УДК 519.865

К.И. Лившиц, Я.С. Бублик

ВЕРОЯТНОСТЬ РАЗОРЕНИЯ СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ ПРИ ДВАЖДЫ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПОТОКАХ СТРАХОВЫХ ПРЕМИЙ И СТРАХОВЫХ ВЫПЛАТ[1]

Найдена вероятность разорения страховой компании в стационарном режиме при дважды стохастических потоках страховых премий и страховых выплат и малой нагрузке страховой премии.

Ключевые слова: *вероятность разорения*, *дважды стохастический поток*, *нагрузка страховой премии.*

В [1] было рассмотрено обобщение классической модели [2] страховой компании на случай, когда интенсивность потока страховых выплат представляет собой дискретный марковский процесс с непрерывным временем. При этом скорость поступления страховых премий считалась детерминированной и неизменной во времени. Это допущение также плохо соответствует реальности, особенно, если рассматривать не общий портфель страховых рисков, а каждый отдельный вид страхования. Более естественно считать, что страховые премии, как и страховые выплаты, поступают в случайные моменты времени, а интенсивности потоков страховых выплат и страховых премий образуют не зависящие друг от друга дискретные марковские процессы.

1. Математическая модель страховой компании

Итак, будем считать, что интенсивность потока страховых премий $\lambda(t)$ является однородной цепью Маркова с непрерывным временем и m состояниями $\lambda(t)=\lambda_i$ [3]. Переход из состояния в состояние задается матрицей инфинитезимальных характеристик $\mathrm{A}=\left[\alpha_{ij}\right]$ ранга $m-1$. Таким образом, переход из состояния i в состояние j за малое время Δt имеет вероятность

$$P_{ij}(\Delta t)=\alpha_{ij}\Delta t+o(\Delta t),\ i\neq j;$$
$$P_{ii}(\Delta t)=1+\alpha_{ii}\Delta t+o(\Delta t),\ i=\overline{1,m},$$

где $\alpha_{ij}\geq 0$ при $i\neq j$ и

$$\sum_{j=1}^{m}\alpha_{ij}=1. \qquad (1)$$

Обозначим $P_i(t)=P\{\lambda(t)=\lambda_i\},\ i=\overline{1,m}.$ Если управляющая цепь является неразложимой, то существуют финальные вероятности

$$\pi_i=\lim_{t\to\infty}P_i(t),$$

[1] Работа выполнена в рамках аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы» (2009 – 2011 годы), проект № 2.1.2/11803 и гранта РФФИ № 11-01-90713-моб. ст.

которые являются решением системы уравнений

$$\sum_{j=1}^{m} \pi_j \alpha_{ji} ; \tag{2}$$

$$\pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_m = 1. \tag{3}$$

Обозначим, далее, через λ_0 среднюю интенсивность потока страховых премий в стационарном режиме:

$$\lambda_0 = \sum_{i=1}^{m} \pi_i \lambda_i . \tag{4}$$

Будем считать, что страховые премии являются независимыми случайными величинами с плотностью распределения $\varphi(x)$, средним значением $M\{x\} = a$ и моментами $M\left\{x^k\right\} = a_k, \quad k = 2,3.$

Будем считать, что интенсивность потока страховых выплат $\mu(t)$ также является однородной цепью Маркова с непрерывным временем и n состояниями интенсивности $\mu(t) = \mu_i$. Переход из состояния в состояние задается матрицей инфинитезимальных характеристик $\mathrm{B} = \left[\beta_{ij}\right]$ ранга $n-1$, где $\beta_{ij} \geq 0$ при $i \neq j$ и

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} = 0 . \tag{5}$$

Обозначим через ρ_j – финальные вероятности состояний μ_j. Величины ρ_j являются решениями системы уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} \rho_j \beta_{ji} = 0 ; \tag{6}$$

$$\rho_1 + \rho_2 + \cdots + \rho_n = 1. \tag{7}$$

Обозначим через μ_0 среднюю интенсивность потока страховых выплат:

$$\mu_0 = \sum_{i=1}^{n} \rho_i \mu_i . \tag{8}$$

Будем считать, что страховые выплаты являются независимыми случайными величинами с плотностью распределения $\psi(x)$, средним значением $M\{x\} = b$ и моментами $M\left\{x^k\right\} = b_k, k = 2,3$.

Наконец, будем считать, что с начала функционирования страховой компании прошло какое-то время, имеются застрахованные риски, потоки страховых премий и страховых выплат не зависят друг от друга.

Пусть $S(t)$ – капитал компании в момент времени t. Если интенсивности потоков страховых премий и страховых выплат в момент времени t равны $\lambda(t) = \lambda_i$ и $\mu(t) = \mu_j$ соответственно, то изменение капитала компании за время Δt определится соотношением

$$\Delta S(t)=S(t+\Delta t)-S(t)=\begin{cases}0, & \text{с вероятностью } (1-\lambda_i\Delta t)(1-\mu_j\Delta t)+o(\Delta t),\\ x, & \text{с вероятностью } \lambda_i\Delta t\varphi(x)\,dx+o(\Delta t),\\ -y, & \text{с вероятностью } \mu_j\Delta t\psi(y)\,dy+o(\Delta t),\end{cases} \tag{9}$$

где x – случайная страховая премия , а y – случайная страховая выплата за время Δt. Переходя в (9) к пределу при $\Delta t\to 0$ и усредняя, получим, что изменение среднего капитала компании $\overline{S}(t)$ определится уравнением

$$\dot{\overline{S}}(t)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i P\{\lambda(t)=\lambda_i\}a-\sum_{i=1}^{n}\mu_i P\{\mu(t)=\mu_i\}b.$$

Откуда

$$\overline{S}(t)=S(0)+(\lambda_0 a-\mu_0 b)t+$$
$$+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i a\int_0^t(P\{\lambda(t)=\lambda_i\}-\pi_i)\,dt-\sum_{i=1}^{n}\mu_i b\int_0^t(P\{\mu(t)=\mu_i\}-\rho_i)\,dt. \tag{10}$$

Из выражения (10) следует, что при $t\gg 1$ капитал компании в среднем монотонно возрастает, если

$$\lambda_0 a=(1+\theta)\mu_0 b, \tag{11}$$

где $\theta>0$. При $\theta<0$ компания разоряется. Параметр θ, как и в классической модели $[2]$, – нагрузка страховой премии.

2. Уравнения для вероятностей разорения и выживания

Пусть $T=\inf\{t:S(t)<0\}$ и $T=\infty$, если $S(t)>0\ \forall t$. Случайная величина T – момент разорения $[2]$. Обозначим

$$P_{ij}(s)=P\{T=\infty|S(0)=s,\lambda(0)=\lambda_i,\mu(0)=\mu_j\}$$

и

$$G_{ij}(s)=P\{T<\infty|S(0)=s,\ \lambda(0)=\lambda_i,\ \mu(0)=\mu_j$$

– вероятности выживания и разорения страховой компании соответственно при условии, что в начальный момент времени ее капитал равен s и значения интенсивностей потоков страховых премий и выплат равны $\lambda=\lambda_i$ и $\mu=\mu_i$. Учитывая, что начальный капитал и начальные значения интенсивностей не зависят друг от друга, вероятности выживания и разорения страховой компании, при условии, что ее начальный капитал равен s будут равны соответственно

$$P(s)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\pi_i\rho_j P_{ij}(s),\quad G(s)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\pi_i\rho_j G_{ij}(s). \tag{12}$$

Для вывода уравнений, определяющих $P_{ij}(s)$, рассмотрим два соседних момента времени t и $t+\Delta t$. Пусть в момент времени t капитал компании равен s, интенсивность $\lambda=\lambda_i$, интенсивность $\mu=\mu_j$. За время Δt могут произойти следующие события:

1. С вероятностью $(1-\lambda_i\Delta t)(1-\mu_j\Delta t)(1+\alpha_{ii}\Delta t)(1+\beta_{jj}\Delta t)+o(\Delta t)$ страховые премии не поступают, страховые выплаты не производятся, интенсивности потоков не меняются.

2. С вероятностью $\lambda_i \Delta t \varphi(x)dx + o(\Delta t)$ поступает страховая премия размера x, выплаты не производятся, интенсивности потоков не меняются.

3. С вероятностью $\mu_j \Delta t \psi(x)dx + o(\Delta t)$ производится страховая выплата размера x, страховые премии не поступают, интенсивности потоков не меняются.

4. С вероятностью $\alpha_{ik}\Delta t + o(\Delta t)$ интенсивность потока страховых премий изменяется с λ_i на λ_k, страховые выплаты не производятся, страховые премии не поступают.

5. С вероятностью $\beta_{jk}\Delta t + o(\Delta t)$ интенсивность потока страховых выплат изменяется с μ_j на μ_k, страховые выплаты не производятся, страховые премии не поступают.

Остальные события имеют вероятность $o(\Delta t)$.

Используя формулу полной вероятности, получим

$$P_{ij}(s) = \left(1 - \left(\lambda_i + \mu_j\right)\Delta t + \left(\alpha_{ii} + \beta_{jj}\right)\Delta t\right)P_{ij}(s) + \lambda_i \Delta t \int_0^\infty P_{ij}(s+x)\varphi(x)dx +$$

$$+ \mu_j \Delta t \int_0^s P_{ij}(s-x)\psi(x)dx + \sum_{k \neq i} \alpha_{ik} P_{kj}(s)\Delta t + \sum_{k \neq j} \beta_{jk} P_{ik}(s)\Delta t + o(\Delta t).$$

Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим систему уравнений для вероятностей выживания

$$\left(\lambda_i + \mu_j\right)P_{ij}(s) = \lambda_i \int_0^\infty P_{ij}(s+x)\varphi(x)dx + \mu_j \int_0^s P_{ij}(s-x)\psi(x)dx +$$

$$+ \sum_{k=1}^m \alpha_{ik} P_{kj}(s) + \sum_{k=1}^n \beta_{jk} P_{ik}(s) \tag{13}$$

с граничными условиями

$$\lim_{s \to \infty} P_{ij}(s) = 1, \tag{14}$$

которые вытекают из того, что при неограниченном росте начального капитала компания выживает с вероятностью единица при любом начальном значении интенсивностей потоков премий и выплат.

Соответствующие (13) уравнения для вероятностей разорения имеют вид

$$\left(\lambda_i + \mu_j\right)G_{ij}(s) = \lambda_i \int_0^\infty G_{ij}(s+x)\varphi(x)dx + \mu_j \int_0^s G_{ij}(s-x)\psi(x)dx + \mu_j \int_s^\infty \psi(x)dx +$$

$$+ \sum_{k=1}^m \alpha_{ik} G_{kj}(s) + \sum_{k=1}^n \beta_{jk} G_{ik}(s) \tag{15}$$

с граничными условиями

$$\lim_{s \to \infty} G_{ij}(s) = 0. \tag{16}$$

3. Вероятности разорения при малой нагрузке страховой премии

Получить точное решение систем уравнений (13) и (15) в общем случае не удается даже при $m = n = 1$. Поэтому рассмотрим далее асимптотический случай, когда нагрузка страховой премии $\theta \ll 1$. Решение системы уравнений (15) будем искать в виде

$$G_{ij}(s) = C(\theta) f_{ij}(\theta s, \theta). \tag{17}$$

Относительно функций $f_{ij}(z,\theta)$ будем предполагать, что они являются трижды дифференцируемыми по своим аргументам. Будем также считать, что

$$\lim_{\theta\to 0} C(\theta) \neq 0 .$$

Так как функция $C(\theta)$ произвольна, то на функции $f_{ij}(z,\theta)$ можно наложить дополнительное условие

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \pi_i \rho_j f_{ij}(0,\theta) = 1. \tag{18}$$

Подставляя выражения (17) в уравнения (15) и сделав замену переменной $\theta s = z$, получим уравнения относительно функций $f_{ij}(z,\theta)$

$$(\lambda_i + \mu_j) C(\theta) f_{ij}(z,\theta) = \lambda_i C(\theta)\int_0^{\infty} f_{ij}(z+\theta x,\theta)\varphi(x)dx + \mu_j C(\theta)\int_0^{\infty} f_{ij}(z-\theta x,\theta)\psi(x)dx +$$

$$+C(\theta)\sum_{k=1}^{m}\alpha_{ik} f_{kj}(z,\theta) + C(\theta)\sum_{k=1}^{n}\beta_{jk} f_{ik}(z,\theta) + R(\theta), \tag{19}$$

где
$$R(\theta) = \mu_j \int_{\frac{z}{\theta}}^{\infty} \psi(x)dx - \mu_j C(\theta)\int_{\frac{z}{\theta}}^{\infty} f_{ij}(z-\theta x)\psi(x)dx.$$

Оценим поведение $R(\theta)$ при $\theta \ll 1$. Имеем

$$\frac{1}{\theta^3}\int_{\frac{z}{\theta}}^{\infty}\psi(x)dx = \frac{1}{z^3}\int_{\frac{z}{\theta}}^{\infty}\frac{z^3}{\theta^3}\psi(x)dx \le \frac{1}{z^3}\int_{\frac{z}{\theta}}^{\infty} x^3\psi(x)dx \xrightarrow[\theta\to 0]{} 0 ,$$

так как по условию $M\left\{x^3\right\} = b_3$ существует. Так как $f_{ij}(z,\theta)$ считается дифференцируемой и, следовательно, ограниченной, то аналогично ведет себя и второе слагаемое. Поэтому $R(\theta) = o\left(\theta^3\right)$ и в дальнейшем это слагаемое учитываться не будет.

Обозначим

$$f_{ij}(z) = \lim_{\theta\to 0} f_{ij}(z,\theta). \tag{20}$$

Переходя в (19) к пределу при $\theta \to 0$, получим, что функции $f_{ij}(z)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\sum_{k=1}^{m}\alpha_{ik} f_{kj}(z) + \sum_{k=1}^{n}\beta_{jk} f_{ik}(z) = 0. \tag{21}$$

Введем вектор-строки

$$f_i(z) = [f_{i1}(z) \quad f_{i2}(z) \quad \cdots \quad f_{in}(z)], \quad i = \overline{1,m},$$

и обозначим

$$X = \begin{bmatrix} f_1(z)^T \\ f_2(z)^T \\ \dots \\ f_m(z)^T \end{bmatrix}.$$

Тогда система уравнений (21) может быть переписана в виде

$$GX = 0, \tag{22}$$

где $G = \mathrm{A} \otimes I_n + I_m \otimes \mathrm{B}$ – матрица размера $mn \times mn$ и знак $\otimes$ означает прямое произведение матриц $[4]$.

Пусть α_i – собственные значения матрицы A и β_j – собственные значения матрицы B. Тогда собственные значения матрицы G равны $\alpha_i + \beta_j$ $\left(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}\right)$ [4]. Из соотношений (1) и (5) вытекает, что матрицы A и B имеют собственные значения $\alpha_m = 0$ и $\beta_n = 0$ кратности 1 с учетом ранга матриц. Далее, так как

$$\alpha_{ii} = -\sum_{i \neq j} \alpha_{ij} < 0;\ \alpha_{ij} \geq 0, i \neq j,$$

то матрица A – полуустойчива $[5]$, то есть действительные части всех ее собственных значений неположительны. Учитывая, что $\operatorname{rang} \mathrm{A} = m - 1$, получаем, что $m-1$ собственное значение матрицы A имеет отрицательные действительные части. Аналогично, $n-1$ собственное значение матрицы B имеет отрицательные действительные части. Таким образом, собственные значения $\alpha_i + \beta_j$ матрицы G отличны от нуля при $i \neq m, j \neq n$ и $\alpha_m + \beta_n = 0$. Отсюда вытекает, что $\operatorname{rang} G = mn - 1$ и, следовательно, решение системы уравнений (22) имеет вид

$$f_{ij}(z) = f(z), \tag{23}$$

где $f(z)$ – неопределенная пока функция.

Представим теперь функции $f_{ij}(z,\theta)$ в виде

$$f_{ij}(z,\theta) = f(z) + A_{ij}(z)\theta + o(\theta). \tag{24}$$

Подставляя разложения (24) в уравнения (19), раскладывая $f(z \pm \theta x)$, $A_{ij}(z \pm \theta x)$ в ряд Тейлора и ограничиваясь членами разложения, имеющими порядок θ, получим, что

$$\left[\sum_{k=1}^{m} \alpha_{ik} A_{kj}(z) + \sum_{k=1}^{n} \beta_{jk} A_{ik}(z) \right] C(\theta)\theta + \left(\lambda_i a - \mu_j b\right) f'(z) C(\theta)\theta + o(\theta) = 0. \tag{25}$$

Наконец, с учетом (11)

$$\lambda_i a - \mu_j b = (\lambda_i - \lambda_0) a - \left(\mu_j - \mu_0\right) b + \mu_0 b\theta.$$

Переходя в (25) к пределу при $\theta \to 0$, получим

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_{ik} A_{kj}(z) + \sum_{k=1}^{n} \beta_{jk} A_{ik}(z) = -\left[(\lambda_i - \lambda_0) a - \left(\mu_j - \mu_0\right) b\right] f'(z). \tag{26}$$

Представим теперь функции $f_{ij}(z,\theta)$ в виде

$$f_{ij}(z,\theta) = f(z) + A_{ij}(z)\theta + B_{ij}(z)\theta^2 + o\left(\theta^2\right). \tag{27}$$

Подставляя разложения (27) в уравнения (19), раскладывая $f(z \pm \theta x)$, $A_{ij}(z \pm \theta x)$, $B_{ij}(z \pm \theta x)$ в ряд Тейлора и ограничиваясь членами, имеющими порядок θ^2, получим, учитывая (26), что при $\theta \to 0$

$$\begin{gathered}\sum_{k=1}^{m}\alpha_{ik}B_{kj}(z) + \sum_{k=1}^{n}\beta_{jk}B_{ik}(z) + \left[(\lambda_i - \lambda_0)a - \left(\mu_j - \mu_0\right)b\right]A'_{ij}(z) + \\ + \mu_0 bf'(z) + \frac{\lambda_i a_2 + \mu_j b_2}{2} f''(z) = 0.\end{gathered} \tag{28}$$

Умножая уравнения (28) на π_i и ρ_j и просуммировав уравнения, получим с учетом (2) и (6), что

$$\frac{\lambda_0 a_2 + \mu_0 b_2}{2} f''(z) + \mu_0 bf'(z) + \sum_{i=i}^{m}\pi_i(\lambda_i - \lambda_0)aV'_i(z) - \sum_{j=1}^{n}\rho_j\left(\mu_j - \mu_0\right)bU'_j(z) = 0, \tag{29}$$

где
$$U_j(z) = \sum_{i=1}^{m}\pi_i A_{ij}(z), \quad j = \overline{1,n}, \tag{30}$$

и
$$V_i(z) = \sum_{j=1}^{n}\rho_j A_{ij}(z), \quad i = \overline{1,m}. \tag{31}$$

Из соотношений (26) с учетом (2), (4) и (6), (8), умножая уравнения системы на π_i и ρ_j соответственно и суммируя, получим, что функции $U_j(z)$ и $V_i(z)$ удовлетворяют системам уравнений

$$\sum_{k=1}^{n}\beta_{jk}U_k(z) = \left(\mu_j - \mu_0\right)bf'(z) \tag{32}$$

и
$$\sum_{k=1}^{m}\alpha_{ik}V_k(z) = -(\lambda_i - \lambda_0)af'(z). \tag{33}$$

Рассмотрим систему уравнений (32). Ранг матрицы $\left[\beta_{jk}\right]$ равен $n-1$. Перепишем систему (32) в виде

$$\sum_{k=1}^{n-1}\beta_{jk}U_k(z) = -\beta_{jn}U_n(z) + \left(\mu_j - \mu_0\right)bf'(z).$$

Откуда [1]

$$U_k(z) = U_n(z) + \sum_{k=1}^{n-1}Q_{kj}\left(\mu_j - \mu_0\right)bf'(z), \tag{34}$$

где
$$Q = \left[Q_{ij}\right] = \begin{bmatrix}\beta_{11} & \cdots & \beta_{1,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{n-1,1} & \cdots & \beta_{n-1,n-1}\end{bmatrix}^{-1}. \tag{35}$$

Аналогично,

$$V_k(z) = V_m(z) - \sum_{j=1}^{m-1} R_{kj}\left(\lambda_j - \lambda_0\right) af'(z), \tag{36}$$

где

$$R = \left[R_{ij}\right] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1,m-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{m-1,1} & \cdots & \alpha_{m-1,m-1} \end{bmatrix}^{-1}. \tag{37}$$

Подставляя соотношения (34) и (36) в (29), получим уравнение на функцию $f(z)$:

$$A_1 f''(z) + A_2 f'(z) = 0, \tag{38}$$

где

$$A_1 = \frac{\lambda_0 a_2 + \mu_0 b_2}{2} -$$

$$-a^2 \sum_{k=1}^{m-1} \pi_k (\lambda_k - \lambda_0) \sum_{j=1}^{m-1} R_{kj}\left(\lambda_j - \lambda_0\right) - b^2 \sum_{k=1}^{n-1} \rho_k (\mu_k - \mu_0) \sum_{j=1}^{n-1} Q_{kj}\left(\mu_j - \mu_0\right), \tag{39}$$

$$A_2 = \mu_0 b .$$

Откуда

$$f(z) = C_1 + C_2 \exp\left\{-\frac{A_2}{A_1} z\right\}. \tag{40}$$

Покажем, что константа $A_1 > 0$. Для этого рассмотрим квадратичную форму

$$I = \sum_{i=1}^{m-1} \pi_i x_i \sum_{j=1}^{m-1} R_{ij} x_j,$$

где $x = \left[x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_{m-1}\right]^T$ – произвольный вектор. Обозначим $y_i = \sum_{j=1}^{m-1} R_{ij} x_j$. Так как $R = \mathrm{A}^{-1}$, то $x_i = \sum_{k=1}^{m-1} \alpha_{ik} y_k$, и квадратичную форму I можно переписать в виде

$$I = \sum_{i=1}^{m-1} \pi_i y_i \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_{ij} y_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{m-1} \pi_i \alpha_{ii} y_i^2 + \sum_{i \neq j} \pi_i \alpha_{ij} y_i y_j \le \sum_{i=1}^{m-1} \pi_i \alpha_{ii} y_i^2 + \sum_{i \neq j} \pi_i \alpha_{ij} \frac{y_i^2 + y_j^2}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{m-1} \pi_i \alpha_{ii} y_i^2 + \sum_{i \neq j} \pi_i y_i^2 \alpha_{ij}\right] + \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{m-1} \pi_i \alpha_{ii} y_i^2 + \sum_{i \neq j} \pi_i y_j^2 \alpha_{ij}\right] =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m-1} \pi_i y_i^2 \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m-1} y_j^2 \sum_{i=1}^{m-1} \pi_i \alpha_{ij} \le 0,$$

так как из условия (1) $\sum_{j=1}^{m-1} \alpha_{ij} + \alpha_{im} = 0$, где $\alpha_{im} \ge 0$, следует, что $\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_{ij} \le 0$, а из условия (2) $\sum_{i=1}^{m-1}\pi_i\alpha_{ij}+\pi_m\alpha_{mj}=0$ следует, что $\sum_{i=1}^{m-1}\pi_i\alpha_{ij}\le 0$. Применяя полученный результат к выражению для A_1, получим, что $A_1>0$.

Граничные условия (16) дают

$$\lim_{z\to\infty} f(z)=0.$$

Откуда постоянная $C_1=0$. Таким образом,

$$f_{ij}(\theta s,\theta)=C_2\exp\left\{-\frac{A_2}{A_1}\theta s\right\}+O(\theta).$$

Из условия (18) имеем теперь $C_2=1$.

Таким образом, вероятность разорения

$$G_{ij}(s)=C(\theta)\exp\left\{-\frac{A_2}{A_1}\theta s\right\}+O(\theta). \tag{41}$$

Для определения функции $C(\theta)$ рассмотрим теперь систему уравнений (15) при $s=0$. Из (15) при $s=0$ получим, очевидно,

$$\left(\lambda_i+\mu_j\right)G_{ij}(0)=\lambda_i\int_0^\infty G_{ij}(x)\varphi(x)\,dx+\sum_{k=1}^{m}\alpha_{ik}G_{kj}(0)+\sum_{k=1}^{n}\beta_{jk}G_{ik}(0)+\mu_j. \tag{42}$$

Умножая уравнения системы (42) на π_i,ρ_j и складывая уравнения, получим, учитывая (2) и (6),

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\pi_i\rho_j\left(\lambda_i+\mu_j\right)G_{ij}(0)=\sum_{i=1}^{m}\pi_i\lambda_i\sum_{j=1}^{n}\rho_j\int_0^\infty G_{ij}(x)\varphi(x)\,dx+\mu_0.$$

Откуда

$$C(\theta)=\frac{\mu_0}{\lambda_0+\mu_0-\lambda_0\int_0^\infty e^{-\frac{A_2}{A_1}\theta x}\varphi(x)\,dx}. \tag{43}$$

Таким образом, при $\theta\ll 1$ окончательно получаем, что вероятность разорения

$$G_{ij}(s)=\frac{\mu_0\exp\left\{-\frac{A_2}{A_1}\theta s\right\}}{\lambda_0+\mu_0-\lambda_0\int_0^\infty e^{-\frac{A_2}{A_1}\theta x}\varphi(x)\,dx}+O(\theta), \tag{44}$$

где постоянные A_1 и A_2 определяются формулами (39). Учитывая в разложениях для функций $f_{ij}(z,\theta)$ члены, имеющие порядок θ^3 и т.д., можно улучшить точность построенной аппроксимации. Получающиеся выражения являются, однако, достаточно громоздкими и поэтому здесь не приводятся.

Для оценки точности получившейся аппроксимации рассмотрим в качестве примера случай, когда $m = n = 1$, а плотности распределения страховых премий и страховых выплат являются экспоненциальными с параметрами a и b соответственно. В этом случае истинная вероятность разорения имеет вид [6]

$$G(s) = \frac{a+b}{a+b(1+\theta)}\exp\left(-\frac{\theta s}{a+b(1+\theta)}\right).$$

Графики функции $G(s)$ (сплошные линии) и ее оценки $\hat{G}(s)$ (пунктирные линии), построенной по формуле (44), приведены на рис. 1. Как видно из рис. 1, при малых значениях θ достигается достаточно хорошая точность аппроксимации.

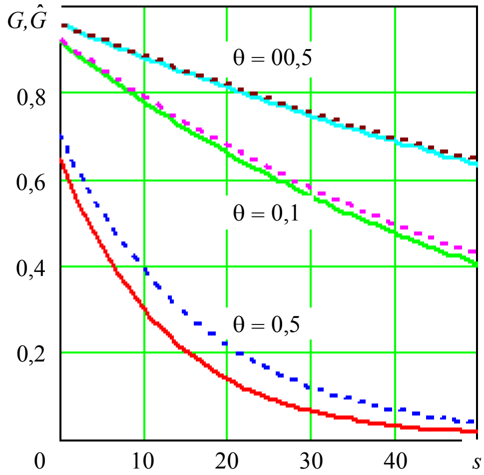

Рис. 1

Заключение

В работе найдена основная характеристика деятельности страховой компании – вероятность ее разорения при дважды стохастических потоках страховых премий и страховых выплат и дополнительном предположении о малости нагрузки страховой премии. Предложенная методика может быть использована как для расчета других статистических характеристик для рассмотренной модели, так и для исследования других математических моделей страхования при условии, что нагрузка страховой премии является малой.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лившиц К.И.*, *Бублик Я.С.* Вероятность разорения страховой компании при дважды стохастическом потоке страховых выплат // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 1(10). С. 66–77.
2. *Panjer H.Y.*, *Willmont G.E.* Insurance Risk Models. Society of Actuaries, 1992. 442 p.
3. *Наумов В.А.* Марковские модели потоков требований // Системы массового обслуживания и информатика. М.: УДН, 1978. С. 67–73.
4. *Ланкастер П.* Теория матриц. М.: Наука, 1978. 280 с.
5. *Маркус М.*, *Минк Х.* Обзор по теории матриц и матричных неравенств. М.: Наука, 1972. 232 с.
6. *Лившиц К.И.* Вероятность разорения страховой компании для пуассоновской модели // Изв. вузов. Физика. 1999. № 4. С. 28–33.

Лившиц Климентий Исаакович
Томский государственный университет
Бублик Яна Сергеевна
Филиал Кемеровского государственного университета
в г. Анжеро-Судженске
E-mail: kim47@mail.ru; yana@asf.ru

Поступила в редакцию 1 сентября 2011 г.