i,j}} \Psi_e(M, M') dz' \right) \vec{e}_z, \quad (7)$$

$$\vec{P}^{e,2} = \left( \sum_{i=1}^{N_2} J_i^{e,2} \int_{z'_{i-1}}^{z'_{i,j}} \Psi_e(M, M') dz' \right) \vec{e}_z, \quad \vec{P}^{m,2} = \left( \sum_{i=1}^{N_2} J_i^{m,2} \int_{z'_{i-1}}^{z'_{i,j}} \Psi_e(M, M') dz' \right) \vec{e}_z. \quad (8)$$

В выражениях (7), (8)  $J_i^{e,1}$  и  $J_i^{m,1}$  – величины элементов электрического и магнитного токов на  $i$ -м участке осевой линии 1-го цилиндра,  $J_i^{e,2}$  и  $J_i^{m,2}$  – величины элементов электрического и магнитного токов на  $i$ -м участке осевой линии 2-го цилиндра,  $\vec{e}_z$  – единичный вектор, направленный вдоль оси  $z$ . Интегрирование в (7) проводится вдоль оси 1-го цилиндра, интегрирование в (8) – вдоль оси 2-го цилиндра;  $M'$  принадлежит интервалу  $[z'_{i-1}, z'_{i,j}]$  осевой линии соответствующего цилиндра. При таком подходе определение распределений осевых токов  $\vec{J}^{e,1}$  и  $\vec{J}^{m,1}$  сводится к нахождению  $N_1$  элементов этих токов, а определение распределений осевых токов  $\vec{J}^{e,2}$ ,  $\vec{J}^{m,2}$  – к нахождению  $N_2$  элементов этих токов.

Для определения величин дипольных моментов и элементов токов используем граничные условия (2), удовлетворяя им в соответствии с методом коллокаций. Пусть  $M_j^{(1)}$  ( $j=1, 2, \dots, L_1$ ) – точки коллокации на поверхности  $S_1$  1-го диэлектрического цилиндра, а  $M_j^{(2)}$  ( $j=1, 2, \dots, L_2$ ) – точки коллокации на поверхности  $S_2$  2-го диэлектрического цилиндра;  $L_1$  и  $L_2$  – числа точек коллокации соответственно на поверхностях 1-го и 2-го диэлектрических цилиндров. Тогда для нахождения неизвестных  $p_{\tau_1}^{n,i,1}$ ,  $p_{\tau_2}^{n,i,1}$  ( $n=1, 2, \dots, N_{i,1}$ ),  $p_{\tau_1}^{n,i,2}$ ,  $p_{\tau_2}^{n,i,2}$  ( $n=1, 2, \dots, N_{i,2}$ ),  $J_i^{e,1}$ ,  $J_i^{m,1}$  ( $i=1, 2, \dots, N_1$ ) и  $J_i^{e,2}$ ,  $J_i^{m,2}$  ( $i=1, 2, \dots, N_2$ ) получим следующую систему линейных алгебраических уравнений с комплексной матрицей размерностью  $(4L_1 + 4L_2) \times (2N_1 + 2N_2 + 2N_{i,1} + 2N_{i,2})$ :

$$\begin{aligned} \vec{n}^{j,1} \times (\vec{E}_{i,1}^{j,1} - \vec{E}_e^{j,1}) &= \vec{n}^{j,1} \times \vec{E}_0^{j,1}, \\ \vec{n}^{j,1} \times (\vec{H}_{i,1}^{j,1} - \vec{H}_e^{j,1}) &= \vec{n}^{j,1} \times \vec{H}_0^{j,1}, \quad j=1, 2, \dots, L_1, \\ \vec{n}^{j,2} \times (\vec{E}_{i,2}^{j,2} - \vec{E}_e^{j,2}) &= \vec{n}^{j,2} \times \vec{E}_0^{j,2}, \\ \vec{n}^{j,2} \times (\vec{H}_{i,2}^{j,2} - \vec{H}_e^{j,2}) &= \vec{n}^{j,2} \times \vec{H}_0^{j,2}, \quad j=1, 2, \dots, L_2, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\vec{n}^{j,1}$  – значение единичного вектора нормали в точке  $M_j^{(1)}$  на поверхности  $S_1$

первого диэлектрического цилиндра,  $\vec{n}^{j,2}$  – значение единичного вектора нормали в точке  $M_j^{(2)}$  на поверхности  $S_2$  второго диэлектрического цилиндра;  $\vec{E}_e^{j,1}$ ,  $\vec{H}_e^{j,1}$  и  $\vec{E}_{i,1}^{j,1}$ ,  $\vec{H}_{i,1}^{j,1}$  – значения компонент внешнего и внутреннего полей в точке  $M_j^{(1)}$  на поверхности  $S_1$ ;  $\vec{E}_e^{j,2}$ ,  $\vec{H}_e^{j,2}$  и  $\vec{E}_{i,2}^{j,2}$ ,  $\vec{H}_{i,2}^{j,2}$  – значения компонент внешнего и внутреннего полей в точке  $M_j^{(2)}$  на поверхности  $S_2$ ;  $\vec{E}_0^{j,1}$ ,  $\vec{H}_0^{j,1}$  и  $\vec{E}_0^{j,2}$ ,  $\vec{H}_0^{j,2}$  – значения компонент возбуждающего поля в точках коллокации  $M_j^{(1)}$  и  $M_j^{(2)}$  на поверхностях  $S_1$  и  $S_2$ .

Решение системы (9) определяем путем минимизации функции

$$\Phi = \sum_{j=1}^{L_1} \left\{ \left| \vec{n}^{j,1} \times (\vec{E}_{i,1}^{j,1} - \vec{E}_e^{j,1}) - \vec{n}^{j,1} \times \vec{E}_0^{j,1} \right|^2 + \frac{\mu_e}{\varepsilon_e} \left| \vec{n}^{j,1} \times (\vec{H}_{i,1}^{j,1} - \vec{H}_e^{j,1}) - \vec{n}^{j,1} \times \vec{H}_0^{j,1} \right|^2 \right\} + \sum_{j=1}^{L_2} \left\{ \left| \vec{n}^{j,2} \times (\vec{E}_{i,2}^{j,2} - \vec{E}_e^{j,2}) - \vec{n}^{j,2} \times \vec{E}_0^{j,2} \right|^2 + \frac{\mu_e}{\varepsilon_e} \left| \vec{n}^{j,2} \times (\vec{H}_{i,2}^{j,2} - \vec{H}_e^{j,2}) - \vec{n}^{j,2} \times \vec{H}_0^{j,2} \right|^2 \right\}. \quad (10)$$

После решения задачи минимизации (определения неизвестных дипольных моментов  $p_{\tau_1}^{n,i,1}$ ,  $p_{\tau_2}^{n,i,1}$  ( $n=1,2,\dots,N_{i,1}$ ),  $p_{\tau_1}^{n,i,2}$ ,  $p_{\tau_2}^{n,i,2}$  ( $n=1,2,\dots,N_{i,2}$ ), и элементов токов  $J_i^{e,1}$ ,  $J_i^{m,1}$  ( $i=1,2,\dots,N_1$ ),  $J_i^{e,2}$ ,  $J_i^{m,2}$  ( $i=1,2,\dots,N_2$ )) необходимые характеристики рассеянного поля определяются из (4). В частности, для компонент рассеянного поля в дальней зоне получаем

$$E_{e,\theta} = (\mu_e/\varepsilon_e)^{1/2} H_{e,\varphi} = \frac{\exp(ik_e R)}{R} D_\theta(\theta, \varphi) + O(R^{-2}), \quad (11)$$

$$E_{e,\varphi} = -(\mu_e/\varepsilon_e)^{1/2} H_{e,\theta} = \frac{\exp(ik_e R)}{R} D_\varphi(\theta, \varphi) + O(R^{-2}),$$

где компоненты диаграммы рассеяния  $D_\theta(\theta, \varphi)$  и  $D_\varphi(\theta, \varphi)$  определяются следующими выражениями:

$$D_\theta(\theta, \varphi) = -\frac{i\omega\mu_e}{4\pi} \sin\theta \left\{ \sum_{i=1}^{N_1} J_i^{e,1} \int_{z'_{1,i-1}}^{z'_{1,i}} e^{-ik_e z' \cos\theta} dz' + e^{-i\sin\theta \cos\varphi k_e x_0} \sum_{i=1}^{N_2} J_i^{e,2} \int_{z'_{2,i-1}}^{z'_{2,i}} e^{-ik_e z' \cos\theta} dz' \right\}, \quad (12)$$

$$D_\varphi(\theta, \varphi) = \frac{ik_e}{4\pi} \sin\theta \left\{ \sum_{i=1}^{N_1} J_i^{m,1} \int_{z'_{1,i-1}}^{z'_{1,i}} e^{-ik_e z' \cos\theta} dz' + e^{-i\sin\theta \cos\varphi k_e x_0} \sum_{i=1}^{N_2} J_i^{m,2} \int_{z'_{2,i-1}}^{z'_{2,i}} e^{-ik_e z' \cos\theta} dz' \right\}.$$

В выражениях (11), (12)  $R$ ,  $\theta$  и  $\varphi$  – сферические координаты точки наблюдения  $M$ .

### 3. Численные результаты

На основании изложенного выше решения рассматриваемой задачи создана компьютерная программа для расчета компонент рассеянного поля и контроля точности получаемых результатов. Входными величинами являются длины цилиндров  $k_e l_1$  и  $k_e l_2$ , радиусы цилиндров  $k_e r_1$  и  $k_e r_2$ , значения относительных диэлектрических проницаемостей  $\varepsilon_{i,1}/\varepsilon_e$  и  $\varepsilon_{i,2}/\varepsilon_e$  (предполагается, что  $\mu_{i,1}/\mu_e = 1$

и  $\mu_{i,2}/\mu_e = 1$ , т.е. цилиндры не обладают магнитными свойствами), расстояние  $x_0$  между осевыми линиями цилиндров, возбуждающее поле  $\{\vec{E}_0, \vec{H}_0\}$ , радиус вспомогательных поверхностей  $k_e R_i$ , числа точек размещения диполей на вспомогательных поверхностях  $N_{i,1}$  и  $N_{i,2}$ , числа участков разбиения осевых токов  $N_1$  и  $N_2$ , а также числа точек коллокации  $L_1$  и  $L_2$  на поверхностях  $S_1$  и  $S_2$  1-го и 2-го цилиндров. Отметим, что на диэлектрических цилиндрах точки коллокации размещаются только на их боковых поверхностях; на торцах точки коллокации не размещаются. Это означает, что мы пренебрегаем влиянием торцов на рассеянное поле.

Минимизацию функции (10) осуществляем методом сопряженных градиентов; итерационный процесс останавливаем при условии, если относительное изменение функции (10) на каждой из десяти последних итераций не превышает  $10^{-4}$ . При помощи данной программы выполнены исследования сечений рассеяния

$$\sigma(\theta, \varphi) = \lim_{R \rightarrow \infty} 4\pi R^2 \left[ |E_{e,\theta}(\theta, \varphi)|^2 + |E_{e,\varphi}(\theta, \varphi)|^2 \right] / |\vec{E}_0|^2 \quad (13)$$

двух близкорасположенных цилиндров различной длины, характеризующихся различными значениями относительной диэлектрической проницаемости, при различных углах падения плоской волны. Во всех вычислительных экспериментах предполагалось, что цилиндры возбуждаются плоской волной единичной амплитуды, падающей на них таким образом, что векторы  $\vec{k}_e$  и  $\vec{E}_0$  лежат в плоскости  $xz$ , причем вектор  $\vec{k}_e$  составляет некоторый угол  $\psi$  с осью  $z$ .

Некоторые из полученных результатов представлены на рис. 2 – 5.

На рис. 2, 3 представлены бистатические сечения рассеяния в  $E$ -плоскости двух параллельных цилиндров длиной  $k_e l_1 = k_e l_2 = 11.32$  и радиусами  $k_e r_1 = k_e r_2 = 0,1$ , расположенных на расстоянии  $\Delta l = 0,1\lambda$  друг от друга, характеризующихся различными значениями относительной диэлектрической проницаемости при угле падения  $\psi$  плоской волны равном  $90^\circ$  (вектор  $\vec{k}_e$  направлен вдоль оси  $x$ , вектор  $\vec{E}_0$  – вдоль оси  $z$ ). Рис. 2 относится к случаю, когда относительные диэлектрические проницаемости цилиндров равны 10 ( $\epsilon_{i,1}/\epsilon_e = \epsilon_{i,2}/\epsilon_e = 10$ ); рис. 3 – когда относительные диэлектрические проницаемости цилиндров равны 20 ( $\epsilon_{i,1}/\epsilon_e = \epsilon_{i,2}/\epsilon_e = 20$ ). При выбранном способе возбуждения цилиндров в сферической системе координат  $E$ -плоскость состоит из двух полуплоскостей:  $\varphi = 0^\circ$  и  $\varphi = 180^\circ$ . Кривые 1 на рис. 2, 3 – это бистатические сечения одиночного цилиндра; кривые 2 – бистатические сечения рассеяния двух цилиндров. По оси абсцисс отложен угол  $\theta$ , по оси ординат – нормированное на квадрат длины волны сечение рассеяния (13). При получении этих результатов выбраны следующие параметры метода. Радиус  $k_e R_i$  вспомогательных поверхностей выбран равным 2. Количество точек размещения диполей на каждой из вспомогательных поверхностей выбрано равным 260. Эти точки размещены как на цилиндрической части вспомогательной поверхности (60 точек), так и на её сферических скруглениях (100 точек на каждом скруглении).

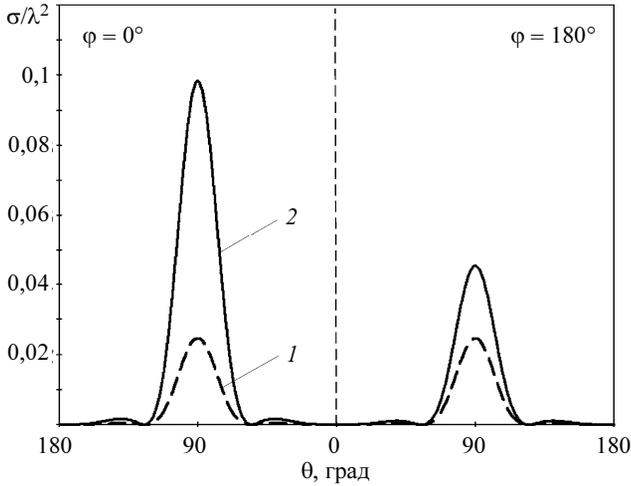


Рис. 2. Бистатические сечения рассеяния в Е-плоскости одиночного и двух параллельных цилиндров длиной  $k_e l_1 = k_e l_2 = 11,32$ , характеризующихся диэлектрическими проницаемостями  $\varepsilon_{i,1}/\varepsilon_e = \varepsilon_{i,2}/\varepsilon_e = 10$

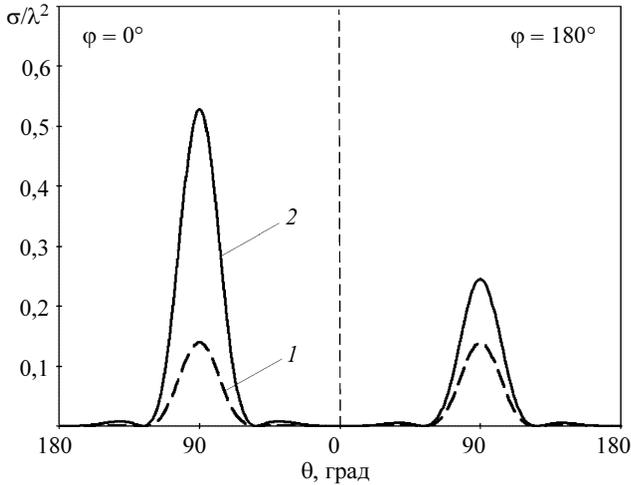


Рис. 3. Бистатические сечения рассеяния в Е-плоскости одиночного и двух параллельных цилиндров длиной  $k_e l_1 = k_e l_2 = 11,32$ , характеризующихся диэлектрическими проницаемостями  $\varepsilon_{i,1}/\varepsilon_e = \varepsilon_{i,2}/\varepsilon_e = 20$

Распределены эти точки следующим образом. Цилиндрическая часть рассечена на 10 сечениями  $z = \text{const}$ , отстоящими друг от друга на одинаковые расстояния  $\Delta z$ , и в каждом сечении равномерно по азимутальному углу  $\varphi$  распределено 6 точек размещения диполей. На каждом из сферических скруглений в каждом из 10 полусечений  $\varphi = \text{const}$ , отстоящих одно от другого на угловое расстояние  $\Delta\varphi = 36^\circ$ , равномерно по углу  $\theta$  выбраны 10 точек размещения диполей. Линии

тока (осевые линии диэлектрических цилиндров) разбиты на 30 участков ( $N_1 = N_2 = 30$ ). Число поперечных сечений  $z = \text{const}$ , в которых размещены точки коллокации на поверхности каждого из диэлектрических цилиндров, выбрано также равным 30. Эти сечения проведены посередине каждого из участков разбиения осевой линии, в каждом сечении расположены четыре точки коллокации равномерно по азимутальному углу. Вышеуказанные параметры метода выбраны на основе имеющегося у авторов опыта использования метода вспомогательных источников для решения задач рассеяния на тонком одиночном диэлектрическом цилиндре [1].

Как показывают рис. 2, 3, в случае двух цилиндров (кривые 2), диаграмма рассеяния становится несимметричной относительно оси  $z$ , причем в направлении падения волны (направление  $\theta = 90^\circ$  при  $\varphi = 0^\circ$ ) рассеивается значительно большая часть энергии, чем в обратном направлении (направление  $\theta = 90^\circ$  при  $\varphi = 180^\circ$ ).

На рис. 4 представлена зависимость сечения обратного рассеяния от длины цилиндров для различных значений их диэлектрических проницаемостей. Предполагается, что оба цилиндра имеют одинаковые радиусы:  $k_e r_1 = k_e r_2 = 0,1$  и одинаковые значения относительных диэлектрических проницаемостей. Расстояние между поверхностями цилиндров  $k_e \Delta l = 0,0628$  ( $\Delta l = 0,01\lambda$ ); угол падения  $\psi$  плоской волны равен  $90^\circ$  (вектор  $\vec{E}_0$  ориентирован вдоль осей цилиндров). По оси абсцисс отложена длина цилиндров  $k_e l_1 = k_e l_2 = k_e l$ , по оси ординат – нормированное на квадрат длины волны сечение обратного рассеяния. Кривая 1 относится к случаю, когда относительные диэлектрические проницаемости цилиндров равны 4, кривая 2 – когда они равны 10, и кривая 3 – когда они равны 20. При этих расчетах параметры метода выбраны такими же, как и в предыдущем случае. Как показывает рисунок, рассматриваемые зависимости не являются линейными.

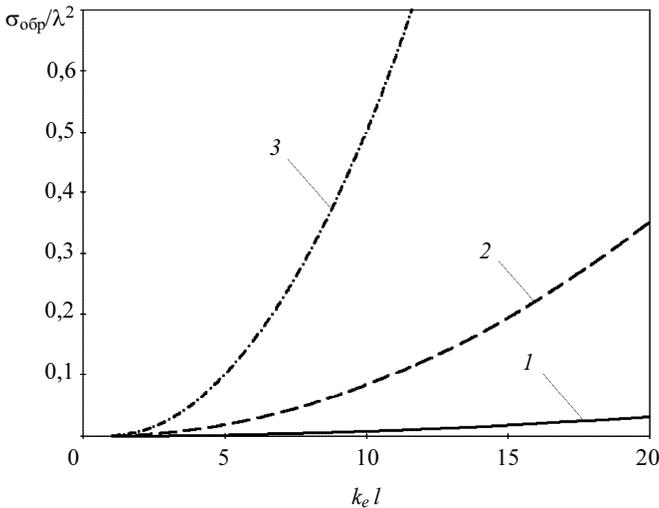


Рис. 4. Зависимость сечения обратного рассеяния от длины цилиндров

На рис. 5 приведены зависимости сечений обратного рассеяния от угла  $\psi$  падения плоской волны для одного и двух параллельных цилиндров. Цилиндры имеют одинаковую длину  $k_e l$  равную 11,32, одинаковый радиус  $k_e r$  равный 0,1, и предполагаются немагнитными. В случае двух цилиндров расстояние между ними  $k_e \Delta l = 0,628$  ( $\Delta l = 0,1\lambda$ ). По оси абсцисс отложен угол падения плоской волны  $\psi$ , по оси ординат – нормированное на квадрат длины волны сечение обратного рассеяния. Кривая 1 относится к двум цилиндрам с относительной диэлектрической проницаемостью равной 10; кривая 2 – к одиночному цилиндру с такой же диэлектрической проницаемостью; кривая 3 – к двум цилиндрам с относительной диэлектрической проницаемостью равной 20; кривая 4 – к одиночному цилиндру с такой же проницаемостью. При этих расчетах параметры метода выбраны такими же, как в предыдущих случаях. Как видно из рисунка, качественный вид исследуемых зависимостей различен для одного и двух близкорасположенных цилиндров с одинаковыми параметрами. При углах падения, близких к  $90^\circ$ , во всех рассмотренных случаях сечение обратного рассеяния двух цилиндров существенно больше сечения обратного рассеяния одиночного цилиндра. Однако существуют интервалы углов, для которых сечение обратного рассеяния одиночного цилиндра больше сечения рассеяния двух цилиндров. Например, для цилиндров с диэлектрической проницаемостью равной 20 в интервале углов  $65^\circ < \psi < 80^\circ$  сечение обратного рассеяния одиночного цилиндра больше сечения рассеяния двух таких же параллельных цилиндров.

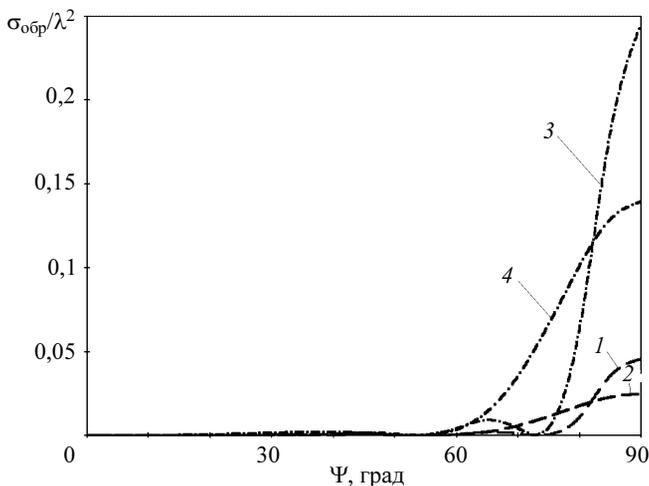


Рис. 5. Зависимость сечения обратного рассеяния от угла падения плоской волны для одного и двух параллельных цилиндров

### Заключение

Таким образом, в данной работе методом вспомогательных источников построен численный алгоритм решения задачи рассеяния электромагнитной волны на двух тонких параллельных диэлектрических цилиндрах. Алгоритм реализован как компьютерная программа для расчета компонент рассеянного поля. Приведены результаты численных расчетов бистатистических сечений рассеяния, а также се-

чений обратного рассеяния цилиндров различной длины, характеризующихся различными значениями относительной диэлектрической проницаемости.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Дмитренко А.Г., Гольцварт Е.П.* Решение задачи электромагнитного рассеяния на тонком диэлектрическом цилиндре методом вспомогательных источников // Радиотехника и электроника. 2011. Т. 56. № 5. С. 600–607.

*Дмитриенко Анатолий Григорьевич*

*Гольцварт Евгений Павлович*

Томский государственный университет

E-mail: dmitr@fpmk.tsu.ru; gep@sibmail.com

Поступила в редакцию 30 ноября 2011 г.

*Dmitrenko Anatoly G., Goltsvart Evgeny P.* (Tomsk State University). **Simulating of electromagnetic scattering by two thin parallel dielectric cylinders.**

Keywords: electromagnetic scattering, dielectric cylinder, auxiliary sources method, scattering cross-section.

The problem of electromagnetic scattering by two thin parallel dielectric cylinders is solved in the resonance frequency range by means of the auxiliary sources method. The gist of the used method is the following. The unknown scattered field in the exterior medium is represented through the fields of electric- and magnetic- current filaments located on the axis of the cylinders and the fields in the interior of the cylinders are represented through the fields of auxiliary electric dipoles located on the auxiliary surfaces similar to the surfaces of the cylinders. To find the unknown electric- and magnetic- current distributions along the axes and the unknown dipole moments of auxiliary dipoles we use the boundary conditions on the surfaces of the dielectric cylinders which are satisfied according to the collocation method. Based on the method described above we developed a computer code for calculating the scattered – field components. We present some results of scattering cross-section calculations for cylinders of different length for different angles of plane wave incidence.