

УДК 519.21

А.Р. Ерёмина, Ю.В. Малинковский

ОБ ИНВАРИАНТНОСТИ СТАЦИОНАРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОСТОЯНИЙ ОТКРЫТОЙ СЕТИ С МНОГОРЕЖИМНЫМИ СТРАТЕГИЯМИ ОБСЛУЖИВАНИЯ И РАЗНОТИПНЫМИ ЗАЯВКАМИ

Рассматривается открытая сеть массового обслуживания с многорежимными стратегиями и разнотипными заявками. Входной поток – простейший. Количество работы по обслуживанию заявок и количество работы по переключению прибора с одного режима на другой имеет произвольное распределение. Процессы обслуживания заявок и переключения режимов приборов не зависят друг от друга. Установлена инвариантность стационарного распределения вероятностей состояний сети по отношению к функциональной форме распределений величин работ, требующихся на обслуживание заявок и переключение режимов приборов.

Ключевые слова: *сеть массового обслуживания, многорежимные стратегии, стационарное распределение, инвариантность.*

Сети массового обслуживания достаточно адекватно описывают функционирование многих реальных объектов в области информационно-вычислительных и логистических систем. Аналитические результаты теории сетей массового обслуживания используются при проектировании новых производственных линий, правочных станций, планировании графика работы общественного транспорта и т.д., когда реальных объектов не существует или когда эмпирические данные получить довольно трудно и дорого.

При этом большую практическую значимость имеет изучение таких сетей, в которых могут обслуживаться требования не одного, а нескольких типов, а сами обслуживающие приборы могут работать с разной производительностью. В работе [1] были введены в рассмотрение сети массового обслуживания с многорежимными стратегиями, в узлах которых приборы могут функционировать в различных режимах с более высокой или низкой производительностью. Однако для указанных сетей предполагалось, что время пребывания прибора в определенном режиме имеет экспоненциальное распределение. Это условие ограничивало применение полученных результатов на практике, когда прибор может полностью или частично выходить из строя, требовать ремонта или замены.

Сети с разнотипными заявками и многорежимным обслуживанием, когда количество работы по обслуживанию поступающих в узел заявок имеет произвольную функцию распределения, были исследованы в [2]. Для указанных сетей была установлена инвариантность стационарного распределения вероятностей состояний относительно функционального вида распределения количества работы, необходимого для обслуживания требований.

Сети с немедленным обслуживанием заявок (дисциплина LCFS PR) и многорежимным обслуживанием, когда количество работы по обслуживанию поступающих в узел заявок и количество работы по переключению прибора с одного режима на другой являются случайными величинами с произвольной функцией

распределения, были исследованы в [3, 4]. Для указанных сетей была установлена инвариантность стационарного распределения вероятностей состояний относительно функционального вида распределения количества работы, необходимого для обслуживания поступающих заявок и переключения режимов работы обслуживающих приборов. Данные результаты были получены для случая, когда в сети циркулируют требования одного типа.

Однако на практике чаще встречаются сети, в которые поступают требования различных типов. Поэтому в настоящей работе были исследованы аналогичные сети с разнотипными заявками, а результаты, полученные в [3], обобщены для неоднородных сетей.

1. Постановка задачи

Рассматривается открытая сеть массового обслуживания, состоящая из N однолинейных узлов, в которой циркулируют заявки M типов. Поступающий поток заявок – простейший с интенсивностью λ . Каждая заявка входного потока независимо от других заявок с вероятностью $p_{0(l,u)}$ направляется в l -й узел и становится заявкой типа u ($l = \overline{1, N}; u = \overline{1, M}; \sum_{l=1}^N \sum_{u=1}^M p_{0(l,u)} = 1$). После обслуживания в l -м узле заявка u -го типа мгновенно и независимо от других заявок с вероятностью $p_{(l,u)(k,v)}$ направляется в k -й узел и становится заявкой типа v , а с вероятностью $p_{(l,u)0}$ покидает сеть ($l, k = \overline{1, N}; u, v = \overline{1, M}; \sum_{k=1}^N \sum_{v=1}^M p_{(l,u)(k,v)} + p_{(l,u)0} = 1$).

В каждом из N узлов находится единственный прибор, который может работать в $r_l + 1$ режимах: $0, 1, \dots, r_l$ ($l = \overline{1, N}$). По истечении времени пребывания в режиме прибор переходит в другой режим мгновенно.

Дисциплина обслуживания заявок прибором – LCFS PR. Заявка, поступающая в узел, вытесняет заявку с прибора и начинает обслуживаться, а вытесненная заявка становится в начало очереди на обслуживание, сдвигая стоящие в ней заявки. При повторном поступлении на прибор заявка продолжает дообслуживаться оставшееся время в режиме, в котором работал прибор на момент указанного поступления. Таким образом, поступающая в узел заявка имеет абсолютный приоритет перед всеми остальными заявками, находящимися в узле. Нумерация заявок в очереди на каждый узел осуществляется от конца очереди к прибору.

Состояние сети в момент времени t характеризуется вектором $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t))$, где состояние l -го узла в момент времени t есть вектор $x_l(t) = (\bar{x}_l(t), j_l(t)) = (x_{l1}(t), x_{l2}(t), \dots, x_{l,n(l)}(t), j_l(t))$, $x_{l1}(t)$ – тип заявки, стоящей последней в очереди на обслуживание в l -м узле в момент времени t , $x_{l2}(t)$ – тип заявки, стоящей предпоследней в очереди на обслуживание в l -м узле в момент времени t и т.д., $x_{l,n(l)-1}(t)$ – тип заявки, стоящей первой в очереди на обслуживание в l -м узле в момент времени t , $x_{l,n(l)}(t)$ – тип заявки, находящейся на обслуживании в l -м узле в момент времени t , $j_l(t)$ – номер режима, в котором работает прибор в l -м узле в момент времени t , $n(l)$ – общее количество заявок в l -м узле. Тогда процесс $x(t)$ обладает не более чем счетным фазовым пространством состояний $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_N$, где $X_l = \{(0, j_l), (x_{l1}, j_l), (x_{l1}, x_{l2}, j_l), \dots; x_{lk} = \overline{1, M}, k = 1, 2, \dots; j_l = \overline{0, r_l}\}$.

В качестве основного режима работы обслуживающего прибора полагается режим работы 0. Переключение происходит только на соседние режимы.

Время пребывания в основном (нулевом) режиме работы имеет произвольную функцию распределения $\Phi_l(0, \tilde{u})$, после чего прибор переходит в режим 1. Для состояния x_l , у которого $1 \leq j_l \leq r_l - 1$ время пребывания в режиме j_l также имеет произвольную функцию распределения $\Phi_l(j_l, \tilde{u})$, при этом с вероятностью

$\frac{v_l(j_l)}{v_l(j_l) + \phi_l(j_l)}$ прибор l -го узла переходит в режим $j_l + 1$, а с вероятностью

$\frac{\phi_l(j_l)}{v_l(j_l) + \phi_l(j_l)}$ – в режим $j_l - 1$. Время пребывания в последнем r_l -м режиме имеет

произвольную функцию распределения $\Phi_l(r_l, \tilde{u})$, после чего прибор переходит в режим $r_l - 1$. Во время переключения прибора с одного режима на другой число заявок в узле не меняется.

При этом

$$v_l^{-1}(0) = \int_0^{\infty} (1 - \Phi_l(0, \tilde{u})) d\tilde{u}; \quad (1)$$

$$(v_l(j_l) + \phi_l(j_l))^{-1} = \int_0^{\infty} (1 - \Phi_l(j_l, \tilde{u})) d\tilde{u}, \quad 1 \leq j_l \leq r_l - 1; \quad (2)$$

$$\phi_l^{-1}(r_l) = \int_0^{\infty} (1 - \Phi_l(r_l, \tilde{u})) d\tilde{u}. \quad (3)$$

Длительности обслуживания заявок в узлах не зависят от процесса поступления, друг от друга и от длительностей пребывания приборов в режимах и имеют произвольную функцию распределения $B_l(\bar{x}_l, \tilde{u})$ для l -го узла, зависящую от очереди заявок $\bar{x}_l$ в узле, причём

$$\mu_l^{-1}(x_{l1}, x_{l2}, \dots, x_{l,n(l)}) = \int_0^{\infty} (1 - B_l(x_{l1}, x_{l2}, \dots, x_{l,n(l)}, \tilde{u})) d\tilde{u}. \quad (4)$$

Будем предполагать, что матрица $(p_{(l,u)(k,v)}), u, v = \overline{1, M}, l, k = \overline{0, N}$, $p_{(0,u)(0,v)} = 0$, неприводима.

Тогда уравнение трафика

$$\varepsilon_{lu} = p_{0(l,u)} + \sum_{k=1}^N \sum_{v=1}^M \varepsilon_{kv} p_{(k,v)(l,u)}, \quad l = \overline{1, N}, u = \overline{1, M}, \quad (5)$$

имеет единственное положительное решение $(\varepsilon_{lu}; l = \overline{1, N}, u = \overline{1, M})$.

Пусть $\psi_{lk}(t)$ – остаточное время обслуживания с момента t до момента завершения обслуживания заявки, стоящей в момент времени t на k -й позиции в l -м узле, $\psi_l(t) = (\psi_{l1}(t), \psi_{l2}(t), \dots, \psi_{l,n(l)}(t))$, $(l = \overline{1, N})$. Пусть $\xi_{lj_l}(t)$ – остаточное время пребывания прибора l -го узла в режиме j_l с момента t до перехода в соседний режим, $\xi(t) = (\xi_{1,j_1(t)}(t), \xi_{2,j_2(t)}(t), \dots, \xi_{N,j_N(t)}(t))$. Таким образом,

$$\frac{\partial \psi_{lk}(t)}{\partial t} = -\mu_l(x_{l1}, x_{l2}, \dots, x_{lk}), \quad \frac{\partial \xi_{lj_l}(t)}{\partial t} = -\left(v_l(j_l)I_{(j_l \neq r_l)} + \phi_l(j_l)I_{(j_l \neq 0)}\right),$$

когда состояние l -го узла есть $(x_{l1}, x_{l2}, \dots, x_{l,n(l)}, j_l)$.

В общем случае процесс $x(t)$ не является марковским, поэтому рассмотрим кусочно-линейный марковский процесс $\zeta(t) = (x(t), \psi(t), \xi(t))$, полученный путем добавления к $x(t)$ непрерывных компонент $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_N(t))$ и $\xi(t)$.

Под $\{P(x), x \in X\}$ будем понимать стационарное распределение вероятностей состояний процесса $x(t)$.

Введем в рассмотрение стационарные функции распределения вероятностей состояний кусочно-линейного процесса $\zeta(t)$:

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= F(x, y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1,n(1)}; \dots; y_{N1}, y_{N2}, \dots, y_{N,n(N)}; \dots; z_{1,j_1}, \dots, z_{N,j_N}) = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} P\{x(t) = x; \psi_{l1}(t) < y_{l1}, \dots, \psi_{l,n(l)}(t) < y_{l,n(l)}, l = \overline{1, N}; \\ &\quad \xi_{1,j_1}(t) < z_{1,j_1}, \dots, \xi_{N,j_N}(t) < z_{N,j_N}\}. \end{aligned}$$

Обозначим $\vartheta_l(j_l) = v_l(j_l)I_{(j_l \neq r_l)} + \phi_l(j_l)I_{(j_l \neq 0)}$, $l = \overline{1, N}$, $j_l = \overline{0, r_l}$.

2. Основной результат

Лемма. Если ε_{lu} ($l = \overline{1, N}$; $u = \overline{1, M}$) является решением уравнения трафика (5), то справедливо следующее равенство:

$$\sum_{k=1}^N \sum_{v=1}^M \varepsilon_{kv} P_{(k,v)0} = 1. \quad (6)$$

Подробное доказательство леммы приведено в [2].

В [5] был рассмотрен случай, когда длительности обслуживания заявок в узлах и длительности пребывания в режимах имеют показательное распределение, т.е. для l -го узла $B_l(\bar{x}_l, \tilde{u}) = 1 - \exp\{-\mu_l(x_{l1}, x_{l2}, \dots, x_{l,n(l)})\tilde{u}\}$ ($\tilde{u} > 0$) и $\Phi_l(j_l, \tilde{u}) = 1 - \exp\{-(v_l(j_l) + \phi_l(j_l))\tilde{u}\}$ ($\tilde{u} > 0$). Тогда $x(t)$ – однородный марковский процесс с непрерывным временем и не более чем счетным фазовым пространством состояний $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_N$, где $X_l = \{(0, j_l), (x_{l1}, j_l), (x_{l1}, x_{l2}, j_l), \dots, x_{lk} = \overline{1, M}, k = 1, 2, \dots, j_l = \overline{0, r_l}\}$.

Установлено, что при выполнении условий

$$\begin{aligned} v_l(\bar{x}_l, j_l - 1)\mu_l(\bar{x}_l, j_l)\phi_l(T^-(\bar{x}_l), j_l) &= v_l(T^-(\bar{x}_l), j_l - 1)\mu_l(\bar{x}_l, j_l - 1)\phi_l(\bar{x}_l, j_l), \\ l &= \overline{1, N}, j_l = \overline{1, r_l}, n(l) \geq 1, \end{aligned} \quad (7)$$

и неравенства

$$\sum_{x \in X} q(x) \prod_{l=1}^N \left[\lambda^{n(l)} \prod_{w=1}^{n(l)} \frac{\varepsilon_{l,x_{lw}}}{\mu_l(x_{l1}, x_{l2}, \dots, x_{lw}, j_l)} \prod_{k=1}^{j_l} \frac{v_l(0, k-1)}{\phi_l(0, k)} \right] < \infty,$$

где $q(x) = \lambda + \sum_{l=1}^N \left(\mu_l^{-1}(\bar{x}_l, j_l) + v_l(\bar{x}_l, j_l) + \phi_l(\bar{x}_l, j_l) \right)$,

марковский процесс $x(t)$ эргодичен, а его стационарное распределение имеет мультипликативную форму

$$P(x) = p_1(x_1)p_2(x_2) \times \dots \times p_N(x_N),$$

где

$$p_l(\bar{x}_l, j_l) = \lambda^{n(l)} \prod_{w=1}^{n(l)} \frac{\varepsilon_{l, x_{lw}}}{\mu_l(x_{l1}, x_{l2}, \dots, x_{lw}, j_l)} \prod_{k=1}^{j_l} \frac{v_l(0, k-1)}{\varphi_l(0, k)} p_l(0, 0),$$

$\varepsilon_{l, x_{lw}}$ находятся из (5), а

$$p_l(0, 0) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{r_l} \lambda^i \prod_{w=1}^i \frac{\varepsilon_{l, x_{lw}}}{\mu_l(x_{l1}, x_{l2}, \dots, x_{lw}, j)} \prod_{k=1}^j \frac{v_l(0, k-1)}{\varphi_l(0, k)} \right)^{-1}.$$

Для рассматриваемой в статье модели в силу того, что $\mu_l(\bar{x}_l, j_l) = \mu_l(\bar{x}_l)$, $v_l(\bar{x}_l, j_l) = v_l(j_l)$, $\varphi_l(\bar{x}_l, j_l) = \varphi_l(j_l)$, условие обратимости (7) выполняется автоматически. Поэтому остается потребовать, чтобы выполнялось условие эргодичности

$$\sum_{x \in X} q(x) \prod_{l=1}^N \left(\lambda^{n(l)} \prod_{w=1}^{n(l)} \frac{\varepsilon_{l, x_{lw}}}{\mu_l(x_{l1}, x_{l2}, \dots, x_{lw})} \prod_{k=1}^{j_l} \frac{v_l(k-1)}{\varphi_l(k)} \right) < \infty. \quad (8)$$

Тогда стационарное распределение имеет мультипликативную форму

$$P(x) = p_1(x_1)p_2(x_2) \times \dots \times p_N(x_N).$$

При этом

$$p_l(\bar{x}_l, j_l) = \left(\lambda^{n(l)} \prod_{w=1}^{n(l)} \frac{\varepsilon_{l, x_{lw}}}{\mu_l(x_{l1}, x_{l2}, \dots, x_{lw})} \prod_{k=1}^{j_l} \frac{v_l(k-1)}{\varphi_l(k)} \right) p_l(0, 0),$$

где $q(x) = \lambda + \sum_{l=1}^N (\mu_l^{-1}(\bar{x}_l) + v_l(j_l) + \varphi_l(j_l))$, а $(\varepsilon_{lu}; l = \overline{1, N}, u = \overline{1, M})$ – положительное решение уравнения трафика (5).

Пусть длительность обслуживания заявки прибором l -го узла имеет произвольную функцию распределения $B_l(\bar{x}_l, \tilde{u})$, а время пребывания прибора l -го узла в режиме j_l – $\Phi_l(j_l, \tilde{u})$, причем математические ожидания фиксированы с помощью равенств (1) – (4).

Основной результат формулируется следующим образом.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. Процесс $\zeta(t)$ эргодичен, если выполняются соотношения (8). При этом стационарные функции распределения вероятностей состояний $F(x, y, z)$ определяются по формулам

$$F(x, y, z) = p_1(x_1)p_2(x_2) \times \dots \times p_N(x_N) \times \prod_{l=1}^N \prod_{w=1}^{n(l)} \mu_l(x_{l1}, x_{l2}, \dots, x_{lw}) \int_0^{y_{l,w}} (1 - B_l(x_{l1}, x_{l2}, \dots, x_{lw}, \tilde{u})) d\tilde{u} \prod_{l=1}^N \vartheta_l(j_l) \int_0^{z_{l,j_l}} (1 - \Phi_l(j_l, \tilde{u})) d\tilde{u}, \quad (9)$$

где

$$p_l(\bar{x}_l, j_l) = \left(\lambda^{n(l)} \prod_{w=1}^{n(l)} \frac{\varepsilon_{l, x_{lw}}}{\mu_l(x_{l1}, x_{l2}, \dots, x_{lw})} \prod_{k=1}^{j_l} \frac{v_l(k-1)}{\varphi_l(k)} \right) p_l(0, 0), \quad (10)$$

$\varepsilon_{l, x_{lw}}$ находятся из (5), а

$$p_l(0, 0) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{r_l} \lambda^i \prod_{w=1}^i \frac{\varepsilon_{l, x_{lw}}}{\mu_l(x_{l1}, x_{l2}, \dots, x_{lw})} \prod_{k=1}^j \frac{v_l(k-1)}{\varphi_l(k)} \right)^{-1}, \quad x \in X, \quad l = \overline{1, N}. \quad (11)$$

Доказательство. В случае, когда $x(t)$ – марковский процесс, существует его стационарное эргодическое распределение. Тогда и в общем случае при выполнении условия (8) существует стационарное эргодическое распределение процесса $\zeta(t)$, так как $\zeta(t)$ получается из $x(t)$ добавлением непрерывных компонент. Строгое доказательство этого факта может быть проведено, если учесть, что процесс $\zeta(t)$ является регенерирующим. Действительно, функционирование сети схематично можно представить как чередование периодов, когда сеть находится в состоянии «0» (в каждом узле сети нет заявок и прибор работает в нулевом режиме), и периодов занятости сети (в противном случае). Далее доказательство сводится к применению предельной теоремы Смита для регенерирующих процессов [6, с.41], при этом учитывается, что среднее время пребывания прибора в режиме равно такое же, как и в марковском случае.

Для упрощения записи введём в рассмотрение операторы:

$$T_u^+(\bar{x}_l) = T_u^+(x_{l1}, \dots, x_{l, n(l)}) = (x_{l1}, \dots, x_{l, n(l)}, u),$$

$$T_l^-(\bar{x}_l) = T_l^-(x_{l1}, \dots, x_{l, n(l)}) = (x_{l1}, \dots, x_{l, n(l)-1}),$$

$$T_{(l,u)}^+(x) = T_{(l,u)}^+(x_1, \dots, x_N) = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_N), \quad \text{где } \tilde{x}_k = x_k \text{ при } k \neq l, \quad \tilde{x}_l = (T_u^+(\bar{x}_l), j_l),$$

$$T_l^-(x) = T_l^-(x_1, \dots, x_N) = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_N), \quad \text{где } \tilde{x}_k = x_k \text{ при } k \neq l, \quad \tilde{x}_l = (T_l^-(\bar{x}_l), j_l),$$

$$R_l^{j_l+1}(x) = R_l^{j_l+1}(x_1, \dots, x_N) = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_N), \quad \text{где } \tilde{x}_k = x_k \text{ при } k \neq l, \quad \tilde{x}_l = (\bar{x}_l, j_l + 1),$$

$$R_l^{j_l-1}(x) = R_l^{j_l-1}(x_1, \dots, x_N) = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_N), \quad \text{где } \tilde{x}_k = x_k \text{ при } k \neq l, \quad \tilde{x}_l = (\bar{x}_l, j_l - 1),$$

$$l = \overline{1, N}, \quad u = \overline{1, M}.$$

Тогда для $F(x, y, z)$ справедлива следующая система дифференциально-разностных уравнений:

$$\begin{aligned} \lambda F(x, y, z) = & \sum_{l=1}^N \left(\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial y_{l, n(l)}} - \left(\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial y_{l, n(l)}} \right)_{y_{l, n(l)}=0} \right) + \\ & + \sum_{l=1}^N \left(\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z_{l, j_l}} - \left(\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z_{l, j_l}} \right)_{z_{l, j_l}=0} \right) + \\ & + \lambda \sum_{l=1}^N p_{0(l, x_{l, n(l)})} B_l(\bar{x}_l, y_{l, n(l)}) F(T_l^-(x), y, z) + \\ & + \sum_{l=1}^N \sum_{u=1}^M p_{(l, u)0} \left(\frac{\partial F(T_{(l, u)}^+(x), y, z)}{\partial y_{l, n(l)+1}} \right)_{y_{l, n(l)+1}=0} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{l=1}^N \sum_{s=1, s \neq l}^N \sum_{u=1}^M p_{(s,u)(l, x_{l,n(l)})} B_l(\bar{x}_l, y_{l,n(l)}) \left(\frac{\partial F(T_{(s,u)}^+(T_l^-(x)), y, z)}{\partial y_{s,n(s)+1}} \right)_{y_{s,n(s)+1}=0} + \\
 & + \sum_{l=1}^N \sum_{u=1}^M p_{(l,u)(l, x_{l,n(l)})} B_l(\bar{x}_l, y_{l,n(l)}) \left(\frac{\partial F(T_{(l,u)}^+(T_l^-(x)), y, z)}{\partial y_{l,n(l)}} \right)_{y_{l,n(l)}=0} + \\
 & + \sum_{l=1}^N \frac{v_l(j_l-1)}{g_l(j_l-1)} \Phi_l(j_l, z_{l,j_l}) \left(\frac{\partial F(R_l^{j_l-1}(x), y, z)}{\partial z_{l,j_l-1}} \right)_{z_{l,j_l-1}=0} + \\
 & + \sum_{l=1}^N \frac{\varphi_l(j_l+1)}{g_l(j_l+1)} \Phi_l(j_l, z_{l,j_l}) \left(\frac{\partial F(R_l^{j_l+1}(x), y, z)}{\partial z_{l,j_l+1}} \right)_{z_{l,j_l+1}=0}, \quad x \in X. \quad (12)
 \end{aligned}$$

Разобьем эту систему уравнений на уравнения локального баланса:

$$\lambda F(x, y, z) = \sum_{l=1}^N \sum_{u=1}^M p_{(l,u)0} \left(\frac{\partial F(T_{(l,u)}^+(x), y, z)}{\partial y_{l,n(l)+1}} \right)_{y_{l,n(l)+1}=0}; \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial y_{l,n(l)}} \right)_{y_{l,n(l)}=0} - \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial y_{l,n(l)}} = \lambda p_{0(l, x_{l,n(l)})} B_l(\bar{x}_l, y_{l,n(l)}) F(T_l^-(x), y, z) + \\
 & + \sum_{s=1, s \neq l}^N \sum_{u=1}^M p_{(s,u)(l, x_{l,n(l)})} B_l(\bar{x}_l, y_{l,n(l)}) \left(\frac{\partial F(T_{(s,u)}^+(T_l^-(x)), y, z)}{\partial y_{s,n(s)+1}} \right)_{y_{s,n(s)+1}=0} + \\
 & + \sum_{u=1}^M p_{(l,u)(l, x_{l,n(l)})} B_l(\bar{x}_l, y_{l,n(l)}) \left(\frac{\partial F(T_{(l,u)}^+(T_l^-(x)), y, z)}{\partial y_{l,n(l)}} \right)_{y_{l,n(l)}=0}; \quad (14)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z_{l,j_l}} \right)_{z_{l,j_l}=0} - \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z_{l,j_l}} = \\
 & = \frac{v_l(j_l-1)}{g_l(j_l-1)} \Phi_l(j_l, z_{l,j_l}) \left(\frac{\partial F(R_l^{j_l-1}(x), y, z)}{\partial z_{l,j_l-1}} \right)_{z_{l,j_l-1}=0} + \\
 & + \frac{\varphi_l(j_l+1)}{g_l(j_l+1)} \Phi_l(j_l, z_{l,j_l}) \left(\frac{\partial F(R_l^{j_l+1}(x), y, z)}{\partial z_{l,j_l+1}} \right)_{z_{l,j_l+1}=0}. \quad (15)
 \end{aligned}$$

Покажем, что функции распределения вероятностей $F(x, y, z)$, определенные формулами (9) – (11), являются решением уравнений (13) – (15), а следовательно, и (12).

Подставим (9) в (13) и разделим обе части полученного соотношения на $\lambda F(x, y, z)$. Получим следствие уравнения трафика (6).

Подставим (9) в (14), приведём подобные слагаемые и разделим обе части полученного соотношения на $\lambda B_l(\bar{x}_l, y_{l,n(l)}) F(T_l^-(x), y, z)$. Получим уравнение трафика (5).

Наконец, подставим (9) в (15). Получим тождество.

Теорема доказана полностью.

Из теоремы с учетом равенства $P(x) = F(x, +\infty, +\infty)$ вытекает следующее утверждение.

Следствие. Если выполняются соотношения (8), то процесс $x(t)$ эргодичен, а его стационарное распределение $\{P(x), x \in X\}$ не зависит от функционального вида распределений $B_l(\bar{x}_l, \bar{y})$, $\Phi_l(k, \bar{y})$ и имеет вид

$$P(x) = p_1(x_1)p_2(x_2) \times \dots \times p_N(x_N),$$

где $p(x_i)$ определяются по формулам (10) – (11).

Заключение

Исследованы открытые сети массового обслуживания, в которых циркулируют заявки разных типов, а приборы в узлах могут работать в нескольких режимах. Дисциплиной обслуживания заявок является LCFS PR. Определён вид стационарных функций распределения, плотности распределения и установлены условия инвариантности стационарного распределения вероятностей состояний указанных сетей относительно вида законов распределения величин работ по обслуживанию поступающих заявок и переключению режимов приборов в узлах при фиксированных первых моментах этих законов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малинковский Ю.В., Нуеман А.Ю. Мультипликативность стационарного распределения в открытых сетях с многорежимными стратегиями обслуживания // Весці НАН Беларусі. 2001. № 3. С. 129–134.
2. Малинковский Ю.В., Старовойтов А.Н., Ерёмкина А.Р. Инвариантность стационарного распределения вероятностей состояний сетей с многорежимными стратегиями обслуживания, разнотипными заявками и дисциплиной обслуживания LCFS PR // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2009. № 3(8). С. 33–39.
3. Старовойтов А.Н. Инвариантность стационарного распределения состояний открытой сети с многорежимными стратегиями обслуживания // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. 2005. № 5(32). С. 169–171.
4. Старовойтов А.Н. Об инвариантности стационарных распределений вероятностей состояний открытой сети с многорежимными стратегиями обслуживания // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. 2006. № 4(37). С. 159–161.
5. Летуневич Ю.Е. Стационарное распределение состояний открытой неоднородной сети с многорежимными стратегиями и немедленным обслуживанием // Современные информационные компьютерные технологии: сб. науч. ст. Междунар. науч. конф., Гродно, 21 – 24 апреля 2008 г.: в 2 ч. / ГрГУ им. Я. Купалы; редкол.: Е.А. Ровба, А.М. Кадан (отв. редактор) [и др.]. Гродно, 2008. Ч. 2. С. 97–99.
6. Ивницкий В.А. Теория сетей массового обслуживания. М.: Физматлит, 2004. 772 с.

Ерёмкина Александра Рафаэловна

Гродненский государственный университет им. Янки Купалы

Малинковский Юрий Владимирович

Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины

E-mail: aleksandrea@mail.ru; Malinkovsky@gsu.by

Поступила в редакцию 31 мая 2011 г.