УДК 519.865

В.В. Поддубный, О.В. Романович

РЕСТРИКТИВНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИНЕРЦИОННОГО РЫНКА ОДНОГО ТОВАРА С ОПТИМАЛЬНОЙ ПОСТАВКОЙ ТОВАРА НА РЫНОК В УСЛОВИЯХ ЗАПАЗДЫВАНИЯ

Решена задача математического описания и имитационного моделирования инерционного рынка одного товара при оптимальном управлении поставкой товара на рынок в условиях запаздывания поставок. Математическое описание рынка представляется рестриктивной (подчиняющейся ограничениям типа неравенств) динамической моделью с запаздывающим управлением. Показано, что оптимальная в смысле максимума прибыли продавца стратегия поставки товара на рынок определяется сформулированными математически строго условиями состояния рынка (товарного дефицита, затоваривания рынка, динамического равновесия рынка). Приведены примеры имитационного моделирования такой системы.

Ключевые слова: *динамическая система*, *ограничения типа неравенств*, *запаздывающее управление*, *оптимизация*, *рынок одного товара*, *имитационное моделирование.*

1. Постановка задачи

Рассмотрим рынок одного товара, функционирующий в дискретном времени $t \in N = \{0,1,2,...\}$. Пусть $P(t)$ – цена товара в момент времени t, $Q^O(t)$ – остаток непроданного товара на этот момент времени, $Q^Z(t-\tau)$ – объём товара, заказываемого в момент времени $t-\tau$ для поставки на рынок к моменту t (стратегия поставок). Предполагается, что заказанный товар поступает на рынок с запаздыванием на τ единиц времени. Спрос на товар при цене $P(t)$ обозначим через $Q^D(t)$. Пусть в момент t дискретного времени спрос на товар имеет вид простейшей линейной зависимости:

$$Q^D(t) = Q_m - aP(t), \tag{1}$$

где $Q_m > 0$ и $a > 0$ – заданные константы.

Пусть $Q(t)$ – объём товара, предлагаемого к продаже в момент времени t. Представим $Q(t)$ в виде суммы остатка товара в объеме $Q^O(t)$ от продаж на предыдущем интервале дискретного времени (и перешедшего на рынок в момент t) и товара в объеме $Q^Z(t-\tau)$, заказанного продавцом в момент времени $t-\tau$ (с учётом запаздывания поставки) для поставки его на рынок к моменту времени t:

$$Q(t) = Q^O(t) + Q^Z(t-\tau).$$

Обозначим объём продаж на интервале t дискретного времени через $Q^S(t)$. Очевидно,

$$Q^S(t) = \min\left(Q^D(t), Q^O(t) + Q^Z(t-\tau)\right). \tag{2}$$

Остатки товара удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$Q^O(t+1) = Q^O(t) + Q^Z(t-\tau) - Q^S(t). \tag{3}$$

Пусть $J(t)$ – прибыль продавца на t-м интервале дискретного времени, равная разности между выручкой от продажи товара и затратами на его приобретение и хранение. Если P_1 – цена закупки товара (на оптовом рынке или у производителя), P_2 – цена хранения единицы товара, не проданного на предыдущем интервале дискретного времени, то прибыль продавца в момент времени t составит величину

$$J(t) = Q^S(t)P(t) - Q^Z(t-\tau)P_1 - Q^O(t)P_2 - \frac{R}{2}\left(P(t) - P(t-1)\right)^2. \qquad (4)$$

Последнее слагаемое (с коэффициентом $R > 0$) выражает «штрафные санкции» за изменение цены товара и определяет инерционность рынка – за резкое повышение цены могут последовать санкции законодательного характера, за резкое снижение цены – «санкции» конкурентов, выражающиеся в нанесении ущерба продавцу в размере, эквивалентном этой штрафной функции.

Возникает вопрос, какое значение примет цена товара $P(t)$ в момент времени t, если на предыдущем $(t-1)$-м шаге она равнялась $P(t-1)$, и какую величину $Q^Z(t–\tau)$ дополнительной поставки товара на рынок должен произвести продавец, чтобы прибыль продавца при заданной линии спроса на t-м интервале дискретного времени была максимальной:

$$J(t) \Rightarrow \sup_{P(t),\, Q^Z(t-\tau)}. \qquad (5)$$

Заметим, что в такой постановке для описания динамики рынка не требуется знания линии предложения (в отличие от классической модели Вальраса – Маршалла [1]), что уже использовалось нами в моделях рынка с субоптимальными стратегиями поставки товара на рынок [2].

При решении поставленной оптимизационной задачи автоматически получаются значения и цены товара $P(t)$, и объёмов продаж $Q^S(t)$, и остатков непроданного товара $Q^O(t)$, и прибыли продавца $J(t)$ для каждого текущего момента дискретного времени t. При этом, естественно, должны выполняться ограничения на величину возможной цены товара $P(t)$:

$$P_1 < P_{\min} < P(t) < P_{\max} = Q_m/a \qquad (6)$$

и на величину дополнительного заказа товара $Q^Z(t-\tau) \geq 0$.

2. Условно-оптимальная цена товара

Пусть объем поставки товара на рынок в момент времени t есть $Q(t)$. Найдем оптимальную (обеспечивающую максимум прибыли продавца (4)) цену $P(t)$ товара при фиксированном значении $Q(t)$:

$$J(t) \Rightarrow \max_{P(t)|Q(t)}.$$

При решении этой задачи, учитывая ее рестриктивный в силу соотношения (2) характер, очевидно, следует выделить области, соответствующие дефициту товара на рынке (область 1, в которой $Q(t) < Q^D(t)$), затариванию рынка (область 2, в которой $Q(t) > Q^D(t)$) и балансу спроса и предложения (область 3, область динамического равновесия, в которой $Q(t) = Q^D(t)$). Подробно эти области рассмотрены нами в работе [3], поэтому здесь мы приведём только основные результаты.

1) **В области товарного дефицита** $Q(t) < Q^D(t)$ и в соответствии с соотношением (2) имеем $Q^S(t) = Q(t)$, так что

$$J(t) = Q(t)P(t) - Q(t)P_1 + Q^O(t)(P_1 - P_2) - \frac{R}{2}\left(P(t) - P(t-1)\right)^2 \Rightarrow \sup_{P(t)|Q(t)}. \qquad (7)$$

Это квадратичная функция переменной $P(t)$, выпуклая вверх. Её максимум достигается в точке

$$P(t) = P(t-1) + \frac{Q(t)}{R} = P^{(1)}(t). \quad (8)$$

Как видим, $P^{(1)}(t)$ растет с ростом $Q(t)$ по линейному закону. Выражение (8) справедливо не при любом $Q(t)$, а лишь при $Q(t)$, удовлетворяющем условию $Q(t) < Q^D(t)$ принадлежности к области 1. Это условие с учетом (1) и (8) имеет вид [3]

$$Q(t) < \frac{R(Q_m - aP(t-1))}{a+R} = Q^{(1)}(t). \quad (9)$$

Таким образом, в области 1 $P(t)$ линейно растёт с ростом $Q(t)$ от значения

$$P^{(1)}(t)|_{Q(t)=0} = P(t-1)$$

до значения

$$P^{(1)}(t)|_{Q(t)=Q^{(1)(t)}} = \frac{Q_m + RP(t-1)}{a+R} = P^{(1)}_{\max}(t),$$

причем условие принадлежности $Q(t)$ к области 1 выражается неравенством (9).

2) **В области затоваривания рынка** $Q(t) > Q^D(t)$ и в соответствии с выражением (2) имеем $Q^S(t) = Q^D(t)$, так что с учетом (1)

$$J(t) = (Q_m - aP(t))P(t) - Q(t)P_1 + Q^O(t)(P_1 - P_2) - \frac{R}{2}(P(t) - P(t-1))^2 \Rightarrow \sup_{P(t)|Q(t)}. \quad (10)$$

Это квадратичная выпуклая вверх функция переменной $P(t)$. Её максимум достигается в точке

$$P(t) = \frac{Q_m + RP(t-1)}{2a+R} = P^{(2)}(t). \quad (11)$$

Как видим, $P^{(2)}(t)$ не зависит от $Q(t)$ (остается постоянной при любом $Q(t)$ в этой области). Выражение (11) справедливо лишь при условии, что $Q(t) > Q^D(t)$, то есть при условии [3]

$$Q(t) > \frac{R(Q_m - aP(t-1)) + aQ_m}{2a+R} = Q^{(2)}(t). \quad (12)$$

Последнее неравенство определяет условие принадлежности $Q(t)$ к области 2. Причём $Q^{(2)}(t) > Q^{(1)}(t)$. Действительно, используя выражения (3) и (8), получим

$$Q^{(2)}(t) - Q^{(1)}(t) = \frac{a^2(Q_m + RP(t-1))}{(a+R)(2a+R)} > 0,$$

что и требовалось доказать.

3) **В области баланса спроса и предложения** (то есть в области **динамического равновесия** рынка) $Q(t) = Q^D(t)$ и в соответствии с выражением (2) имеем, как и в области 2, объем продаж, равный спросу, то есть $Q^S(t) = Q^D(t)$, и прибыль $J(t)$ в виде (10). При этом, однако, $Q(t) = Q_m - aP(t)$, откуда

$$P(t) = \frac{Q_m - Q(t)}{a} = P^{(3)}(t). \quad (13)$$

Границами области 3 по $Q(t)$ являются точки $Q^{(1)}(t)$ и $Q^{(2)}(t)$:

$$Q^{(1)}(t) \le Q(t) \le Q^{(2)}(t).$$

Как видно из (13), в этой области $P^{(3)}(t)$ линейно убывает с ростом $Q(t)$ от значения

$$P^{(3)}(t)\big|_{Q(t)=Q^{(1)}(t)} = \frac{Q_m + RP(t-1)}{a+R} = P^{(1)}_{\max}(t)$$

до значения

$$P^{(3)}(t)\big|_{Q(t)=Q^{(2)}(t)} = \frac{Q_m + RP(t-1)}{2a+R} = P^{(2)}(t).$$

На рис. 1 в качестве примера изображена зависимость условно-оптимальной (при фиксированном $Q(t)$) цены $P(t)$ товара при следующих параметрах: $Q_m = 4$, $a = 0{,}4$, $P_1 = 3$, $R = 50$, $P(t-1) = 7$. При этом $Q^{(1)}(t) = 1{,}191$, $Q^{(2)}(t) = 1{,}213$, $P^{(1)}_{\max}(t) = 7{,}024$, $P^{(2)}(t) = 6{,}969$. Полужирным шрифтом выделены номера зон.

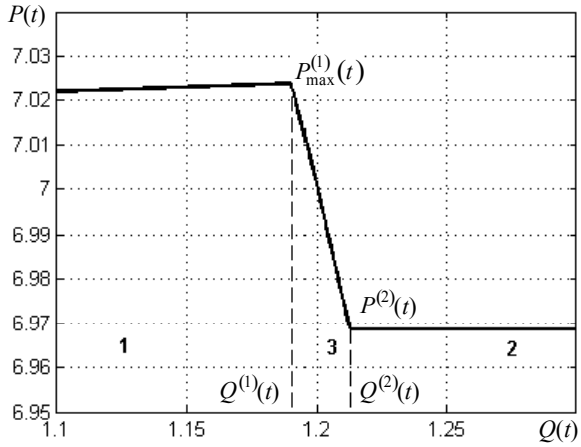

Рис. 1. Условно-оптимальная цена товара

3. Условно-максимальная прибыль. Оптимальная цена товара и максимальная прибыль

Найдем теперь оптимальную цену товара и оптимальный уровень поставки товара на рынок, обеспечивающие максимальную прибыль продавца, если $P(t-1)$, $P^{(1)}_{\max}(t)$ и $P^{(2)}$ удовлетворяют ограничениям (6) на $P(t)$. Решение этой задачи проведём по зонам (по зоне 1 – дефицита товара, зоне 2 – затоваривания рынка, зоне 3 – баланса спроса и предложения, то есть динамического рыночного равновесия).

1) **В зоне 1:** $0 < Q(t) < Q^{(1)}(t)$. После подстановки $P(t) = P^{(1)}(t)$ в выражение (7) для $J(t)$ имеем

$$J(t) = \frac{Q(t)^2}{2R} + (P(t-1) - P_1)Q(t) + Q^O(t)(P_1 - P_2) = J^{(1)}(t).$$

Как видим, $J^{(1)}(t)$ монотонно растет с ростом $Q(t)$ по линейно-квадратичному закону, достигая максимального значения на границе области при $Q(t) = Q^{(1)}(t)$:

$$J^{(1)}_{\max}(t) = J^{(1)}(t)\big|_{Q(t)=Q^{(1)}(t)}.$$

Если остаток товара $Q^O(t)$ от продаж предыдущего интервала дискретного времени не превышает величину $Q^{(1)}(t)$, то дополнительный заказ и поставка товара на рынок в объеме $Q^Z(t-\tau) = Q^{(1)}(t) - Q^O(t)$ (в частности, $Q^Z(t-\tau) = 0$ при $Q^O(t) = Q^{(1)}(t)$) обеспечивает максимум прибыли. Иначе, при $Q^O(t) > Q^{(1)}(t)$ следует искать решение задачи оптимизации прибыли в областях 2 или 3.

2) **В зоне 2:** $Q(t) > Q^{(2)}(t)$. После подстановки в $J(t)$ для этой зоны (выражение (10)) $P(t) = P^{(2)}(t)$, не зависящего от $Q(t)$, имеем

$$J(t)=\left(Q_m - aP^{(2)}(t)\right)P^{(2)}(t)-Q(t)P_1+Q^O(t)(P_1-P_2)-\frac{R}{2}\left(P^{(2)}(t)-P(t-1)\right)^2=J^{(2)}(t).$$

Как видим, $J^{(2)}(t)$ монотонно убывает с ростом $Q(t)$ по линейному закону, так что достигает в этой зоне наибольшего значения при $Q(t) = Q^{(2)}(t)$:

$$J^{(2)}_{\max}(t)=J^{(2)}(t)\big|_{Q(t)=Q^{(2)}(t)}.$$

Если $Q^O(t) < Q^{(2)}(t)$, то дополнительный заказ и поставка товара на рынок в объеме $Q^Z(t-\tau) = Q^{(2)}(t) - Q^O(t)$ обеспечивает получение этого максимума прибыли. Если же $Q^O(t) > Q^{(2)}(t)$, то $Q^Z(t-\tau) = 0$, и достигается лишь значение прибыли $J^{(2)}(t)\big|_{Q(t)=Q^O(t)} < J^{(2)}_{\max}(t)$.

3) **В зоне 3:** $Q^{(1)}(t) \le Q(t) \le Q^{(2)}(t)$. После подстановки $P(t) = P^{(3)}(t)$ в $J(t)$ для этой зоны (формула (10)) имеем

$$J(t)=Q(t)\frac{Q_m-Q(t)}{a}-Q(t)P_1+Q^O(t)(P_1-P_2)-\frac{R}{2}\left(\frac{Q_m-Q(t)}{a}-P(t-1)\right)^2=J^{(3)}(t).$$

Это выпуклая вверх линейно-квадратичная функция переменной $Q(t)$. Максимум $J^{(3)}(t)$ по $Q(t)$ достигается в точке

$$Q(t)=\frac{R\left(Q_m-aP(t-1)\right)+a\left(Q_m-aP_1\right)}{2a+R}=Q^{(3)}(t).$$

Нетрудно показать [3], что $Q^{(1)}(t) < Q^{(3)}(t) < Q^{(2)}(t)$, то есть точка $Q^{(3)}(t)$ максимума $J^{(3)}(t)$ лежит в области 3. Максимальное значение прибыли в зоне 3 (при $Q^O(t) < Q^{(3)}(t)$)

$$J^{(3)}_{\max}(t)=J^{(3)}(t)\big|_{Q(t)=Q^{(3)}(t)}.$$

Это значение является и глобально максимальным, потенциально возможным при $Q^O(t) \le Q^{(3)}(t)$. Если же $Q^{(3)}(t) < Q^O(t) \le Q^{(2)}(t)$, то глобально максимальное значение прибыли не может быть достигнуто, и достигается только условно-максимальное значение (при фиксированном $Q^O(t)$) внутри зоны 3, лежащее между $J^{(3)}_{\max}(t)$ и $J^{(2)}(t)$.

На рис. 2 для примера, рассмотренного выше, приведен ход условно-оптимальной прибыли (при фиксированном $Q(t)$ и при $Q^O(t) = 0$) с указанием точки глобального максимума ($Q^{(3)}(t) = 1{,}203$, $J^{(3)}_{\max}(t) = 4{,}802$).

Очевидно, глобальный максимум прибыли может быть получен только в том случае, если объём остатка товара, не проданного на предыдущем интервале времени, не превышает величину оптимального объёма поставки товара на рынок: $Q^O(t) \le Q^{(3)}(t)$. В противном случае прибыль продавца будет меньше максимально

возможной. Причем, если при этом объём остатков товара будет оставаться в зоне 3, то есть будет лежать в интервале $Q^{(3)}(t) < Q^{O}(t) \le Q^{(2)}(t)$, то рынок будет оставаться в состоянии динамического равновесия (спрос на товар будет оставаться равным предложению, в качестве которого будет выступать остаток товара). И только при $Q^{O}(t) > Q^{(2)}(t)$ предложение товара перейдет в зону 2, и начнется затоваривание рынка.

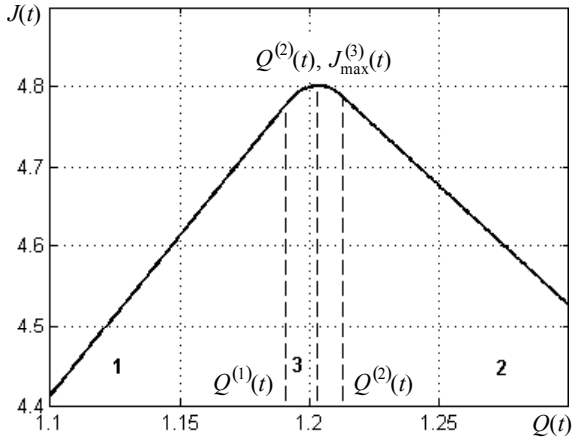

Рис. 2. Условно-максимальная прибыль

4. Численное моделирование динамики рынка одного товара с оптимальным запаздывающим управлением

Рассмотрим модель функционирования рынка одного товара в дискретном времени t, $t \in N = \{0,1,2,...\}$. Моделируется ситуация, когда сначала (не менее τ шагов дискретного времени) рынок находился в состоянии равновесия. Затем в некоторый момент времени $t = 0$ он выводится из равновесного положения (цена товара резко меняется, например увеличивается по отношению к равновесному значению $P^* = (Q_m + aP_1) / (2a)$ [3], то есть $P(0) = P_0 > P^*$). После этого рынок постепенно возвращается в равновесное состояние. Расчёты эволюции состояния рынка с оптимизацией поставок товара на рынок проводились при $R = 50$; $Q_m = 4$; $a = 0{,}4$; $T = 300$; $P_0 = 7$; $P_1 = 3$; $P_2 = 0{,}1$; $P_{\min} = P_1 + P_2$; $P_{\max} = Q_m/a$; $P^* = 6{,}5$; $Q_0 = 0$; $\tau = 10$; 20; 30. Динамика параметров рынка изображена на рис. 3 – 8.

На рис. 3 видно, что цена сначала резко падает, а затем по экспоненте плавно поднимается до равновесного значения. Причем резкое падение цены происходит до момента $t = 10$ (для $\tau = 10$), $t = 20$ (для $\tau = 20$) и $t = 30$ (для $\tau = 30$). Дело в том, что на интервале $t \in [0,10]$ ситуация на рынке уже изменилась (в связи с повышением цены товара), спрос упал, но на рынок (в связи с задержкой в поставках товара) продолжает поступать товар в объёмах, необходимых для равновесного рынка. Как следствие – затоваривание рынка и скопление излишков товара на складе (рис. 6). Изменение поведения цены в момент, например, $t = 10$ (для $\tau = 10$) связан с тем, что с этого момента на рынок поступает товар в уже скорректированных объёмах – продавец сделал заказ товара уже после скачка цены на товар, следовательно, заказывал его в уже меньших объёмах, что предотвращает затоваривание рынка и стремительное уменьшение цены товара.

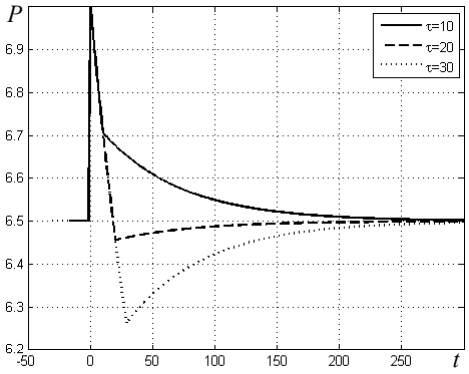

Рис. 3. Оптимальная динамика цены

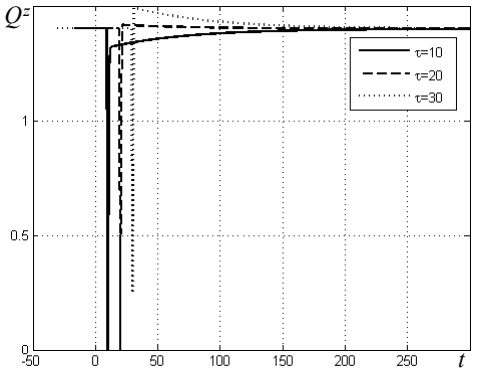

Рис. 4. Оптимальная стратегия заказа товара

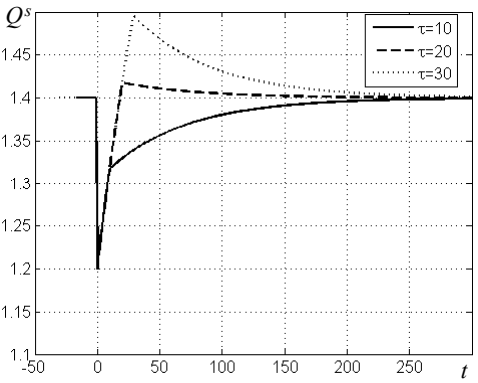

Рис. 5. Покупательский спрос

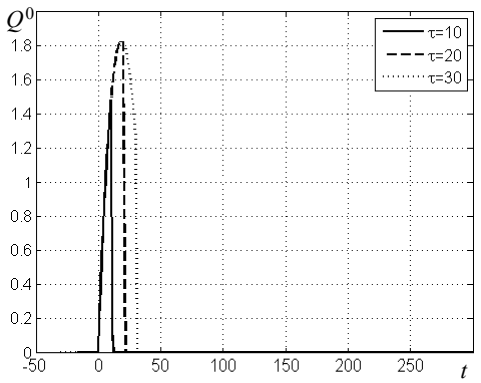

Рис. 6. Оптимальный запас товара

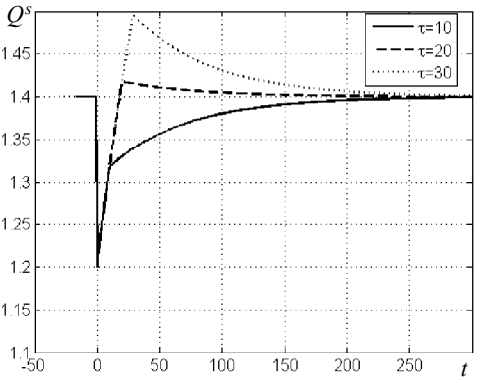

Рис. 7. Динамика продаж

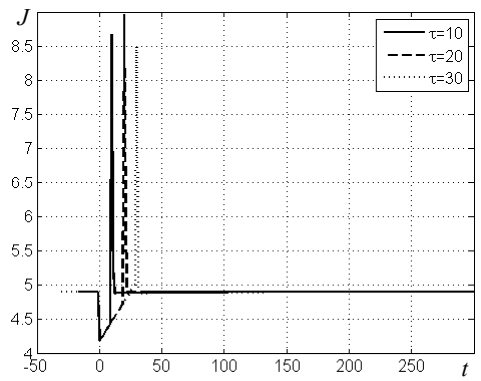

Рис. 8. Динамика прибыли

Заметим, что момент времени изменения поведения цены не обязательно совпадает с задержкой τ. Если в этот момент рынок все еще затоварен, то цена еще некоторое время будет резко падать (например, если изменить параметр линии спроса $a = 0{,}5$). Интересно поведение функции прибыли. На начальном интервале прибыль падает. Это связано с падением спроса на товар. Но затем идет скачко-

образное повышение прибыли, связанное с тем, что продавцу не надо платить за покупку товара, так как размер заказанного товара в этот момент равен нулю (это связано с затовариванием рынка).

На рис. 9 – 14 отображена динамика основных переменных функционирования рынка при условии, что в момент времени $t = 0$ рынок был выведен из состояния равновесия резким падением цены товара ($P_0 < P^*$).

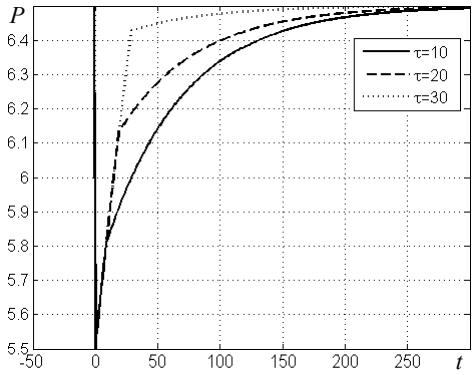

Рис. 9. Оптимальная динамика цены

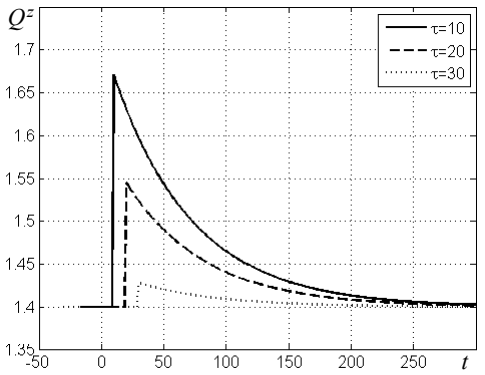

Рис. 10. Оптимальная стратегия заказа товара

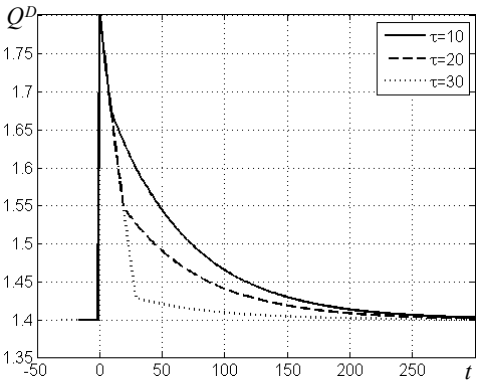

Рис. 11. Покупательский спрос

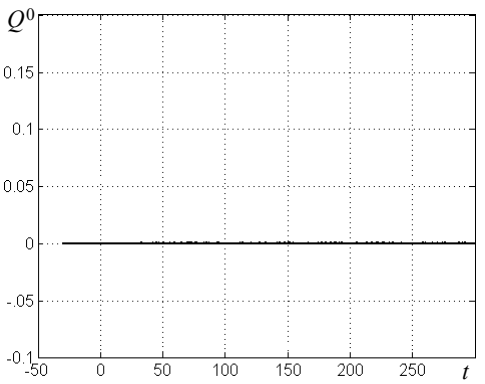

Рис. 12. Оптимальный запас товара

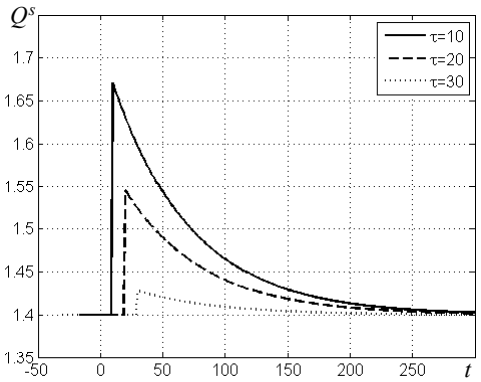

Рис. 13. Динамика продаж

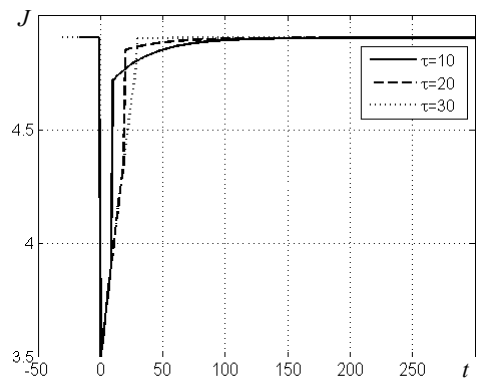

Рис.14. Динамика прибыли

Расчёты эволюции состояния рынка с оптимизацией поставок товара на рынок проводились при $R = 50$; $Q_m = 4$; $a = 0{,}4$; $T = 300$; $P_0 = 5{,}5$; $P_1 = 3$; $P_2 = 0{,}1$; $P_{\min} = P_1 + P_2$; $P_{\max} = Q_m/a$; $P^* = 6{,}5$; $Q_0 = 0$; $\tau = 10; 20; 30$.

Проанализируем ситуацию, когда цена товара резко упала. Рынок реагирует на это резким повышением спроса на товар. На интервале $t \in [0{,}10]$ на рынок поступает товар в недостаточных объёмах, что связано с задержкой в поставках товара – на рынок поступает объём товара, который был необходим для рынка в состоянии равновесия. Как следствие, излишков товара на складе нет (рис. 12). На рис. 9 видно, что так же, как и в предыдущем примере, есть точка изменения характера поведения цены товара. Это изменение также связано с тем, что с этого момента на рынок поступает товар в уже скорректированных объёмах, и происходит постепенное насыщение рынка.

Заключение

Таким образом, предлагаемая рестриктивная динамическая математическая модель рынка одного товара качественно правильно описывает поведение рынка в условиях запаздывания поставок товара на рынок. Оптимальная стратегия поставки товара требует предсказания цены товара и покупательского спроса вперёд на время запаздывания, что, как это видно из рассмотренных примеров, может быть сделано с помощью имитационного моделирования поведения рынка.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гальперин В.М.*, *Игнатьев С.М.*, *Морозов В.И.* Микроэкономика: в 2 т. Т. 1. СПб: Экономическая школа, 2002.
2. *Поддубный В.В.*, *Романович О.В.* Рынок как самоуправляемая инерционная динамическая система с запаздыванием при сбалансированной стратегии поставок товара // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2009. № 4(9). С. 5–16.
3. *Поддубный В.В.*, *Романович О.В.* Рынок с фиксированной линией спроса как оптимальная система // Труды X Международной ФАМЭТ 2011 конференции / под ред. О.Ю. Воробьева. Красноярск: КГТЭИ, СФУ, 2011. С. 318–323.

Поддубный Василий Васильевич
Романович Ольга Владимировна
Томский государственный университет
E-mail: vvpoddubny@gmail.com; njkm@ngs.ru

Поступила в редакцию 1 сентября 2011 г.