

УДК 519.872

К.А. Крысанова, С.П. Моисеева**МЕТОД АСИМПТОТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА
ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ
КРАТНЫХ ЗАЯВОК ПОТОКА МАРКОВСКОГО ВОССТАНОВЛЕНИЯ**

Построена модель обслуживания кратных заявок в системе массового обслуживания, состоящей из двух блоков обслуживания с неограниченным числом обслуживающих приборов. На вход системы поступает поток марковского восстановления сдвоенных заявок, заявок 1-го и 2-го типов.

Ключевые слова: кратные заявки, поток марковского восстановления сдвоенных заявок, асимптотический анализ.

На современном этапе развития теории массового обслуживания одним из востребованных направлений является исследование систем массового обслуживания (СМО) с групповым поступлением заявок и параллельным обслуживанием [1–3]. Область применения таких систем довольно обширна, например, при моделировании современных информационно-вычислительных систем необходимо учитывать пакетный характер трафика, а также один из основных принципов при проектировании современных компьютерных сетей – параллельность процессов обработки информации [4, 5]. Поэтому возникает необходимость в разработке новых математических моделей систем массового обслуживания, а именно, систем с неординарными входящими потоками и различными вариантами обслуживания, в том числе с двумя и более блоками обслуживания.

Исследованию однолинейных систем массового обслуживания с неординарными входящими потоками (пуассоновским и рекуррентным) посвящены работы Бочарова П.П., Печинкина А.В. и других российских учёных [6–9], в которых рассматриваются системы массового обслуживания с марковским неординарным входящим потоком, несколькими типами заявок, обобщённой дисциплиной преимущественного разделения прибора заявками с минимальной обслуженной длиной, марковским обслуживанием и накопителем бесконечной ёмкости. Но, как правило, в данных работах все заявки в группе являлись однотипными, и время их обслуживания было одинаково распределённым, что не всегда применимо для описания реальных вычислительных процессов.

Вышесказанное подтверждает, что построение и анализ новых математических моделей с параллельно функционирующими блоками обслуживания и общими входящими потоками имеет большое практическое значение.

Исследование подобных систем с двумерным пуассоновским потоком приводится в статье [10], однако, предлагаемый авторами метод довольно сложен и неприменим для исследования аналогичных систем с произвольным временем обслуживания или непуассоновским входящим потоком.

В настоящей работе проводится исследование модели параллельного обслуживания кратных заявок потока марковского восстановления методом асимптотического анализа [11], который позволяет найти основные характеристики системы при выполнении некоторого предельного условия, например растущего времени обслуживания.

1. Математическая модель параллельного обслуживаниям сдвоенных заявок потока марковского восстановления

В качестве математической модели параллельного обслуживания кратных заявок рассмотрим систему массового обслуживания (СМО) с входящим потоком марковского восстановления $(MR^{(2)}|M_2|\infty)$ и двумя блоками обслуживания, каждый из которых содержит неограниченное число приборов (рис. 1). На вход системы поступает поток марковского восстановления сдвоенных заявок, заданный набором функций распределения длин интервалов $A_1(x)$, $A_2(x)$, $\dots$, $A_k(x)$ и матрицей переходных вероятностей P – вложенной по моментам наступления событий цепи Маркова $k(t)$ [5]. Продолжительности обслуживания различных заявок стохастически независимы, одинаково распределены в каждом блоке и имеют экспоненциальное распределение с параметрами μ_1 и μ_2 соответственно. Поступившая заявка занимает любой из свободных приборов, завершив обслуживание, заявка покидает систему.

Ставится задача исследования двумерного процесса, характеризующего число заявок в каждом блоке.

Обозначим i_s – число заявок в s -м блоке обслуживания, $s=1,2$. Так как входящий поток непугассоновский, то двумерный процесс $\{i_1(t), i_2(t)\}$, не является марковским. Для его марковизации применим метод дополнительных переменных. Пусть $z(t)$ – длина интервала от момента времени t до момента наступления очередного события во входящем MR-потоке, а процесс $k(t)$ – вложенная по моментам наступления событий цепь Маркова. Определенный таким образом четырехмерный процесс $\{k(t), z(t), i_1(t), i_2(t)\}$ является марковским с непрерывным временем.

Определим вероятности

$$P(k, z, i_1, i_2, t) = P\{k(t) = k, z(t) < z, i_1(t) = i_1, i_2(t) = i_2\}.$$

Для распределения $P(k, z, i_1, i_2, t)$ Δt -методом запишем равенства

$$\begin{aligned} P(k, z - \Delta t, i_1, i_2, t + \Delta t) = & \{P(k, z, i_1, i_2, t) - P(k, \Delta t, i_1, i_2, t)\}(1 - i_1\mu_1\Delta t)(1 - i_2\mu_2\Delta t) + \\ & + \sum_v P(v, \Delta t, i_1 - 1, i_2 - 1, t)P_{vk}A_k(z) + P(k, z, i_1 + 1, i_2, t)(i_1 + 1)\mu_1\Delta t + \\ & + P(k, z, i_1, i_2 + 1, t)(i_2 + 1)\mu_2\Delta t + o(\Delta t), \end{aligned}$$

из которых получим систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(k, z, i_1, i_2, t)}{\partial t} = & \frac{\partial P(k, z, i_1, i_2, t)}{\partial z} - \frac{\partial P(k, 0, i_1, i_2, t)}{\partial z} - P(k, z, i_1, i_2, t)i_1\mu_1 - P(k, z, i_1, i_2, t)i_2\mu_2 + \\ & + P(k, z, i_1 + 1, i_2, t)(i_1 + 1)\mu_1 + P(k, z, i_1, i_2 + 1, t)(i_2 + 1)\mu_2 + \sum_v \frac{\partial P(v, 0, i_1 - 1, i_2 - 1, t)}{\partial z} P_{vk}A_k(z). \end{aligned}$$

Для стационарного распределения вероятностей эту систему перепишем в виде

$$\frac{\partial \Pi(k, z, i_1, i_2)}{\partial z} - \frac{\partial \Pi(k, 0, i_1, i_2)}{\partial z} - \Pi(k, z, i_1, i_2)i_1\mu_1 - \Pi(k, z, i_1, i_2)i_2\mu_2 +$$

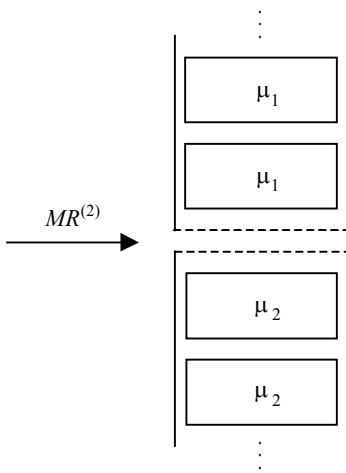


Рис. 1. СМО с параллельным обслуживанием кратных заявок $MR^{(2)}|M_2|\infty$

$$+ \Pi(k, z, i_1 + 1, i_2)(i_1 + 1)\mu_1 + \Pi(k, z, i_1, i_2 + 1)(i_2 + 1)\mu_2 + \sum_v \frac{\partial \Pi(v, 0, i_1 - 1, i_2 - 1)}{\partial z} P_{vk} A_k(z) = 0.$$

Обозначая

$$H(k, z, u_1, u_2) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} e^{ju_1 i_1} e^{ju_2 i_2} \Pi(k, z, i_1, i_2) \quad (1)$$

и принимая во внимание, что

$$\frac{\partial H(k, z, u_1, u_2)}{\partial u_1} = j \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} i_1 e^{ju_1 i_1} e^{ju_2 i_2} \Pi(k, z, i_1, i_2),$$

$$\frac{\partial H(k, z, u_1, u_2)}{\partial u_2} = j \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} i_2 e^{ju_1 i_1} e^{ju_2 i_2} \Pi(k, z, i_1, i_2),$$

для функций $H(k, z, u_1, u_2)$ получаем систему дифференциальных уравнений в частных производных

$$\begin{aligned} & \frac{\partial H(k, z, u_1, u_2)}{\partial z} - \frac{\partial H(k, 0, u_1, u_2)}{\partial z} + j\mu_1 (1 - e^{-ju_1}) \frac{\partial H(k, z, u_1, u_2)}{\partial u_1} + \\ & + j\mu_2 (1 - e^{-ju_2}) \frac{\partial H(k, z, u_1, u_2)}{\partial u_2} + e^{j(u_1+u_2)} \sum_v \frac{\partial H(v, 0, u_1, u_2)}{\partial z} P_{vk} A_k(z) = 0. \end{aligned}$$

Обозначив $H(z, u_1, u_2) = \{H(1, z, u_1, u_2), H(2, z, u_1, u_2) \dots\}$,

$$D(z) = \begin{pmatrix} A_1(z) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & A_k(z) \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} p_{11} & \dots & p_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{k1} & \dots & p_{kk} \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

получим основное уравнение для исследования системы $MR^{(2)}|M_2|_{\infty}$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial H(z, u_1, u_2)}{\partial z} + \frac{\partial H(0, u_1, u_2)}{\partial z} \{e^{j(u_1+u_2)} PD(z) - I\} + j\mu_1 (1 - e^{-ju_1}) \frac{\partial H(z, u_1, u_2)}{\partial u_1} + \\ & + j\mu_2 (1 - e^{-ju_2}) \frac{\partial H(z, u_1, u_2)}{\partial u_2} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Решение $H(z, u_1, u_2)$ дифференциально-матричного уравнения, удовлетворяющее условию

$$H(z, 0, 0) = R(z),$$

определяет характеристические функции числа занятых приборов в каждом блоке, занятых в стационарном режиме в системе $MR^{(2)}|M_2|_{\infty}$, равенствами

$$h(u_1) = M e^{ju_1 i_1(t)} = H(\infty, u_1, 0) E,$$

$$h(u_2) = M e^{ju_2 i_2(t)} = H(\infty, 0, u_2) E.$$

Здесь $R(z)$ – вектор-функция стационарного распределения вероятностей значений двумерного марковского процесса $\{k(t), z(t)\}$.

Следует отметить, что получить аналитическое решение уравнения (2) не удастся, поэтому в данной статье предлагается решать это уравнение методом асимптотического анализа в условиях растущего времени обслуживания в каждом блоке.

2. Асимптотика первого порядка

Рассмотрим основное уравнение для характеристической функции (2), которое будем решать, полагая, что $b_1, b_2 \rightarrow \infty$, тогда $\mu_1 = \frac{1}{b_1}, \mu_2 = \frac{1}{b_2}$, то есть $\mu_1, \mu_2 \rightarrow 0$.

Обозначим $\mu_1 = \varepsilon, \mu_2 = q\varepsilon$ и в уравнении (2) выполним замены

$$u_1 = \varepsilon w_1, \quad u_2 = \varepsilon q w_2, \quad H(z, u_1, u_2) = F_1(z, w_1, w_2, \varepsilon),$$

в результате чего получаем уравнение для $F_1(z, w_1, w_2, \varepsilon)$ вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1(z, w_1, w_2, \varepsilon)}{\partial z} + \frac{\partial F_1(0, w_1, w_2, \varepsilon)}{\partial z} \left(e^{j\varepsilon(w_1 + w_2)} PD(z) - I \right) - j \left(e^{-j\varepsilon w_1} - 1 \right) \frac{\partial F_1(z, w_1, w_2, \varepsilon)}{\partial w_1} - \\ - j \left(e^{-j\varepsilon w_2} - 1 \right) \frac{\partial F_1(z, w_1, w_2, \varepsilon)}{\partial w_2} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Теорема. Предельное (при $\varepsilon \rightarrow 0$) значение $F_1(z, w_1, w_2)$ решения $F_1(z, w_1, w_2, \varepsilon)$ уравнения (3) имеет вид

$$F_1(z, w_1, w_2) = R(z) \exp \{ j(w_1 + w_2) \lambda \},$$

где $R(z)$ – стационарное распределение вероятностей значений случайного процесса $\{z(t)\}$, параметр λ определяется выражением

$$\frac{\partial R(0)}{\partial z} E = \lambda.$$

Доказательство. В уравнении (3) выполним предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим, что $F_1(z, w_1, w_2)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial F_1(z, w_1, w_2)}{\partial z} + \frac{\partial F_1(0, w_1, w_2)}{\partial z} \{ PD(z) - I \} = 0.$$

Так как вектор-функцию $R(z)$, характеризующая стационарное распределение длин интервалов MR-потока, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial R(0)}{\partial z} \Phi_1(w_1, w_2) (e^{j\varepsilon(w_1 + w_2)} P - I) E - j(e^{-j\varepsilon w_1} - 1) R(z) \frac{\partial \Phi}{\partial w_1} E - j(e^{-j\varepsilon w_2} - 1) R(z) \frac{\partial \Phi}{\partial w_2} E = 0,$$

то вектор-функция

$$F_1(z, w_1, w_2) = R(z) \Phi_1(w_1, w_2). \quad (4)$$

Скалярную функцию $\Phi_1(w_1, w_2)$ определим следующим образом. В уравнении (3) выполним предельный переход при $z \rightarrow \infty$, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1(0, w_1, w_2, \varepsilon)}{\partial z} \left(e^{j\varepsilon(w_1 + w_2)} P - I \right) - j \left(e^{-j\varepsilon w_1} - 1 \right) \frac{\partial F_1(\infty, w_1, w_2, \varepsilon)}{\partial w_1} - \\ - j \left(e^{-j\varepsilon w_2} - 1 \right) \frac{\partial F_1(\infty, w_1, w_2, \varepsilon)}{\partial w_2} = 0. \end{aligned}$$

Поделив левую и правую части на ε и выполнив предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим систему уравнений

$$\frac{\partial F_1(0, w_1, w_2)}{\partial z} j(w_1 + w_2) + j^2 w_1 \frac{\partial F_1(\infty, w_1, w_2)}{\partial w_1} + j^2 w_2 \frac{\partial F_1(\infty, w_1, w_2)}{\partial w_2} = 0,$$

подставляя в которое (4) и просуммировав уравнения, получаем дифференциальное уравнение в частных производных вида

$$\frac{\partial \Phi_1(w_1, w_2)}{\partial w_1} + j^2 w_2 \frac{\partial \Phi_1(w_1, w_2)}{\partial w_2} = j(w_1 + w_2) \frac{\partial R(0)}{\partial z} E \Phi_1(w_1, w_2) = j(w_1 + w_2) \lambda \Phi_1(w_1, w_2),$$

решение которого, удовлетворяющее начальному условию $\Phi_1(0, 0) = 1$, имеет вид

$$\Phi_1(w_1, w_2) = \exp\{j\lambda(w_1 + w_2)\}.$$

Получаем

$$F_1(z, w_1, w_2) = R(z) \exp\{j\lambda(w_1 + w_2)\},$$

что и требовалось доказать.

В силу замены (7) и равенства (9) можно записать приближённое (асимптотическое) равенство

$$H(z, u_1, u_2) = R(z) \exp\left\{j\lambda\left(\frac{u_1}{\varepsilon} + \frac{u_2}{q\varepsilon}\right)\right\} = R(z) \exp\left\{j\lambda\left(\frac{u_1}{\mu_1} + \frac{u_2}{\mu_2}\right)\right\},$$

из которого для характеристической функции процесса $\{i_1(t), i_2(t)\}$ в стационарном режиме получим

$$Me^{ju_1 i_1(t)} = H(\infty, u_1, 0)E = \exp\left\{ju_1 \frac{\lambda}{\mu_1}\right\},$$

$$Me^{ju_2 i_2(t)} = H(\infty, 0, u_2)E = \exp\left\{ju_2 \frac{\lambda}{\mu_2}\right\}.$$

Полученные равенства будем называть асимптотикой первого порядка для блоков обслуживания системы $MR^{(2)}|M_2|_\infty$.

Для более детального исследования рассмотрим асимптотику второго порядка.

3. Асимптотика второго порядка

В уравнении (3) выполним замену

$$H(z, u_1, u_2) = H_2(z, u_1, u_2) \exp\left\{j\lambda\left(\frac{u_1}{\mu_1} + \frac{u_2}{\mu_2}\right)\right\},$$

получим уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{\partial H_2(z, u_1, u_2)}{\partial z} \exp\left\{j\lambda\left(\frac{u_1}{\mu_1} + \frac{u_2}{\mu_2}\right)\right\} + \\ & + \frac{\partial H_2(0, u_1, u_2)}{\partial u_1} \exp\left\{j\lambda\left(\frac{u_1}{\mu_1} + \frac{u_2 q}{\mu_2}\right)\right\} (\exp\{j(u_1 + u_2 q)\} PD(z) - I) - j\mu_1 (e^{-ju_1} - 1) \times \\ & \times \left[\frac{\partial H_2(z, u_1, u_2)}{\partial u_1} \exp\left\{j\lambda\left(\frac{u_1}{\mu_1} + \frac{u_2}{\mu_2}\right)\right\} + H_2(z, u_1, u_2) \exp\left\{j\lambda\left(\frac{u_1}{\mu_1} + \frac{u_2}{\mu_2}\right)\right\} j \frac{\lambda}{\mu_1} \right] - \\ & - j\mu_2 (e^{-ju_2} - 1) \left[\frac{\partial H_2(z, u_1, u_2)}{\partial u_2} \exp\left\{j\lambda\left(\frac{u_1}{\mu_1} + \frac{u_2 q}{\mu_2}\right)\right\} + \right. \\ & \left. + H_2(z, u_1, u_2) \exp\left\{j\lambda\left(\frac{u_1}{\mu_1} + \frac{u_2 q}{\mu_2}\right)\right\} j \frac{\lambda}{\mu_2} \right] = 0, \end{aligned}$$

которое перепишем в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial H_2(z, u_1, u_2)}{\partial z} + \frac{\partial H_2(0, u_1, u_2)}{\partial z} (\exp\{j(u_1 + u_2)\} PD(z) - I) + j\mu_1 (1 - e^{-ju_1}) \frac{\partial H_2(z, u_1, u_2)}{\partial u_1} + \\ & + j\mu_2 (1 - e^{-ju_2}) \frac{\partial H_2(z, u_1, u_2)}{\partial u_2} - \lambda (1 - e^{-ju_1}) H_2(z, u_1, u_2) - \lambda (1 - e^{-ju_2}) H_2(z, u_1, u_2) = 0. \end{aligned}$$

Обозначив $\mu_1 = \varepsilon^2$, $\mu_2 = \varepsilon^2$, в последнем уравнении выполним замены

$$u_1 = \varepsilon w_1, \quad u_2 = \varepsilon w_2, \quad H_2(z, u_1, u_2) = F_2(z, w_1, w_2, \varepsilon),$$

получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial F_2(z, w_1, w_2, \varepsilon)}{\partial z} + \frac{\partial F_2(0, w_1, w_2, \varepsilon)}{\partial z} (e^{j\varepsilon(w_1 + w_2)} PD(z) - I) + \\ & + j\varepsilon (1 - e^{-j\varepsilon w_1}) \frac{\partial F_2(z, w_1, w_2, \varepsilon)}{\partial w_1} + j\varepsilon (1 - e^{-j\varepsilon w_2}) \frac{\partial F_2(z, w_1, w_2, \varepsilon)}{\partial w_2} - \\ & - \lambda (1 - e^{-j\varepsilon w_1}) \partial F_2(z, w_1, w_2, \varepsilon) - \lambda (1 - e^{-j\varepsilon w_2}) \partial F_2(z, w_1, w_2, \varepsilon) = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Теорема. Предельное (при $\varepsilon \rightarrow 0$) значение $F_2(z, w_1, w_2)$ решения $F_2(z, w_1, w_2, \varepsilon)$ уравнения (5) имеет вид

$$F_2(z, w_1, w_2) = R(z) \exp \left\{ \frac{j^2 \kappa_2 (w_1 + w_2)^2}{2} - \frac{j^2 \lambda w_1 w_2}{2} \right\},$$

где $R(z)$ – стационарное распределение вероятностей значений случайного процесса $\{z(t)\}$, параметр λ определяется выражением

$$\frac{\partial R(0)}{\partial z} E = \lambda,$$

величина κ_2 определяется равенством

$$\kappa_2 = \lambda + \frac{\partial f_2(0)}{\partial z} E,$$

где вектор-функция $f_2(z)$ удовлетворяет условию $f_2(\infty)E = 0$ и является решением уравнения

$$\frac{\partial f_2(z)}{\partial z} + \frac{\partial f_2(0)}{\partial z} (PD(z) - I) + \frac{\partial R(0)}{\partial z} PD(z) - \lambda R(z) = 0.$$

Доказательство. Решение уравнения (10) запишем в виде

$$F_2(z, w_1, w_2, \varepsilon) = \Phi_2(w_1, w_2) \{ R(z) + j\varepsilon (w_1 + w_2) f_2(z) \} + o(\varepsilon^2), \quad (6)$$

здесь вектор-функция $R(z)$ определена выше, функция $f_2(z)$ удовлетворяет условию $f_2(\infty)E = 0$.

Подставляя (11) в (10), получим

$$\begin{aligned} & \Phi_2(w_1, w_2) \left\{ \frac{\partial R(z)}{\partial z} + j\varepsilon (w_1 + w_2) \frac{\partial f_2(z)}{\partial z} \right\} + \Phi_2(w_1, w_2) \left\{ \frac{\partial R(0)}{\partial z} + j\varepsilon (w_1 + w_2) \frac{\partial f_2(0)}{\partial z} \right\} \times \\ & \times \{ (PD(z) - I) + j\varepsilon (w_1 + w_2) A(z) \} - \lambda j\varepsilon \Phi(w_1, w_2) R(z) - \lambda j\varepsilon w_2 \Phi_2(w_1, w_2) R(z) = o(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

которое перепишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial R(z)}{\partial z} + j\varepsilon(w_1 + w_2) \frac{\partial f_2(z)}{\partial z} + \left\{ \frac{\partial R(0)}{\partial z} + j\varepsilon(w_1 + w_2) \frac{\partial f_2(0)}{\partial z} \right\} (PD(z) - 1) - \\ - \lambda j\varepsilon(w_1 + w_2) R(z) + j\varepsilon(w_1 + w_2) \frac{\partial R(0)}{\partial z} PD(z) = o(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (7)$$

Так как выполняется равенство

$$\frac{\partial R(z)}{\partial z} + \frac{\partial R(0)}{\partial z} (PD(z) - I) = 0,$$

то (7) можно переписать в виде уравнения

$$\frac{\partial f_2(z)}{\partial z} - \lambda R(z) + \frac{\partial f_2(0)}{\partial z} (PD(z) - I) + \frac{\partial R(0)}{\partial z} PD(z) = 0,$$

определяющего функцию $f_2(z)$. В уравнении (10), устремив $z \rightarrow \infty$, получим равенство

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_2(0, w_1, w_2, \varepsilon)}{\partial z} (e^{j\varepsilon(w_1 + w_2)} - 1) + j\varepsilon(1 - e^{-j\varepsilon w_1}) \frac{\partial F_2(\infty, w_1, w_2, \varepsilon)}{\partial w_1} + \\ + j\varepsilon(1 - e^{-j\varepsilon w_2}) \frac{\partial F_2(\infty, w_1, w_2, \varepsilon)}{\partial w_2} - \lambda(1 - e^{-j\varepsilon w_1}) F_2(\infty, w_1, w_2, \varepsilon) - \\ - \lambda(1 - e^{-j\varepsilon w_2}) F_2(\infty, w_1, w_2, \varepsilon) = 0. \end{aligned}$$

Далее подставим (6) и для нахождения скалярной функции $\Phi_2(w_1, w_2)$ просуммируем и выполним предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем уравнение в частных производных для $\Phi_2(w_1, w_2)$:

$$\begin{aligned} w_1 \frac{\partial \Phi_2(w_1, w_2)}{\partial w_1} + w_2 \frac{\partial \Phi_2(w_1, w_2)}{\partial w_2} = \\ = j^2 \left[\lambda(w_1 + w_2)^2 - \lambda w_1 w_2 + (w_1 + w_2)^2 \frac{\partial f_2(0)}{\partial z} E \right] \Phi_2(w_1, w_2), \end{aligned}$$

для характеристик которого запишем систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dw_1}{w_1} = \frac{dw_2}{w_2} = \frac{d\Phi_2(w_1, w_2)}{j^2 \left[\lambda(w_1 + w_2)^2 - \lambda w_1 w_2 + (w_1 + w_2)^2 \frac{\partial f_2(0)}{\partial z} E \right] \Phi_2(w_1, w_2)},$$

решение которой имеет вид

$$\Phi_2(w_1, w_2) = C_2 \exp \left\{ j^2 \left[\lambda \frac{w_2^2 (C_1 + 1)^2}{2} - \frac{\lambda C_1 w_2^2}{2} + \frac{w_2^2 (C_1 + 1)^2}{2} \frac{\partial f_2(0)}{\partial z} E \right] \right\},$$

где $C_1 = \frac{w_1}{w_2}$.

Из начальных условий $\Phi_2(0, 0) = 1$ следует $C_2 = 1$, поэтому

$$\Phi_2(w_1, w_2) = \exp \left\{ j^2 \left[\lambda \frac{(w_1 + w_2)^2}{2} - \frac{\lambda w_1 w_2}{2} + \frac{(w_1 + w_2)^2}{2} \frac{\partial f_2(0)}{\partial z} E \right] \right\}.$$

Обозначив $\kappa_2 = \lambda + \frac{\partial f_2(0)}{\partial z} E$, запишем

$$\Phi_2(w_1, w_2) = \exp \left\{ j^2 \left[\kappa_2 \frac{(w_1 + w_2)^2}{2} - \frac{\lambda w_1 w_2}{2} \right] \right\}.$$

Подставив в (6) полученное выражение, получим искомое выражение.

Можно записать асимптотическое (приближённое) равенство

$$\begin{aligned} H_2(z, u_1, u_2) &= F_2(z, w_1, w_2 \varepsilon) \approx F_2(z, w_1, w_2) = R(z) \exp \left\{ j^2 \left[\kappa_2 \frac{(w_1 + w_2)^2}{2} - \frac{\lambda w_1 w_2}{2} \right] \right\} = \\ &= R(z) \exp \left\{ \frac{j^2 \kappa_2}{2} \left(\frac{u_1}{\sqrt{\mu_1}} + \frac{u_2}{\sqrt{\mu_2}} \right)^2 - j^2 \frac{\lambda u_1 u_2}{2 \sqrt{\mu_1 \mu_2}} \right\}, \end{aligned}$$

из которого для характеристической функции $H(z, u_1, u_2)$ получаем равенство

$$H(z, u_1, u_2) = R(z) \exp \left\{ j\lambda \left(\frac{u_1}{\mu_1} + \frac{u_2}{\mu_2} \right) + \frac{j^2 \kappa_2}{2} \left(\frac{u_1}{\sqrt{\mu_1}} + \frac{u_2}{\sqrt{\mu_2}} \right)^2 - j^2 \frac{\lambda u_1 u_2}{2 \sqrt{\mu_1 \mu_2}} \right\},$$

тогда для характеристических функций величин $i_k(t)$ имеем

$$\begin{aligned} Me^{ju_1 i_1(t)} &= H(\infty, u_1, 0)E = \exp \left\{ j\lambda \frac{u_1}{\mu_1} + \frac{(ju_1)^2}{2\mu_1} \kappa_2 \right\}, \\ Me^{ju_2 i_2(t)} &= H(\infty, 0, u_2)E = \exp \left\{ j\lambda \frac{u_2}{\mu_2} + \frac{(ju_2)^2}{2\mu_2} \kappa_2 \right\}. \end{aligned}$$

Полученные равенства будем называть асимптотикой второго порядка для блоков обслуживания системы $MR^{(2)}|M_2|\infty$.

Заключение

Таким образом, в работе рассмотрена система массового обслуживания кратных заявок с входящим потоком марковского восстановления с двумя блоками обслуживания, каждый из которых содержит неограниченное число приборов. Получены выражения для асимптотик первого и второго порядков рассматриваемой СМО.

ЛИТЕРАТУРА

1. Таташев А.Г. Система массового обслуживания с групповым поступлением и инверсионной дисциплиной // Кибернетика и системный анализ. 1995. № 6. С. 163–165.
2. Таташев А.Г. Одна инверсионная дисциплина обслуживания в одноканальной системе с разнотипными заявками // Автоматика и телемеханика. 1999. № 7. С. 177–181.
3. Collings T.W.R. A queueing problem in which customers have different service distributions // Applied Statistics. 1974. V. 23. No. 1. P. 75–82.
4. Эндрюс Г.Р. Основы многопоточного, параллельного и распределённого программирования: пер. с англ. М.: Изд. дом «Вильямс», 2003. 512 с.
5. Топорков В.В. Модели распределенных вычислений. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 320 с.
6. Нагоненко В.А. О характеристиках одной нестандартной системы массового обслуживания. I // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1981. № 1. С. 187–195.

7. Печинкин А.В. Инверсионный порядок обслуживания с вероятностным приоритетом в системе обслуживания с неординарным входящим потоком // Случайные процессы и их приложения. Математические исследования. Кишинёв: Штиинца, 1989. Вып. 109.
8. Печинкин А.В. Об одной инвариантной системе массового обслуживания // Math. Operationsforsch. und Statist. Ser. Optimization, 1983. V. 14. No. 3. P. 433–444.
9. Бочаров П.П., Д’Аниче Ч., Мандзо Р., Фонг Н.Х. Об обслуживании многомерного пуассоновского потока на одном приборе с конечным накопителем и повторными заявками // Проблемы передач информации. 2001. Т. 37. № 4. С. 130–140.
10. Чечельницкий А.А., Кучеренко О.В. Стационарные характеристики параллельно функционирующих систем обслуживания с двумерным входным потоком // Сборник научных статей. Минск, 2009. Вып. 2. С. 262–268.
11. Назаров А.А., Моисеева С.П. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2006. 112 с.

Крысанова Кристина Андреевна

Моисеева Светлана Петровна

Томского государственного университета.

E-mail: Krysanova@sibmail.com; smoiseeva@mail.ru

Поступила в редакцию 10 сентября 2011 г.

Krysanova Kristina A., Moiseeva Svetlana P. (Tomsk State University). Method of asymptotic analysis for research of parallel service multiple demands of Markovian renewal flow.

Keywords: multiple customers, Markovian renewal flow with dual customers, asymptotic analysis.

We identify the method of the asymptotic analysis in the queuing theory as a solving of equations defining any characteristics of system while performing under some limiting condition whose type depends on the models and research tasks.

We consider queuing system of multiple customers with an input flow of Markovian renewal $(MR^{(2)}|M_2|\infty)$ with two blocks of service, each of which contains unlimited number of devices. The input flow is the Markovian renewal of the dual customers, defined by functions of distribution of lengths of intervals and a matrix of transitive probabilities – imbedded on arrival times. Durations of service of various customers are assumed to be stochastically independent, equally distributed in each block and exponentially distributed with parameters μ_1 and μ_2 , accordingly. The arrived customer occupies any of free devices and after finishing of service the customers leaves system.

The problem of investigation of the two-dimensional process which characterizes a number of customers in each block is considered.